ATTI

DEL

CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI

BOLOGNA 3-10 SETTEMBRE 1928 (VI)

TOMO III.

COMUNICAZIONI

SEZIONE I [C-D] - VI

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

EDITORE

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

Bologna, Società Tipografica già Compositori - 1930 - VIII
PRINTED in ITALY

COMUNICAZIONI

Sezione Prima C

A. HAAR (Szeged - Ungheria)

ÜBER EINDEUTIGKEIT UND ANALYZITÄT DER LÖSUNGEN PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

I.

Es ist das Ziel meines Vortages eine Methode darzulegen, die es gestattet, diejenigen Sätze, die man an die Spitze der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen stellt, in sinngemässer Weise auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung zu übertragen. Es handelt sich dabei im wesentlichen um die Übertragung der folgenden bekannten Tatsachen: Wenn die rechte Seite der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

in einem Gebiet der x, y-Ebene stetig ist und die Lipschitzsche Bedingung erfüllt, so wird gezeigt, nachdem man die Existenz einer Lösung, die durch einen gegebenen Punkt dieses Gebietes hindurchgeht, bewiesen hat:

1°) dass es *nur* eine Lösung dieser Art gibt;

2°) dass, falls die in der Differentialgleichung rechts stehende Funktion einen Parameter α stetig enthält, $(F = F(x, y, \alpha))$ so ist die fragliche Lösung eine stetige Funktion dieses Parameters.

Wie steht es mit den Analoga dieser Sätze in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung? Wir schreiben diese — um charakteristische Mannigfaltigkeiten zu vermeiden — in die Form:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, u, x, y\right); \qquad (u = u(x, y)) \tag{1}$$

das sog. Cauchysche Problem lautet bekanntlich, wie folgt: man sucht eine Lösung $u(x, y)$, die für $y = 0$ in eine gegebene Funktion $f(x)$ übergeht. Die Lösung dieses Problems wird durch die Charakteristikentheorie (unter geringeren Annahmen, als durch die Cauchy-Kowalewskischen Majorantenmethode) geliefert, da dabei — beiläufig bemerkt — nur die Existenz der zweiten Ableitungen der Funktionen F und f für die in Betracht kommenden Wertsysteme vorausgesetzt wird. Was aber die *Eindeutigkeit* der Lösung betrifft, so liefert die Charakteristikentheorie nur den Satz, dass es unter *den zweimal differenzierbaren Funktionen* $u(x, y)$ nur eine geben, kann, die die Differentialgleichung (1) und

die Randbedingung $u(x, 0)=f(x)$ erfüllt. Diese zweimalige Differezierbarkeit ist dabei unerlässlich, da der Satz, dass jede Lösung von (1) von Charakteristiken umsponnen wird, nur für zweimal differenzierbare Lösungen abgeleitet werden kann. Freilich kann man sich mit diesem Eindeutigkeitssatz nicht begnügen; sie lässt ja die Frage offen, ob nicht eine andere — allerdings nur einmal differenzierbare — Lösung von (1) existiert, die dieselbe Randbedingung erfüllt.

Noch viel weniger vermag die Charakteristikentheorie die zweite oben für gewöhnliche Differentialgleichungen dargelegte Frage für die Gleichung (1) zu beantworten, da ja zunächst unentschieden bleibt, ob durch die Charakteristikentheorie alle Lösungen von (1) geliefert werden. Um daher die aufgeworfenen Fragen in der nötigen Allgemeinheit behandeln zu können, muss man die Charakteristikentheorie verlassen, und die Theorie auf eine umfassendere Grundlage stützen.

II.

Der bekannte von C. JORDAN herrührende Eindeutigkeitsbeweis für gewöhnliche Differentialgleichungen beruht auf das Studium einer Differentialungleichung, deren Lösungen analysiert werden. In entsprechender Weise stütze ich meine Untersuchungen auf einen Satz über partielle Differentialungleichungen von der Form

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqq A\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + B|u| + \delta,$$

wobei A, B, δ positive Konstanten-, $u(x, y)$ aber eine in dem durch die Geraden

$$y=0, \quad y=\frac{1}{A}(x-x'), \quad y=-\frac{1}{A}(x-x'') \qquad (x'<x'')$$

begrenzten Dreieck stetig nach x und y differenzierbare Funktion bedeutet. Es gilt nun der folgende Satz:

Bedeutet M das Maximum der Funktion $|u(x, y)|$ längs der Geraden $y=0$, d. h.

$$|u(x, 0)| \leqq M, \qquad x' \leqq x \leqq x''$$

so gilt an jeder Stelle x, y, die innerhalb des obigen Dreiecks liegt, die Ungleichung

$$|u(x, y)| \leqq Me^{By} + \delta\frac{e^{By}-1}{B}.$$

Der Beweis dieses Satzes ist absolut elementar; setzt man der Kürze halber $A=B=1$ (man kann den allgemeinen Fall sofort auf diesen zurückführen), so beruht der Beweis auf die einfache Tatsache, dass für jedes positive λ die Hülfsfunktion

$$e^{-(1+\lambda)y}[u(x, y)-\delta(e^{y}-1)]$$

ihren Maximalwert (in dem betrachteten Dreieck) auf der Geraden $y=0$ annehmen muss.

1°) Setzt man $M=0$ und $\delta=0$, so sagt der Satz aus, dass die längs $y=0$ verschwindenden Lösungen der Differentialungleichung

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqq A\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + B|u|$$

im ganzen obigen Dreieck identisch verschwinden müssen. Ich habe diesen Fall des Satzes kürzlich in den *Comptes Rendus* bewiesen (2 Juli 1928), und daraus den fraglichen Eindeutigkeitssatz in voller Allgemeinheit abgeleitet. Die Differenz zweier Lösungen der partiellen Differentialgleichung (1), die für $y=0$ dieselben Randwerte annehmen, erfüllt nämlich eine Ungleichung der obigen Art, falls die Funktion $F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, u, x, y\right)$ in Bezug auf ihre ersten beiden Argumente der Lipschitzschen Bedingung genügt — was wir annehmen wollen. Da ferner diese Differenz für $y=0$ verschwindet, so folgt ihr identisches Verschwinden im obigen Dreieck, also der fragliche Eindeutigkeitssatz. Insbesondere konnte ich daraus schliessen, dass jede *einmal stetig differenzierbare Lösung einer analytischen Differentialgleichung, die durch eine analytische Kurve, die keine Charakteristik ist, hindurchgeht, selbst analytisch ist* — ein Satz, der merkwürdiger Weise bisher unbewiesen blieb.

2°) Setzt man $\delta=0$, M aber beliebig, so erhält man einen Satz den Herr HADAMARD in einer Bemerkung, die er meiner genannten Note anschloss, hervorhob. Angewandt auf die Differenz zweier Lösungen der Differentialgleichung (1) liefert die so erhaltene Ungleichung für die fragliche Differenz:

$$|u(x, y)| \leqq Me^{By},$$

d. h. die Tatsache, dass die Lösungen von (1) (im obigen Dreieck) stetig von den Randwerten abhängen, die sie längs der Geraden $y=0$ annehmen.

3°) Setzt man drittens $M=0$, so erhält man den fraglichen Stetigkeitssatz. Ist nämlich $u(x, y)$ eine Lösung von (1), $U(x, y)$ aber eine (im obigen Dreieck stetig differenzierbare) Funktion, die diese Differentialgleichung bis auf einen Fehler von der Grösse δ befriedigt, d. h.

$$\frac{\partial U}{\partial y} = F\left(\frac{\partial U}{\partial x}, U, x, y\right) + \omega(x, y)$$

wobei $|\omega(x, y)| \leqq \delta$ ist und ist ferner $u(x, 0) = U(x, 0)$ für $x' \leqq x \leqq x''$, so erfüllt die Differenz $v = U-u$ eine Ungleichung von der Form

$$\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| \leqq A\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| + B|v| + \delta,$$

falls F der entsprechenden Lipschitzschen Bedingung genügt. Wir erhalten daher für die betrachtete Differenz im obigen Dreieck die Ungleichung

$$|U-u| \leqq \delta\frac{e^{By}-1}{B};$$

sie zeigt, dass $U-u$ mit $\delta=0$ gleichmässig gegen Null strebt. Man kann diesen Satz in leichter Weise so umformen, dass man in F in stetiger Weise einen Parameter einführt, und erhält dann die stetige Dependenz der Lösungen (sofern diese überhaupt existieren) von diesem Parameter.

Die Übertragung dieser Sätze auf den Fall, dass statt den Randwerten längs $y=0$ eine beliebige nichtcharakteristische Kurve gegeben ist, bietet keine Schwierigkeiten.

III.

Bei der Übertragung der dargelegten Sätze auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen treten keine wesentlichen neuen Schwierigkeiten auf. Betrachten wir etwa den Fall dreier unabhängigen Variabler x, y, z; es handelt sich lediglich darum, das oben erwähnte Lemma über die Lösungen einer partiellen Differentialungleichung auf diesen Fall zu verallgemeinern. Dies führt auf die Untersuchung der folgenden Ungleichung:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| \leqq \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| + |u| + \delta \qquad u=u(x, y, z),\ \delta>0,$$

da man durch Einführung neuer Variabler unmittelbar auf diese Form gelangt. Wir betrachten *eine Lösung* $u(x, y, z)$ *dieser Ungleichung* (mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung), *die für* $z=0$ *in einem Gebiet* g *der* x, y*-Ebene so beschaffen ist, dass daselbst*

$$|u(x, y, 0)| \leqq M$$

ist. Alsdann gilt — in voller Analogie zu dem obigen Ergebnis — *in einem Gebiet* G *des* x, y, z*-Raumes die Ungleichung*

$$|u(x, y, z)| \leqq Me^z + \delta(e^z-1),$$

wobei das Gebiet G wie folgt definiert ist: Für jeden Punkt von G ist $z \geqq 0$; das Gebiet g der x, y-Ebene liegt auf dem Rande von G und es besitzt das Gebiet G die Eigenschaft, dass, falls x, y, z ein Punkt von G ist, der nicht in g liegt ($z>0$), so gehören für hinreichend kleine positive h die 4 Punkte mit den Koordinaten

$$x \pm h, \qquad y \pm h, \qquad z-h$$

ebenfalls dem Gebiete G an. Vorausgesetzt ist dabei, dass die Lösung $u(x, y, z)$ in G stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt.

Der Beweis dieses Satzes ist dem unter II. dargelegten analog; aus ihm lassen sich alsdann die entsprechenden Resultate für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen ableiten, insbesondere der Eindeutigkeitssatz und der erwähnte Stetigkeissatz.

Geht man zu Systemen von Differentialgleichungen über, so treten neue Schwierigkeiten auf. Wir betrachten nur den Fall eines linearen homogenen

Differentialgleichungssystem — die Anzahl der Gleichungen möge der Einfachheit halber zwei sein — also ein System von der Form:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial v}{\partial x} + b_{11}u + b_{12}v,$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial v}{\partial x} + b_{21}u + b_{22}v.$$

Wenn die Koeffizienten a_{ik}, b_{ik} *analytische Funktionen* von x, y sind, so ist der betreffende Eindeutigkeitssatz von Herrn HOLMGREN bewiesen (1). Für den Fall eines hyperbolischen Gleichungssystem, d. h. für den Fall, dass die Gleichung zweiten Grades

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

für jedes in Betracht kommende x, y verschiedene reelle Wurzel besitzt, ist dieser Eindeutigkeitssatz unter der Eischränkung, dass die a_{ik} *stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzen*, von Herrn PERRON in einer kürzlich erschienenen Arbeit bewiesen (2). Ich will noch zeigen, dass aus meinem Lemma dieser letztere Satz sich unmittelbar ergibt, unter der geringeren Voraussetzung, dass *nur die ersten Ableitungen der Funktionen a_{ik} existieren und stetig sind.* Man kann nämlich unter dieser Voraussetzung in bekannter Weise an Stelle von u, v durch eine lineare homogene Transformation neue Funktionen U, V einführen, die ein Differentialgleichungssystem von der Form

$$\frac{\partial U}{\partial y} = A_1\frac{\partial U}{\partial x} + B_{11}U + B_{12}V,$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = A_2\frac{\partial V}{\partial x} + B_{12}U + B_{22}V$$

erfüllen. Bezeichnen wir nun mit M_U bezw. M_V die Maxima der Funktionen $|U(x, y)|$ bezw. $|V(x, y)|$, so folgen aus den obigen Gleichungen unmittelbar zwei Differentialungleichungen von der folgenden Form:

$$\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| \leqq A\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| + B|U| + BM_V,$$
$$\left|\frac{\partial V}{\partial y}\right| \leqq A\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| + B|V| + BM_U.$$

Daraus kann man mit Hülfe des in II. dargelegten Satzes unmittelbar entnehmen, dass, falls

$$U(x, 0) = V(x, 0) = 0 \qquad (x' \leqq x \leqq x'')$$

ist, in einem bestimmten in jenem Satz genau präzisierten Gebiete, die Maxima der Funktionen $|U|$ und $|V|$ den Ungleichungen

$$M_U \leqq M_V(e^{By_1} - 1),$$
$$M_V \leqq M_U(e^{By_2} - 1)$$

(1) Öfversigt of Kongl. Vetenskaps-Akademiens 1901, S. 91-103.

(2) Mathematische Zeitschrift, Bd. 27, (1928), S. 549-564.

genügen, wobei y_1 bezw. y_2 die Ordinate desjenigen Punktes bezeichnet, wo die Funktionen $|U|$ bezw. $|V|$ ihren Maximalwert annehmen. Daraus folgt aber das Verschwinden von M_U und M_V d. h. das identische Verschwinden von U und V in hinreichender Nähe der Geraden $y=0$.

Auf die Beweise dieser Resultate, sowie insbesondere auf die Bedeutung und Verallgemeinerung des zuletzt erwähnten Satzes über Differentialgleichungssysteme komme ich in einer ausführlicheren Arbeit zurück.

J. DRACH (Paris - Francia)

SUR LA TRANSFORMATION ET L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE À DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES, PAR L'USAGE EXPLICITE DES CARACTÉRISTIQUES D'AMPÈRE

Méthode générale.

L'étude des cas de réduction d'une équation aux dérivées partielles du second ordre:

$$(E) \qquad r=f(x, y, z, p, q, s, t)$$

à une fonction inconnue z de deux variables indépendantes x, y dont les dérivées successives sont désignées par p, q, r, s, t nous a paru assez importante et assez difficile pour justifier la communication de résultats partiels obtenus par une méthode *nouvelle*, au moins en son *application générale et systématique* (1).

On sait qu'il existe sur chaque surface intégrale de l'équation (E) deux familles de courbes *caractéristiques* définies par l'équation différentielle

$$(1) \qquad dy^2+\frac{\partial f}{\partial s}dydx-\frac{\partial f}{\partial t}dx^2=0$$

le long desquelles les dérivées du troisième ordre de z, que nous désignerons par A, B, C, D, ne sont pas déterminées par les différentielles dx, dy et celles des dérivées secondes dr, ds, dt. On a en outre sur ces caractéristiques, entre ces différentielles, la relation

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial t}dtdx-dyds+dydx\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial p}s+\frac{\partial f}{\partial q}t\right)=0.$$

C'est ainsi que CAUCHY a obtenu les caractéristiques. Mais antérieurement, Ampère les avait rencontrées en cherchant dans quel cas l'intégrale z peut dépendre d'une fonction arbitraire de l'argument u: il se trouve que cet argument u est défini, sur chaque surface intégrale, par l'équation

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0.$$

Si l'on considère l'équation du second degré

$$m^2+m\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

(1) Cf. pour une partie de ces résultats: Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, 182, 1926, p. 1593 et 183, 1926, p. 109.

aux deux racines, supposées distinctes, de cette équation, correspondent les équations différentielles des caractéristiques $dy - m\,dx = 0$ dont les intégrales u telles que $\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ sont les *variables d'Ampère*, que nous désignerons une fois pour toutes par α et β.

L'étude des cas où ces variables α, β sont l'une ou l'autre, ou toutes les deux, des fonctions déterminées de x, y, z, p, q, s, t, qui sont des combinaisons intégrables des équations différentielles des caractéristiques — ce qui n'arrive que d'une façon exceptionnelle — conduit à des réductions de l'équation (E) signalées par Ampère. La méthode a été étendue par DARBOUX en 1870 au cas où en adjoignant à l'équation (E) ses dérivées en x et y des divers ordres, il existe des combinaisons intégrables pour les caractéristiques d'ordre supérieur, caractéristiques que l'on définit encore, à la manière de CAUCHY, en écrivent que les différentielles des dérivées d'ordre n ne déterminent pas toutes les dérivées d'ordre $(n+1)$. Les variables α et β sont alors des fonctions déterminées de x, y, z et des dérivées *paramétriques* de z, les dérivées principales étant seulement celles de r.

On sait que la méthode de DARBOUX conduit à remplacer (E) par un système du *premier ordre* quand il existe pour chaque famille de caractéristiques deux combinaisons intégrables distinctes.

M. E. GOURSAT et ses élèves MM. E. GAU, R. GOSSE, LAINÉ ont développé en détail l'application de la méthode de DARBOUX lorsqu'elle conduit à une réduction au premier ordre de l'équation (E) et formé des *types* étendus d'équations (E), plus particulièrement des équations de la forme:

$$s = \varphi(x, y, z, p, q)$$

qui présentent cette réduction.

§. - La méthode que nous proposons ici, est basée sur le fait que l'on peut *dans tous les cas* considérer des variables α, β demeurant constantes sur les courbes caractéristiques pour chaque surface intégrale de (E) et remplacer l'équation (E) par le système (Σ) à *variables explicites* α, β formé de l'équation (E), qui n'intervient que pour déterminer r et ses dérivées, au moyen des éléments définis par le système (Σ)

$$(\Sigma)\qquad \begin{array}{ll}
\frac{\partial y}{\partial \alpha} = m_1 \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} = m_2 \frac{\partial x}{\partial \beta} \\
\frac{\partial z}{\partial \alpha} = p\frac{\partial x}{\partial \alpha} + q\frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} = p\frac{\partial x}{\partial \beta} + q\frac{\partial y}{\partial \beta} \\
\frac{\partial p}{\partial \alpha} = f\frac{\partial x}{\partial \alpha} + s\frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial p}{\partial \beta} = f\frac{\partial x}{\partial \beta} + s\frac{\partial y}{\partial \beta} \\
\frac{\partial q}{\partial \alpha} = s\frac{\partial x}{\partial \alpha} + t\frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial q}{\partial \beta} = s\frac{\partial x}{\partial \beta} + t\frac{\partial y}{\partial \beta} \\
\frac{\partial s}{\partial \alpha} + m_2\frac{\partial t}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial s}{\partial \beta} + m_1\frac{\partial t}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \beta}
\end{array}$$

où m_1, m_2 sont les racines de l'équation $m^2 + m\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

Si nous regardons ce système (Σ) comme définissant les sept éléments x, y, z, p, q, s, t au moyen des variables α, β et si nous l'étudions au point de vue des conditions d'intégrabilité de ces éléments, on reconnait que les équations qui donnent z sont intégrables en vertu de la relation

$$\frac{\partial(p,x)}{\partial(\alpha,\beta)}+\frac{\partial(q,y)}{\partial(\alpha,\beta)}=0$$

satisfaite en vertu des expressions des dérivées de p et q; celles qui donnent p et q sont intégrables en vertu des équations de la dernière ligne de (Σ) et des dérivées de (E) prises par rapport à α et β. Il ne reste à écrire que les conditions d'intégrabilité de y et de s; les premières donnent pour x une équation du second ordre:

$$(X)\qquad (m_2-m_1)\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}+\left[\frac{dm_2}{d\alpha}\right]\frac{\partial x}{\partial\beta}-\left[\frac{dm_1}{d\beta}\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha}=0$$

où l'on a désigné, par exemple, par $\left[\frac{d\Phi}{d\alpha}\right]$ une dérivée *complète* dont l'expression est:

$$\left[\frac{d\Phi}{d\alpha}\right]=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\alpha}$$

avec

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right)=\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}m_1+\frac{\partial\Phi}{\partial z}(p+qm_1)+\frac{\partial\Phi}{\partial p}(f+sm_1)+\frac{\partial\Phi}{\partial q}(s+tm_1)\right\}\frac{\partial x}{\partial\alpha}$$

On y supposera $\frac{\partial s}{\partial\alpha}$ remplacé par son expression $-m_2\frac{\partial t}{\partial\alpha}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha}$ de telle sorte que $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}$ est une forme bilinéaire par rapport aux dérivées premières de x et de t; chaque terme renfermant une dérivée relative à α et une dérivée relative à β. La condition d'intégrabilité de s donne de même une équation (T) que nous pouvons écrire, en posant $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=F$

$$(T)\qquad (m_2-m_1)\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\partial\beta}+\left[\frac{dm_2}{d\beta}\right]\frac{\partial t}{\partial\alpha}-\left[\frac{dm_1}{d\alpha}\right]\frac{\partial t}{\partial\beta}=\frac{\partial x}{\partial\alpha}\left[\frac{dF}{d\beta}\right]-\frac{\partial x}{\partial\beta}\left[\frac{dF}{d\alpha}\right].$$

La dérivée $\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\partial\beta}$ est donc également linéaire en $\frac{\partial x}{\partial\alpha}, \frac{\partial t}{\partial\alpha}$ et aussi en $\frac{\partial x}{\partial\beta}, \frac{\partial t}{\partial\beta}$.

Le système (Ω) formé par les équations (Σ) auxquelles on ajoute (X) et (T), définit alors toutes les dérivées de y, z, p, q, s et les deux dérivées $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}, \frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\beta}$ au moyen des éléments *paramétriques* qui sont, avec x, y, z, p, q, s, t, les dérivées de x et de t prises par rapport à une seule des variables α, β. Il n'y a plus de condition d'intégrabilité nouvelle. Nous nommerons ce système le *système normal* attaché à l'équation (E) et l'étude de l'équation (E) doit, *d'après nous*, être remplacée par celle de (Ω) et de ses réductions possibles.

La solution générale de (Ω) dépend, en apparence, de quatre fonctions arbitraires, deux de l'argument α et deux de l'argument β, mais comme le système (Ω) est invariant par le changement de α en $f(\alpha)$ et de β en $g(\beta)$, il n'y a réellement que deux fonctions arbitraires essentielles. La substitution du système normal (Ω)

à l'équation (E) n'est pas de pure forme: On peut exprimer toutes les dérivées de z en x et y à l'aide de celles de r et de celles de t et de x en α, β mais les éléments de (Ω) ne peuvent s'exprimer avec ceux déduits de (E).

Quand on *étend* le système (Ω) en ajoutant les équations dérivées des divers ordres c'est-à-dire ici les dérivées des équations (X) et (T) chaque ordre de dérivation introduit *quatre* dérivées paramétriques nouvelles. La dérivation de (E) n'en ajoute que *deux.* Il est *nécessaire,* pour obtenir toutes les réductions de (E), de faire la substitution de (Ω) à (E), c'est-à-dire de se placer dans le *champ* qui renferme explicitement tous les éléments paramétriques de (Ω). La connaissance d'une relation entre ces éléments paramétriques de (Ω) compatible avec les équations de (Ω) — c'est-à-dire satisfaite par un système au moins de fonctions x, y, z, p, q, s, t des variables α et β — constitue un progrès dans la connaissance de certaines solutions de (Ω). Les plus importantes de ces relations sont celles qui peuvent renfermer une fonction arbitraire de α ou de β.

Le raisonnement qui sert dans l'étude de l'équation

$$s=\varphi(x, y, z, p, q)$$

dont les caractéristiques sont x et y, permet ici d'établir que ces relations ont la forme:

$$\Phi\left(x, y, z, p, q, s, t, \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}, \ldots, \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2}, \ldots\right)=P(\alpha)$$

où n'interviennent que des dérivées relatives à la variable α et où $P(\alpha)$ est une fonction arbitraire, ou bien la forme analogue avec des dérivées en β.

En observant que toutes les dérivées $\frac{\partial^{n+1} x}{\partial \alpha^n \partial \beta}$, $\frac{\partial^{n+1} t}{\partial \alpha^n \partial \beta}$, à partir de $n=1$, sont d'une part linéaires en $\frac{\partial^n x}{\partial \alpha^n}$, $\frac{\partial^n t}{\partial \alpha^n}$, d'autre part linéaires en $\frac{\partial x}{\partial \beta}$ et $\frac{\partial t}{\partial \beta}$, on voit que Φ doit satisfaire à la condition:

$$\left[\frac{d\Phi}{d\beta}\right]=A(\Phi)\frac{\partial x}{\partial \beta}+B(\Phi)\frac{\partial t}{\partial \beta}=0$$

d'où l'on conclut deux équations linéaires aux dérivées partielles

$$A(\Phi)=0, \qquad B(\Phi)=0$$

pour définir Φ. La théorie de CLEBSCH permet de décider si ces équations ont des solutions communes, pour un ordre donné de dérivation, et combien elles en ont. On reconnait ici la théorie correspondante à celle de DARBOUX, développée par M. GOURSAT, des *invariants* d'ordre supérieur. Mais il y a plus: (Ω) admettant les transformations: $\alpha=f(a)$, $\beta=g(b)$ où f et g sont arbitraires, la transformation $\alpha=f(a)$ doit changer un invariant Φ en un invariant, c'est-à-dire multiplier simplement Φ par une fonction de a.

En remarquant que d'après une observation faite plus haut, Φ peut-être supposé linéaire par rapport aux dérivées d'ordre supérieur $\frac{\partial^m x}{\partial \alpha^m}$, $\frac{\partial^m t}{\partial \alpha^m}$ on en peut conclure que Φ est *rationnel* par rapport à toutes les dérivées de x et t,

et ne renferme ces éléments que dans certaines combinaisons qu'*on peut construire a priori, indépendamment de l'équation* (E).

Il suffit de considérer les formules de transformation:

$$\frac{\partial x}{\partial a}=\frac{\partial x}{\partial \alpha}f'$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}=\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}f'^2+\frac{\partial x}{\partial \alpha}f''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et celles analogues pour t et de former les polynomes en $\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2},\ldots$ $\frac{\partial t}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2},\ldots$ linéaires par rapport aux plus hautes dérivées, qui sont multipliés par une fonction de a, qui est nécessairement une puissance de f', par la transformation.

Le numérateur et le dénominateur de Φ sont des combinaisons linéaires de polynomes, invariants *relatifs*, d'un même *poids*, c'est-à-dire qui sont multipliés par une même puissance de f'. Les coefficients sont des fonctions de x, y, z, p, q, s, t, éléments qui ne subissent pas de transformation.

Lorsque Φ est du premier ordre, il est simplement homogène en $\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial t}{\partial \alpha}$.

On observera que $\frac{\partial t}{\partial \alpha}:\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ est ici un invariant *absolu* J et qu'on en déduit immédiatement la suite d'invariants absolus

$$\frac{dJ}{da}:\frac{\partial x}{\partial \alpha}=J_1, \qquad \frac{dJ_1}{da}:\frac{\partial x}{\partial \alpha}=J_2,\ldots$$

dont le dénominateur est toujours une puissance de $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ et dont le numérateur est un polynome (invariant relatif) dont le terme d'ordre le plus élevé a la forme

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^k\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial^m t}{\partial \alpha^m}-\frac{\partial t}{\partial \alpha}\frac{\partial^m x}{\partial \alpha^m}\right);$$

c'est avec ces termes *principaux* et les puissances de $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ que l'on peut former les invariants d'*un poids donné*. L'invariant Φ qui est d'ordre minimum, u, peut-être, en changeant cette variable, égalé à a, s'il est absolu, à l'unité s'il est relatif; celui qui vient après, v, s'il existe, est alors toujours une fonction de a, que l'on peut regarder comme *arbitraire*. Il n'y a que deux invariants distincts u, v pour la variable a; les autres étant des fonctions des éléments

$$\frac{dv}{du}, \quad \frac{d}{du}\left(\frac{dv}{du}\right),\ldots$$

Avec les invariants Φ, on envisage aussi des *relations invariantes*: $\psi=0$, qui donnent lieu aux conditions: $A(\psi)=M\psi$ $B(\psi)=N\psi$; la forme des polynomes ψ s'établit encore *a priori*: ce sont des formes linéaires des invariants relatifs, d'un même poids, pour le changement de la variable a.

On sait d'ailleurs construire des invariants Φ avec les polynomes ψ qui donnent trois relations invariantes.

Le développement de cette théorie est réservé à un autre travail; nous nous bornerons à indiquer ici des applications à des types particuliers d'équations qui

justifient notre point de vue. Il est clair que les équations dites de Monge-Ampère (linéaires en r, s, t et $rt-s^2$), pour lesquelles il existe des caractéristiques de CAUCHY du *premier ordre*, conduisent à un *système normal* (Ω) totalement différent (que nous signalerons tout à l'heure). Il en est de même pour les équations résultant de l'élimination d'un paramètre m entre deux relations:

$$r+sm=f(x, y, z, p, q, m); \qquad s+tm=g(x, y, z, p, q, m)$$

qui possèdent un système de caractéristiques du premier ordre, les courbes pour lesquelles $dy=mdx$ définissant ce système.

§. - Ajoutons enfin que cette introduction explicite des variables caractéristiques — c'est-à-dire la recherche des expressions *paramétriques* des variables x, y et de la fonction inconnue z avec ses dérivées de tous ordres — peut également se faire pour les équations d'ordre supérieur, à une fonction z de deux variables indépendantes x, y. Nous en avons donné de nombreux exemples [1] pour des équations particulières de tous les ordres: l'équation unique se trouve remplacée par un système *linéaire* de LAPLACE avec autant de variables indépendantes qu'il y a de caractéristiques, auquel s'ajoute un système d'équations linéaires aux différentielles totales complétement intégrable. Il n'est pas douteux que la méthode ne s'applique encore avec des équations à plus de deux variables.

Applications.

1. - *Équations de la forme:* $r=f(s, t)$.

Pour ces équations, si l'on désigne par m_1 et m_2 les racines de l'équation

$$m^2+m\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

il existe pour chaque système de caractéristiques une combinaison intégrable:

$$ds+m_2dt=M_2d\beta, \qquad ds+m_1dt=M_1d\alpha$$

les fonctions $\alpha(s, t)$, $\beta(s,t)$ s'obtiennent donc par l'intégration d'une équation du premier ordre. On peut ensuite exprimer s et t puis m_1 et m_2 au moyen de α et β.

Le système *normal* (Ω) s'écrit:

$$dz-pdx-qdy=0$$

$$dp-fdx-sdy=0 \qquad dq-sdx-tdy=0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha}-m_1\frac{\partial x}{\partial \alpha}=0 \qquad \frac{\partial y}{\partial \beta}-m_2\frac{\partial x}{\partial \beta}=0$$

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha}+m_2\frac{\partial t}{\partial \alpha}=0 \qquad \frac{\partial s}{\partial \beta}+m_1\frac{\partial t}{\partial \beta}=0$$

---

[1] Voir nos communications aux Congrès de Strasbourg (1920) et de Toronto (1924) dans les Comptes rendus correspondants.

et les équations (X) et (T) sont des équations de LAPLACE, lorsqu'on y regarde m_1 et m_2 comme définis en α, β.

L'inconnue x est donnée par

$$(X) \qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\left(m_1\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(m_2\frac{\partial x}{\partial\beta}\right),$$

y, p, q, z s'obtiennent ensuite par des quadratures.

Mais il est possible de transformer (Ω) de manière plus symétrique. Si l'on pose:

$$P=rx+sy-p \qquad Q=sx+ty-q$$
$$Z=z-(px+qy)+\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)$$

ce qui donne $2dZ=xdP+ydQ$, on trouve que Z satisfait à l'équation:

$$F(Z)=\frac{\dfrac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\partial\beta}}{2\sqrt{\dfrac{\partial Z}{\partial\alpha}\dfrac{\partial Z}{\partial\beta}}}=F(t)=\lambda(\alpha,\beta).$$

La fonction r définie par $r=f(s,t)$ est une autre solution connue, de la même équation: $F(r)=F(t)$.

Ce type d'équations a été rencontré et étudié par M. GOURSAT [1]. Il se ramène à un système linéaire (Δ)

$$(\Delta) \qquad \frac{\partial u}{\partial\beta}=\lambda v, \qquad \frac{\partial v}{\partial\alpha}=\lambda u$$

en posant $\frac{\partial Z}{\partial\alpha}=u^2$, $\frac{\partial Z}{\partial\beta}=v^2$.

L'équation de LAPLACE à laquelle satisfait u est telle que v est une solution de son adjointe.

Il en résulte que si la suite de LAPLACE se termine d'un côté, elle se termine aussi de l'autre. M. GOURSAT a même montré qu'une certaine transformation joue le rôle de la transformation de MOUTARD pour les équations à invariants égaux et permet de construire par quadratures, de proche en proche, les équations correspondant à (Δ) qui possèdent une intégrale générale explicite.

Nous avons pu réduire cette transformation à une forme très simple: Si z est la solution générale de l'équation

$$F(z)=F(z'),$$

la solution générale z_1 de l'équation $F(z_1)=F\left(\frac{1}{z'}\right)$ est: $z_1=z-\frac{\sigma^2}{z'}$ où σ est donné par

$$d\sigma=\sqrt{\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z'}{\partial\alpha}}\,d\alpha+\sqrt{\frac{\partial z}{\partial\beta}\frac{\partial z'}{\partial\beta}}\,d\beta.$$

En résumé notre solution des équations $r=f(s,t)$ est la suivante: après avoir calculé $F(t)=\lambda(\alpha,\beta)$ en déterminant α et β en s et t, puis faisant l'inversion

---

[1] *Bulletin de la Soc. Math. de France*, 25, 1897, p. 36; 28, 1900, p. 1.

de ces fonctions ce qui donne s, t et ensuite r en α, β, la connaissance de la solution *générale* (u, v) du système (Δ) donne les éléments x, y, p, q et z par les formules (F)

$$dr=u_2^2 d\alpha+v_2^2 d\beta, \qquad ds=u_1u_2 d\alpha+v_1v_2 d\beta, \qquad dt=u_1^2 d\alpha+v_1^2 d\beta$$
$$u_1 y+u_2 x=u, \qquad v_1 y+v_2 x=v$$
$$dP=uu_2 d\alpha+vv_2 d\beta, \qquad dQ=uu_1 d\alpha+vv_1 d\beta$$
$$2dZ=u^2 d\alpha+v^2 d\beta$$

dans lesquelles $(u_1, v_1; u_2, v_2)$ sont un couple de solutions de (Δ) connu avec r et t.

On voit *qu'inversement* si l'on part d'une fonction quelconque $\lambda(\alpha, \beta)$, la connaissance d'un couple de solutions $(u_1, v_1; u_2, v_2)$ du système (Δ) donne par *quadratures* r, s et t, et par suite *une relation*: $r=f(s, t)$; la solution générale de cette dernière équation est donnée par la solution générale (u, v) de (Δ).

Si donc λ est donné, $f(s, t)$ dépend de quatre fonctions arbitraires deux de l'argument α, deux de l'argument β.

Les équations $F(r, s, t)=0$ homogènes en r, s, t ont été traitées à part [1]. Ecrites sous la forme $\frac{r}{s}=f\left(\frac{s}{t}\right)$ elles se ramènent par l'introduction des caractéristiques d'Ampère à l'équation linéaire harmonique particulière

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\partial\beta}=\varphi(\alpha+\beta)\theta.$$

2. - *Extension de ces résultats à un type plus général d'équations.*

Si l'on considère les formules (F) où interviennent seulement trois solutions $(u, v; u_1, v_1; u_2, v_2)$ d'un système (Δ), on peut se demander à quelle condition elles sont valables pour les éléments d'une solution d'une équation du second ordre. On trouve immédiatement qu'il faut et suffit pour cela que l'on ait *identiquement*, pour l'équation: $r=f(x, y, z, p, q, s, t)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial p}f+\frac{\partial f}{\partial q}s=0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial p}s+\frac{\partial f}{\partial q}t=0.$$

L'équation du second ordre est alors une *relation quelconque entre les six éléments* r, s, t, P, Q, Z définis plus haut. Dans ce cas général l'intégration de l'équation correspondante (E) peut-être remplacée par celle d'un système (Θ) où les inconnues sont la fonction $\lambda(\alpha, \beta)$ et trois solutions $(u, v; u_1, v_1; u_2, v_2)$ du système (Δ), Les variables α et β ne sont pas des fonctions déterminées des éléments x, y, z, p, q, s, t sauf dans des cas exceptionnels.

Il y a des cas particuliers étendus où l'on peut aller beaucoup plus loin. Par exemple si l'on considère une équation

$$Z=\Phi(Q, t)$$

---

[1] *Bulletin de la Soc. Math. de France*, 53, 1925, p. 1.

où Φ est arbitraire, on peut déduire du système normal (Ω) les équations

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha}-\mu_1\frac{\partial t}{\partial \alpha}=0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial \beta}-\mu_2\frac{\partial t}{\partial \beta}=0$$

où $\mu_1=y-m_1x$, $\mu_2=y-m_2x$ se trouvent ne dépendre que de Q et t; ce sont les racines de l'équation

$$\frac{1}{2}\mu^2-\mu\frac{\partial \Phi}{\partial Q}-\frac{\partial \Phi}{\partial t}=0.$$

On conclut de là que α et β sont des fonctions déterminées de Q et t données par les équations:

$$dQ+\mu_2 dt=M_2 d\alpha, \qquad dQ+\mu_1 dt=M_1 d\beta.$$

Les valeurs de t et Q en α, β se déduisent de là et par suite les solutions $(u, v;\ u_1, v_1)$ du système (Δ). Si u_2, v_2 désigne alors la solution *générale* de ce système, on en déduit toutes les inconnues par quadrature. Ici encore on peut se donner arbitrairement $\lambda(\alpha, \beta)$, deux solutions de (Δ) donnent Q, t et Z en α, β; on en déduit l'équation $Z=\Phi(Q, t)$ et la solution générale de (Δ) donne celle de cette dernière équation. Un même système (Δ) que l'on sait intégrer explicitement conduit donc *à la fois* à des équations de la forme $r=f(s, t)$ et à des équations $Z=\Phi(Q, t)$ que l'on intègre par quadratures. On observera encore que la forme: $r=f(s, t)$ peut être regardée comme une *réduite*, dégénérée de l'équation (E), et qu'à ce titre son intégration par le système (Δ) donne une idée de la variété des circonstances qui peuvent se prèsenter pour la réduction de (E).

§. - L'intégration des équations $Z=\Phi(P, Q)$ où Φ est arbitraire, est plus simple encore. On peut prendre ici $y=\beta x$ et $Z=\alpha$. L'on trouve ensuite

$$P=f(\alpha), \qquad Q=g(\alpha)$$

les arbitraires f, g étant liées par la relation $\alpha=\Phi(f, g)$, puis $x=\frac{2}{f'(\alpha)+\beta g'(\alpha)}$ et enfin les dérivées s et t qui renferment la deuxième fonction arbitraire $B(\beta)$

$$s=\frac{1}{2}\int f'g'd\alpha+B-\beta B', \qquad t=\frac{1}{2}\int g'^2 d\alpha+B'.$$

Lorsque la relation entre Z, P, Q, r, s, t est *linéaire à coefficients constants*, m_1 et m_2 sont des fonctions de x, y seuls; α et β sont donc *a priori* des fonctions déterminées de x, y seuls. Mais il convient d'observer d'abord que l'équation étant linéaire en r, s, t, il existe des caractéristiques du *premier ordre.*

Soit $Z=aP+bQ+Ar+Bs+Ct$ l'équation; le système *normal* correspondant comprend, par exemple, les équations:

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha}-m_1\frac{\partial x}{\partial \alpha}=0, \qquad \frac{\partial p}{\partial \alpha}+m_2\frac{\partial q}{\partial \alpha}+M\frac{\partial x}{\partial \alpha}=0$$

où

$$M=\frac{z-(x-a)p-(y-b)q}{\frac{1}{2}x^2-ax-A}$$

et les relations qui s'en déduisent par changement de α en β et de m_1 en m_2.

On observera que m_1 et m_2 sont solutions d'une équation de la forme

$$y-mx=\varphi(m)$$

qui donne

$$dy-mdx=[x+\varphi'(m)]dm\,;$$

l'intégrale de l'équation différentielle $dy=mdx$ est donc $m=\text{const.}$ Ainsi l'on peut prendre $m_1=\alpha$, $m_2=\beta$. Nous dirons simplement que la détermination de p, q et z se ramène à l'intégration d'une équation de LAPLACE de forme très simple et à des quadratures.

Le cas où la seule condition $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0$ est satisfaite est également à signaler.

3. - *Équations linéaires* en r, s, t et $rt-s^2$, ou de *Monge-Ampère.*

Pour les équations dites de Monge-Ampère, linéaires en r, s, t et $rt-s^2$, il existe des caractéristiques du premier ordre.

Le système *normal* correspondant peut s'écrire

$$dz-pdx-qdy=0$$

$$(\Omega)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial\alpha}&=A\frac{\partial x}{\partial\alpha}+B\frac{\partial y}{\partial\alpha} & \frac{\partial p}{\partial\beta}&=A\frac{\partial x}{\partial\beta}+C\frac{\partial y}{\partial\beta}\\ \frac{\partial q}{\partial\alpha}&=C\frac{\partial y}{\partial\alpha}+D\frac{\partial x}{\partial\alpha} & \frac{\partial q}{\partial\beta}&=B\frac{\partial x}{\partial\beta}+D\frac{\partial y}{\partial\beta}\end{aligned}$$

sans les conditions d'intégrabilité de p et q qui définissent $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\beta}$ à l'aide de x, y, z, p, q et des dérivées premières de x et y.

L'équation (E) est: $(r-A)(t-D)-(s-B)(s-C)=0$. Elle dépend de quatre fonctions arbitraires de cinq arguments. Une transformation de contact permet de prendre pour forme *réduite*, une équation où $A=0$, par exemple. C'est sur cette réduite qu'il y a lieu de rechercher les conditions d'existence des *invariants* pour chaque système de caractéristiques.

Nous remarquerons que même dans les cas où A, B, C, D sont indépendants de z, c'est-à-dire où la première équation du système est la seule à contenir dz, il est indispensable de la considérer lorsqu'on veut déterminer α ou β. Il peut se faire que l'une de ces variables puisse s'exprimer en x, y, z, p, q alors qu'elle ne s'exprime pas en x, y, p, q. C'est ce qui arrive, par exemple, pour l'équatiou

$$r(t-x)-s(s-q)=0$$

que l'on ramène au système

$$p=\beta,\qquad q\frac{\partial y}{\partial\beta}=1,\qquad x=q\frac{\partial q}{\partial\beta}$$

et à l'équation du second ordre

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\beta}=\left(\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}-\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)$$

mais à condition d'utiliser l'intégrale

$$z=\beta q\frac{\partial q}{\partial\beta}-\frac{1}{2}q^2+\beta+\alpha$$

qui contient seule a explicitement; sans quoi on n'a pour y qu'une équation du troisième ordre.

§. - Une équation intéressante de la forme de Monge-Ampère est celle (E) donnée par BOUR, pour la détermination de la coordonnée cartésienne z des surfaces d'élément linéaire: $ds^2=4\lambda^2 dxdy$

$$(E) \qquad \left(r-2p\frac{\partial \log\lambda}{\partial x}\right)\left(t-2q\frac{\partial \log\lambda}{\partial y}\right)-s^2+4pq\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial x\partial y}=0.$$

Si l'on transforme le systéme *normal* (Ω) en posant:

$$p=u^2, \qquad q=v^2$$

on obtient pour u et v un système *linéaire* dont la condition d'intégrabilité donne deux équations, dont l'une est:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\beta}+\left(\frac{\omega_{xy^2}}{2\omega_{xy}}+\omega_y\right)\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}+\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_{x^2y}}{2\omega_{xy}}-\omega_x\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}+\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)=0$$

l'autre s'en déduisant par permutation de x et y.

[On a désigné ici par ω_x, ω_y,.... les dérivées $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}$,.... et $\omega=\log\lambda$].

Ces deux équations sont précisément celles de DARBOUX pour les asymptotiques *virtuelles* (α, β) d'une surface ayant l'élément linéaire donné — que les géomètres ont obtenu par d'ingénieux calculs.

On sait que dans le cas des surfaces à courbure constante l'on peut prendre $\lambda=\frac{1}{x-y}$ et que le système (Ω) admet deux intégrales premières

$$\lambda^2\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\alpha}=1, \qquad \lambda^2\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial y}{\partial\beta}=1$$

d'où il résulte que la *déformation* et *l'habillage* de ces surfaces sont des problèmes équivalents (1). Nous nous bornons à chercher les cas où l'on peut déduire de ces équations de DARBOUX, une équation du second ordre isolée pour une combinaison $\sigma(x, y)$ des coordonnées. L'équation exprimée en coordonnées (α, β) est nécessairement de la forme

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial\alpha\partial\beta}=A\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}\frac{\partial\sigma}{\partial\beta}$$

et comme $A(x, y)$ ne doit dépendre que de σ, on peut supposer $A=0$. Ainsí on a simplement $\sigma=\alpha+\beta$ ou exceptionnellement $\sigma=\alpha$.

Le premier cas donne les ds^2 de révolution; le second donne les ds^2 des surfaces réglées.

§. - Les équations de la forme

$$(E) \qquad rt-s^2+\lambda^2=0$$

---

(1) J'ai déterminé ailleurs, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, 179, 1924, p. 1022, tous les cas où il en est ainsi: L'élément linéaire appartient toujours à une quadrique.

où λ est une fonction de x, y, z, p, q ont pour caractéristiques (α, β) les lignes asymptotiques des surfaces intégrales.

Supposons d'abord que λ soit fonction de x, y seuls. Le système normal (Ω) est ici : $dz-pdx-qdy=0$

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha}-\lambda\frac{\partial y}{\partial \alpha}=0 \qquad \frac{\partial p}{\partial \beta}+\lambda\frac{\partial y}{\partial \beta}=0$$

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha}+\lambda\frac{\partial x}{\partial \alpha}=0 \qquad \frac{\partial q}{\partial \beta}-\lambda\frac{\partial x}{\partial \beta}=0$$

avec les conditions d'intégrabilité :

$$(Y) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\beta}+\omega_y\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}+\frac{1}{2}\omega_x\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}+\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)=0 \qquad \text{où } \omega=\log\lambda$$

et l'équation analogue (X) obtenue par permutation de x et y.

On peut déterminer tous les cas où ces équations (X) et (Y) admettent des intégrales premières, linéaires en $\frac{\partial x}{\partial\alpha}, \frac{\partial t}{\partial\alpha}$ par exemple. Deux cas seulement sont à considérer :

1) λ est une fonction de $(x+y)$;

2) λ est une fonction homogène de x et y, de degré -2. Dans ces deux cas l'équation (E) est en *dernière analyse* ramenée à une équation harmonique particulière :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\partial\beta}=F(\alpha+\beta)\theta.$$

Mais on peut indiquer ici une autre transformation des équations (X), (Y). Si l'on y regarde λ comme exprimé au moyen de α et β, ces équations peuvent être ramenées à la forme de LAPLACE et l'on reconnait immédiatement que

$$\xi=x\sqrt{\lambda}, \quad \eta=y\sqrt{\lambda} \text{ et } \zeta=\sqrt{\lambda}$$

sont trois solutions d'une équation de MOUTARD : $\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\partial\beta}=M\theta$ liées par une relation *qui ne dépend que de* $\lambda(x, y)$.

Cette relation : $\zeta^2=\lambda\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}\right)$ dépend *en général* des trois arguments ξ, η, ζ. Lorsque λ est homogène de degré -2 (cas signalé plus haut), ζ disparaît.

On peut donc transformer le système (X), (Y) en regardant M comme la nouvelle inconnue. C'est ainsi que l'équation des surfaces à courbure totale constante, après une transformation de LEGENDRE, conduit à la relation $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ et à l'équation

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\beta}=\sin\omega \text{ avec } M=\cos\omega.$$

On observera qu'il est possible, pour réduire $\lambda(x, y)$ de faire subir à ξ, η, ζ une transformation linéaire et homogène à coefficients constants.

La relation $\xi\eta\zeta=1$ a été rencontrée par M. G. TZITZÉICA dans la recherche de certaines surfaces *particulières* (T) pour lesquelles la courbure totale est proportionnelle à la quatrième puissance de la distance de l'origine au plan tangent. Le problème général exigerait l'intégration de l'équation :

$$rt-s^2+(xy)^{-\frac{4}{3}}=0.$$

La recherche des surfaces *générales* (T) conduit à une équation que la transformation de LEGENDRE remplace par:

$$rt-s^2+k^2z^{-4}=0$$

où k est une constante. L'application de la méthode générale montre ensuite que p, q sont deux solutions d'un système:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\alpha\partial\beta}=Mp, \qquad M\frac{\partial^2 p}{\partial\alpha^2}=\frac{\partial M}{\partial\alpha}\frac{\partial p}{\partial\alpha}+\frac{\partial p}{\partial\beta}, \qquad M\frac{\partial^2 p}{\partial\beta^2}=\frac{\partial M}{\partial\beta}\frac{\partial p}{\partial\beta}+\frac{\partial p}{\partial\alpha}$$

où M est une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 \log M}{\partial\alpha\partial\beta}=M-\frac{1}{M};$$

c'est le résultat obtenu par M. G. TZITZÉICA (1).

Si l'on considère de même les équations

$$rt-s^2+\lambda^2(x,y,p,q)=0$$

et si l'on pose

$$\xi=x\sqrt{\lambda}, \quad \eta=y\sqrt{\lambda}, \quad \zeta=\sqrt{\lambda}, \quad \xi_1=\frac{p}{\sqrt{\lambda}}, \quad \eta_1=\frac{q}{\sqrt{\lambda}}, \quad \zeta_1=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

ξ, η, ζ sont encore solutions d'une équation de MOUTARD, ξ_1, η_1, ζ_1, étant les solutions de la transformée de MOUTARD qui passe de ζ à $\zeta_1=\frac{1}{\zeta}$: il existe alors entre les cinq éléments ξ, η, ζ, ξ_1, η_1 une relation qui ne dépend que de $\lambda(x,y,p,q)$; c'est la relation

$$\zeta^2=\lambda\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}, \xi, \zeta, \eta, \zeta\right)$$

qui renferme en général ζ. On peut donc encore transformer le système normal (Ω) en prenant comme nouvelle inconnue $M(\alpha, \beta)$.

4. - *Équations linéaires en r, s, t.*

Soit une équation linéaire et homogène en r, s, t que nous écrivons

$$(E) \qquad r+(\lambda_1+\lambda_2)s+\lambda_1\lambda_2 t=0$$

et où nous supposons que λ_1, λ_2 *dépendent seulement de p, q.* (Une transformation de LEGENDRE les ferait dépendre de x, y). Le système (Ω) est:

$$dz-pdx-qdy=0$$
$$\frac{\partial y}{\partial\alpha}-\lambda_1\frac{\partial x}{\partial\alpha}=0 \qquad \frac{\partial y}{\partial\beta}-\lambda_2\frac{\partial x}{\partial\beta}=0$$
$$\frac{\partial p}{\partial\alpha}+\lambda_2\frac{\partial q}{\partial\alpha}=0 \qquad \frac{\partial p}{\partial\beta}+\lambda_1\frac{\partial q}{\partial\beta}=0$$

avec la condition d'intégrabilité de y qui est une équation donnant $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}$. On

(1) G. TZITZÉICA, *Géométric différentielle des réseaux*, Bucarest, 1923, p. 235.

observe ici que α, β s'obtiennent en p, q par l'intégration d'équations du premier ordre; donc p, q sont connus en α, β et l'on peut poser

$$\lambda_1=\mu(\alpha,\beta), \qquad \lambda_2=\nu(\alpha,\beta).$$

Les éléments x, y sont alors donnés par le système

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha}=\mu\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \beta}=\nu\frac{\partial x}{\partial \beta}$$

c'est-à-dire par une équation de LAPLACE et une quadrature. Les équations de LAPLACE pour x et pour y ont mêmes invariants.

Mais l'équation de LAPLACE qui donne x, par exemple,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}+A\frac{\partial x}{\partial\alpha}+B\frac{\partial x}{\partial\beta}=0 \text{ avec } A=\frac{\frac{\partial\mu}{\partial\beta}}{\mu-\nu}, \quad B=\frac{\frac{\partial\nu}{\partial\alpha}}{\mu-\nu}$$

étant donnée *à priori*, son intégration conduit à celle d'un grand nombre d'équations linéaires (E).

Les fonctions A, B étant données, μ, ν dépendent d'une équation de LAPLACE et renferment deux fonctions arbitraires des arguments α seul et β seul. La détermination de p et q par les relations

$$\frac{\partial p}{\partial\alpha}+\nu\frac{\partial q}{\partial\alpha}=0, \qquad \frac{\partial p}{\partial\beta}+\mu\frac{\partial q}{\partial\beta}=0$$

introduit encore deux fonctions arbitraires nouvelles; il en résulte que les expressions de λ_1 et λ_2 en p, q dépendent de *quatre* fonctions arbitraires, et *toutes les équations* (E) *correspondantes s'intégrent en même temps.* On peut aisément en construire en partant des équations de LAPLACE dont la *suite* est limitée.

§. - L'exemple le plus élégant est donné par les équations

$$(E) \qquad Ar+Bt-2s=0$$

A, B fonctions de x, y où l'on peut poser, z_1 désignant une inconnue auxiliaire dont les dérivées secondes sont r_1, s_1, t_1

$$A=\frac{s_1}{t_1}, \qquad B=\frac{r_1}{s_1},$$

ce qui exige simplement que

$$d\log s_1=\left(\frac{A\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial x}}{1-AB}\right)dy+\left(\frac{B\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}}{1-AB}\right)dx$$

soit différentielle exacte et donne ensuite z_1 par des quadratures.

On sait que ces équations: $rt_1+tr_1-2ss_1=0$, qui régissent la déformation infinitésimale de la surface $z_1=z_1(x,y)$ s'intégrent par les formules de LELIEUVRE, où figurent trois solutions particulières d'une équation de MOUTARD $\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\partial\beta}=M\theta$ et la solution générale de cette équation. Si l'on part de l'équation de MOUTARD,

l'équation (E) dépendra ici des trois solutions qui donnent x, y, z_1, c'est-à-dire de trois fonctions arbitraires de α et de trois fonctions arbitraires de β.

§. - Nous signalerons enfin le cas des équations

$$(E) \qquad r=\lambda^2(x,y)t$$

qui se ramènent à l'équation à invariants égaux

$$(\Sigma) \qquad \sqrt{\mu}\,\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\partial\beta}=Z\frac{\partial^2\sqrt{\mu}}{\partial\alpha\partial\beta} \qquad \text{où } \lambda(x,y)=\mu(\alpha,\beta)$$

α, β étant donnés en x, y par des équations du premier ordre.

Si l'on part d'une équation (Σ), on a avec *deux* solutions θ et $\sqrt{\mu}$ de cette équation:

$$x=\frac{\theta}{\sqrt{\mu}}, \qquad dy=\mu\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}d\alpha-\frac{\partial x}{\partial\beta}d\beta\right)$$

ce qui permet d'exprimer α et β en x et y et donne ensuite:

$$\mu(\alpha,\beta)=\lambda(x,y)$$

c'est-à-dire une équation (E) dépendant de deux fonctions arbitraires de α et de deux fonctions arbitraires de β que l'on intègre en même temps que (Σ).

5. - *Équations de la forme:* $s=f(x,y,z,p,q)$.

Le système normal peut s'écrire sous une forme où les dérivées paramétriques sont celles de p et x en α et celles de t et y en β — ou sous une forme symétrique — p, q, t sont comme x, y, z des invariants pour le changement de α, β en $f(\alpha)$, $g(\beta)$. Les invariants des caractéristiques où β varie se forment alors avec les dérivées de p et de x en α seul comme dans le cas général. On en tire une *forme réduite* en faisant $\alpha=x$.

Les formes réduites des invariants *relatifs* (relations *invariantes* ou en *involution* avec l'équation $s=f$) s'écrivent

$$p_n+\varphi(x,y,z,p,p_2,\ldots,p_{n-1})=0$$

avec $p_i=\frac{\partial^i z}{\partial x_i}$, où φ est un *polynome* en $p_2,\ldots,p_{n-1}$ dont tous les termes sont de même *poids* $(n-1)$ quand on attribue à p_k le poids $(k-1)$.

La nature des coefficients de φ dans le *domaine* défini par f et ses dérivées est déterminée par l'application de la théorie générale d'*intégration logique* des équations linéaires aux dérivées partielles et des systèmes complets de ces équations (1). L'involution d'ordre minimum est particulièrement simple.

---

(1) Cf. *Proceedings* du Congrès de Cambridge, 1912; I, p. 438-497.

F. TRICOMI (Torino - Italia)

SULL'EQUAZIONE $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

Mi permetto di richiamare l'attenzione dei Colleghi qui convenuti su alcune proprietà, che mi sembrano notevoli, di un'equazione alle derivate parziali di cui mi sono a più riprese occupato in questi ultimi tempi, e cioè dell'equazione

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \tag{E}$$

che è di tipo ellittico nel semipiano $y>0$ e di tipo iperbolico invece nel semipiano $y<0$.

Un primo gruppo di tali proprietà si riferisce all'analisi delle eventuali *singolarità* « *isolate* » delle soluzioni della (E), nell'indirizzo delle ben note ricerche di Bôcher, Picard, Lebesgue ed altri sulle singolarità isolate delle funzioni armoniche. Naturalmente si tratterà di singolarità aventi sede in punti dell'asse x (retta attraverso la quale l'equazione cambia tipo), chè quelle aventi sede in punti del semipiano ellittico non differiscono qualitativamente dalle singolarità isolate delle funzioni armoniche, e, quanto ai punti del semipiano iperbolico, essi non possono ovviamente formare oggetto di uno studio di questo genere, dato che, in generale, le soluzioni della (E) non sono analitiche nel loro intorno. Inoltre bisogna osservare che si tratta di singolarità « *isolate* » solo per così dire, in quanto noi riterremo che un punto 0 dell'asse x è sede di una singolarità siffatta, se esiste una regione del contiguo semipiano ellittico, in parte limitata da un segmento dell'asse x comprendente il punto 0 nel suo interno, tale che in essa, il punto 0 escluso, la soluzione z che si considera sia *regolare*, cioè continua assieme con le sue derivate prime; ma non ci preoccuperemo in alcun modo di quel che succede di z dall'altra parte dell'asse x, anche nelle immediate vicinanze del punto 0.

Ciò premesso, possiamo asserire che, per le singolarità della specie indicata, vale un teorema analogo a quello di Picard per le funzioni armoniche, e cioè che:

Una soluzione dell'equazione (E) *non può mantenersi limitata nell'intorno di un suo* **effettivo** *punto di singolarità isolato* (*sull'asse* x).

In altre parole si ha che, se la soluzione si mantiene limitata, essa è necessariamente regolare anche nel punto di cui si tratta.

Un secondo teorema, analogo a quello di Bôcher per le funzioni armoniche, riguarda invece il caso in cui la soluzione z che si considera, *diverga* avvicinandosi ad un certo punto 0 dell'asse x, e asserisce che, in tale ipotesi, *la soluzione è suscettibile della decomposizione seguente*:

$$z = z_0 + a\varrho^{-\frac{1}{3}},$$

dove z_0 *denota un'altra soluzione della* (E) *regolare anche in* 0, a *una costante e* ϱ *è data dalla formula*

$$\varrho = +\sqrt{(x-\xi)^2 + \tfrac{4}{9}y^3}$$

dove ξ *è l'ascissa di* 0. Ciò però nell'ipotesi che, posto

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y=0} = \nu(x),$$

la funzione $\nu(x)$ risulti *integrabile* anche nell'intorno del punto 0.

Passando ora ad una questione di tutt'altro genere, comincerò col ricordare come uno dei più classici risultati della teoria delle equazioni alle derivate parziali del 2° ordine, dal punto di vista reale, è che, per le equazioni di *tipo iperbolico*, il *problema di Cauchy* è, in generale, *ben posto*. Esiste cioè, supponendo per semplicità che l'equazione sia lineare e in due variabili indipendenti, una ed una sola soluzione assumente, assieme con la sua derivata normale, valori arbitrariamente prestabiliti su di una data curva, soddisfacente ad opportune condizioni. Nel campo invece delle equazioni di tipo ellittico, nulla o quasi nulla di simile si conosce, anzi mi è capitato più di una volta di sentire esprimere l'opinione, che non condivido, che, per queste equazioni, il problema di Cauchy è generalmente impossibile (nel campo reale). Comunque, così stando le cose, mi sembra di non discutibile interesse l'aver potuto dimostrare che, *se si danno i valori di una soluzione* z *della* (E) *su di un qualsiasi segnento* AB *dell'asse* x, *e nel contempo anche quelli della sua derivata normale* $(\partial z/\partial y)_{y=0} = \nu(x)$, *sotto una certa condizione necessaria e sufficiente che ora si vedrà, esiste una regione ben delimitata del contiguo semipiano ellittico, in cui la soluzione in discorso è determinata ed in modo unico*. Precisamente, supposto per semplicità che le ascisse dei due punti A e B siano rispettivamente -1 e $+1$, si tratta della regione compresa fra il segmento AB dell'asse x e la parte giacente nel semipiano $y>0$ della curva algebrica del terzo ordine di equazione

$$x^2 + \tfrac{4}{9}y^3 = 1.$$

Quanto all'accennata condizione necessaria e sufficiente, essa è che, posto

$$z(x, 0) = \tau(x),$$

la funzione

$$\tau(x) + \gamma \int_{-1}^{1} |x-y|^{-\frac{1}{3}} \nu(y)\,dy \quad \left[\gamma = \frac{\sqrt[3]{9}}{4\pi^2}\,\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right) = 1{,}0130....\right]$$

risulti *analitica* nell'intervallo $(-1, 1)$.

Non è qui il caso di soffermarsi ad indicare il procedimento con cui si perviene a questo teorema, tanto più che esso, come pure i due precedenti sulle singolarità isolate, sono stati da me già pubblicati (con qualche piccola variante) in una Memoria comparsa nel volume di quest'anno (t. 52°) dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Piuttosto mi sia concesso di approfittare della circostanza per allargare ulteriormente un po' le condizioni di validità del *teorema di unicità* per l'equazione (E) da me dato nel 1923, su cui sono ritornato nella Memoria ora citata e in una Nota comparsa nel t. 6° della 6ª serie dei Rendiconti dei Lincei. Precisamente voglio far vedere come la condizione che la funzione $\nu(x)$ divenga, al più, infinita d'ordine *minore di* $^2/_3$ negli estremi dell'intervallo in cui è definita [che ora conviene supporre sia l'intervallo (0,1)], possa sostituirsi con l'altra, meno restrittiva, che essa divenga (al più) infinita d'ordine *minore di* 1 negli estremi in discorso. Resterà così eliminata un'obiezione che mi è stata mossa.

Riferendomi senz'altro alle notazioni usate nella mia Memoria del Circolo Matematico (del che chiedo venia), osservo che la condizione indicata serve per concludere che l'integrale

$$\int_{c_k'} zz'\,ds \tag{1}$$

tende a 0 per $k\to 0$, appoggiandosi sul fatto che l'altro integrale:

$$\int_h^{k_0}(x^{-\frac{1}{3}}-k_0^{-\frac{1}{3}})\tau(x)\nu(x)dx \tag{2}$$

tende ad un limite finito per $h\to 0$. Ora, se non si vuol più supporre che $\nu(x)$ diventi (al più) infinita d'ordine minore di $^2/_3$ per $x\to 0$, ma soltanto di ordine minore di 1, non si può più dire che l'integrale (2) tende necessariamente ad un limite finito per $h\to 0$. Si potrà però sempre asserire che, detto η un numero positivo arbitrariamente piccolo, si ha che

$$\lim_{h\to 0}\left[h^{\frac{1}{3}-\eta}\int_h^{k_0}(x^{-\frac{1}{3}}-k_0^{-\frac{1}{3}})\tau(x)\nu(x)dx\right]=0.$$

Ne segue che, per giungere alla conclusione che ci preme relativamente all'integrale (1) nelle nuove, più larghe ipotesi relative alla funzione $\nu(x)$; non c'è che da moltiplicare per $h^{\frac{1}{3}-\eta}$ ambo i membri dell'uguaglianza contradistinta con (9) nella mia Memoria e poi continuare il ragionamento tal quale come li è indicato, salvo qualche irrilevante cambiamento.

B. COLOMBO (Torino - Italia)

PROBLEMI PER LE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI DI TIPO IPERBOLICO

Per l'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, di tipo iperbolico, in due variabili indipendenti

(1) $$s=f(x, y, z, p, q)$$ [1],

le cui caratteristiche sono le rette parallele agli assi coordinati x e y, è ormai ben noto il *problema* detto comunemente *di Goursat*, per le sue celebri Memorie del 1903 e 1904 negli *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, sebbene sia stato studiato anche da molti altri insigni matematici e fornito anzi di ulteriori complementi. Esso consiste nel ricercare un integrale della (1) il quale assuma valori prefissati su due pezzi di linee distinti che si taglino in un punto (ed uno solo), ad es. nell'origine O, e tali che ciascuno da ogni caratteristica sia incontrato in non più di un punto a meno che coincida addirittura con un pezzo di caratteristica [2]. Escluso il caso eccezionale in cui le tangenti in O alle due linee coincidono o separano armonicamente gli assi, il problema di Goursat ammette una ed una sola soluzione in un intorno sufficientemente piccolo di O; soltanto se la (1) è lineare la soluzione esiste in tutto il campo, che si può supporre di forma quadrata, internamente a cui si considerano i due pezzi di linee coi dati iniziali.

Il problema di Goursat, tra i varii che furono posti per la (1), presenta il notevolissimo vantaggio che i dati iniziali riguardano soltanto i valori dell'integrale. Si presenta allora spontanea l'idea di generalizzarlo all'equazione di ordine qualunque n, sempre di tipo iperbolico, in due variabili indipendenti

$$(2)\quad \left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_n\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{n-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial z}{\partial y}\right)=$$
$$=f(x,\ y,\ z,\ p_{10},\ p_{01},\ p_{20},\ p_{11},\ p_{02},\ldots,\ p_{n-1\,0},\ p_{n-2\,1},\ldots,\ p_{0\,n-1})\ [3],$$

---

[1] Si usano le ordinarie notazioni

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},\ r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ed anche $p_{ik}=\dfrac{\partial^{i+k}z}{\partial x^i\partial y^k}$.

[2] Si sono pure considerati pezzi di linee soggetti a condizioni meno restrittive: cfr. in proposito due Memorie del prof. PICONE nei Rend. del Circolo Mat. di Palermo del 1910 e 1911.

[3] La (2) è di forma conosciuta: cfr. in proposito una Memoria del prof. FUBINI negli Atti dell'Acc. Gioenia di Catania del 1905.

le λ essendo *reali, distinte* e, per semplicità, *costanti*, sicchè le caratteristiche della (2) sono le rette di coefficienti angolari λ_1, λ_2,...., λ_n. Se si conviene di chiamare in *posizione regolare* un pezzo di linea che da ogni caratteristica sia incontrato in non più di un punto, il *problema di Goursat generalizzato* consiste evidentemente nel ricercare un integrale della (2) il quale assuma valori prefissati su n pezzi di linee distinti che si taglino ad es. in O, ossia contengano internamente il punto O, e tali che ciascuno abbia posizione regolare a meno che coincida addirittura con un pezzo di caratteristica.

Esporrò ora i più notevoli risultati delle mie ricerche sul precedente argomento (1).

Io ho considerata dapprima l'equazione del terzo ordine

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = f(x, y, z, p, q, r, s, t), \tag{3}$$

le cui caratteristiche sono le rette parallele agli assi ed alla retta $y=x$, ed ho trattato per essa in modo esauriente il problema di Goursat generalizzato, nel caso in cui due delle tre linee per O, alle quali appartengono i pezzi coi valori prefissati, sono caratteristiche, ad es. gli assi (supposizione non restrittiva, come si stabilisce con un opportuno cambiamento di variabili) e la terza L, di equazione $y=y(x)$, ha posizione regolare (2).

A tale scopo ho incominciato a supporre che il secondo membro della (3) si riduca a $F(x, y)$, ossia che la (3) stessa si riduca all'equazione

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = F(x, y), \tag{4}$$

il cui integrale generale è

$$z(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \varphi_3(x-y) + \Theta(x, y), \tag{5}$$

essendo φ_1, φ_2 e φ_3 simboli di funzioni arbitrarie e $\Theta(x, y)$ un integrale particolare nullo sui due assi, che si sa scrivere facilmente; inoltre ho incominciato a supporre tutti nulli i dati iniziali (senza menomare del resto la generalità,

---

(1) Cfr. anche una mia Nota pubblicata nei Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, vol. XXXIII, 2° sem. 1924. Ai risultati esposti in essa aggiungerò ora alcuni complementi ottenuti di recente.

(2) La mia trattazione vale, bene inteso, nel campo generale delle funzioni di variabili reali. Nello stesso ordine di idee, ma limitatamente al campo delle funzioni analitiche, il prof. d'Adhémar in una Memoria del 1909 nel Journal de Mathématiques, considerata l'equazione analoga alla (3)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y) \qquad (a = \text{costante}),$$

ne ha ricercato un integrale il quale assuma valori prefissati su tre rette passanti per O ed ha concluso che, oltre alle ovvie condizioni di compatibilità dei dati iniziali in O, il problema può comportare delle condizioni di possibilità (determinabili però soltanto con tentativi).

come si vede con un cambiamento opportuno di funzione incognita). L'eventuale integrale richiesto è pertanto

$$z(x, y) = \varphi(x) + \varphi(-y) - \varphi(x-y) + \Theta(x, y), \tag{6}$$

il simbolo φ soddisfacendo all'equazione funzionale

$$\varphi(x) + \varphi[-y(x)] - \varphi[x - y(x)] = \Phi(x) \tag{7}$$

ed essendo $\Phi(x) = -\Theta[x, y(x)]$ (1).

Il tipo della (6) mi ha indotto a considerare dei campi piani di forma esagonale, e precisamente degli *esagoni* non regolari, che ho chiamati *di parametro* τ, aventi come vertici i punti $(\tau, 0)$, (τ, τ), $(0, \tau)$, $(-\tau, 0)$, $(-\tau, -\tau)$, $(0, -\tau)$ e perciò come tre coppie di lati opposti caratteristiche dei tre diversi sistemi. I valori iniziali si suppongono assegnati proprio sui pezzi degli assi e della linea L che riescono interni ad un tale esagono E e la $F(x, y)$ si suppone definita in tutto E; in conseguenza la $\Phi(x)$ riesce definita nell'intervallo in cui varia x per fornire tutti i punti del pezzo considerato di L.

Applicando il celebre metodo delle successive approssimazioni di Picard, con calcoli alquanto laboriosi e con opportuni artificî, ho dimostrata l'esistenza della soluzione φ dell'equazione funzionale (7), ed anche l'unicità sotto la condizione

$$|\varphi(x)| < N|x|^2 \qquad (N \text{ costante positiva}),$$

che per il nostro problema non è restrittiva perchè non si traduce in una condizione per l'integrale richiesto.

Di poi ho considerata l'equazione più generale (3) e, con ulteriori calcoli, sono pervenuto al teorema che risolve per essa il problema di Goursat preso in esame e che, prescindendo dall'ipotesi dei dati iniziali nulli, si enuncia nel modo seguente:

Esiste ed è unico un integrale di (3) *il quale sui pezzi, interni ad un esagono* E *di parametro* τ, *dei due assi e di una linea per* O, *in posizione regolare, assume valori prefissati in modo compatibile in* O, *purchè la* f *sia definita, limitata e Lipschitziana rispetto alle variabili* z, p,...., t *quando il punto* x, y *appartiene ad* E *e le* z, p,...., t *verificano le disuguaglianze*

$$|z - z_0| < Z, \quad |p - p_0| < P, \ldots, \quad |t - t_0| < T,$$

essendo Z, P,...., T *delle costanti positive e* z_0, p_0,...., t_0 *l'elemento di secondo ordine determinato in* O *dai dati iniziali. L'integrale in questione riesce definito soltanto in un esagono di parametro* τ' *sufficientemente piccolo; se però la* (3) *è lineare, riesce definito proprio in tutto l'esagono* E *di parametro* τ.

Sempre per l'equazione (3) ho poi cercato di risolvere il problema di Goursat generalizzato, nel caso in cui le tre linee per O, alle quali appartengono i pezzi

(1) Dalla (7) si ricava subito $\varphi(0) = 0$.

coi valori prefissati, sono le tre caratteristiche (la linea L dianzi considerata si sostituisce insomma coll'ulteriore caratteristica $y=x$), e, mediante l'equazione funzionale cui si riduce la (7), ho concluso che il problema è impossibile e, se possibile, indeterminato (1). Il caso in esame è pertanto eccezionale. Il risultato mi è sembrato alquanto strano, dal momento che, per l'equazione del secondo ordine (1), il caso (presentatosi cronologicamente per primo) in cui i valori iniziali si assegnano su due caratteristiche, oltre a non essere eccezionale, è anzi il più semplice e facile a trattarsi. Sono stato allora indotto a studiare più in generale sulla (2) il problema che consiste nel prefissarne i valori dell'integrale su tutte le n caratteristiche passanti per O e che ho chiamato *problema di Goursat relativo alle caratteristiche*; invero ho pensato, per spiegare il risultato conseguito, che la risolubilità o meno del problema dipenda dalla parità o disparità dell'ordine dell'equazione. Tuttavia, essendo *a priori* sicuro che il problema non è sempre risolubile, ho introdotta l'ipotesi semplificatrice dell'analiticità di tutte le funzioni da considerarsi.

Al solito ho incominciato a supporre che il secondo membro della (2) si riduca a $F(x, y)$ e che i dati iniziali siano tutti nulli, ossia, ciò che equivale, come si stabilisce con un opportuno cambiamento di funzione incognita, ho incominciato a supporre che la (2) stessa si riduca a

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_n\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{n-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0, \tag{8}$$

rinunciando in conseguenza all'ipotesi dei dati iniziali nulli.

L'integrale generale della (8) è

$$z(x, y)=\varphi_1(y-\lambda_1 x)+\varphi_2(y-\lambda_2 x)+\ldots+\varphi_n(y-\lambda_n x), \tag{9}$$

le φ essendo simboli di funzioni arbitrarie; esso porta alla considerazione di campi poligonali, i cui contorni, costituiti di segmenti di caratteristiche, staccano dalle caratteristiche per O i pezzi sui quali debbono assegnarsi i valori dell'integrale.

Imponendo alla (9) di ridursi, per $y=\lambda_1 x$, $y=\lambda_2 x$,..., $y=\lambda_n x$, rispettivamente a funzioni prefissate $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$,..., $\Phi_n(x)$, ho ottenute le relazioni seguenti

$$\varphi_1[(\lambda_r-\lambda_1)x]+\varphi_2[(\lambda_r-\lambda_2)x]+\ldots+\varphi_n[(\lambda_r-\lambda_n)x]=\Phi_r(x) \quad (r=1, 2,\ldots, n); \tag{10}$$

ed essendo per ipotesi lecito sviluppare in serie di Mac Laurin le funzioni Φ e le eventuali funzioni φ col porre

$$\varphi_r(t)=\sum_{i=0}^{\infty} a_{ri}t^i, \qquad \Phi_r(t)=\sum_{i=0}^{\infty} A_{ri}t^i, \tag{11}$$

(1) Se il problema è possibile, per certi dati iniziali, si può in più modi renderlo determinato imponendo convenientemente ulteriori condizioni iniziali. Cfr. in proposito la mia Nota citata.

ho ottenuto, per ogni i, il seguente sistema di equazioni lineari

$$a_{1i}(\lambda_r-\lambda_1)^i+a_{2i}(\lambda_r-\lambda_2)^i+\ldots.+a_{ni}(\lambda_r-\lambda_n)^i=A_{ri}, \tag{12}$$

coll'avvertenza che i numeri $(\lambda_r-\lambda_r)^0$ devono ritenersi eguali ad 1.

Per il sistema (12) il determinante dei coefficienti, che risulta di ordine n, vale, con evidente scrittura concisa

$$\Delta_i=|(\lambda_r-\lambda_s)^i| \qquad (r, s=1, 2,\ldots., n), \tag{13}$$

ossia è formato colle potenze i^{me} delle differenze delle λ.

Pertanto la discussione del problema di Goursat in esame, nel senso di stabilire se è risolubile in modo unico senza condizioni di possibilità per i dati iniziali oppure, in caso negativo, di trovare le *condizioni di possibilità* valutando la conseguente indeterminazione dell'integrale richiesto, dipende dalla discussione di Δ_i, nel senso di giudicare, per ogni i, se non è nullo oppure nullo e, più in generale, di precisarne la caratteristica (e poi dalla eventuale convergenza delle serie di Mac Laurin ottenute per le φ).

Il determinante Δ_i, che credo sia stato da me incontrato per la prima volta, gode delle seguenti proprietà:

I. Δ_i è un polinomio di grado ni nelle λ, di cui è funzione simmetrica ed omogenea, e di grado $2i$ in ciascuna λ; Δ_i è una funzione trascendente intera di i, il quale per altro varia solo nel campo dei numeri interi positivi da 0 ad ∞.

II. Se i è pari, Δ_i è simmetrico; se i è dispari, Δ_i è emisimmetrico.

III. Se n è dispari, Δ_i si annulla per ogni i dispari; se n è pari, Δ_i, per ogni i dispari, è il quadrato di un polinomio nelle λ.

IV. Se Δ_i non si annulla per ogni i pari (dispari), si annulla soltanto per un numero finito di i pari (dispari).

V. Δ_i è divisibile per il prodotto dei quadrati delle differenze delle λ combinate due a due, ossia è divisibile per il quadrato del determinante di Vandermonde formato colle λ.

VI. Per $i=n-1$, Δ_i è sempre diverso da zero.

VII. Per $i<n-1$, Δ_i è identicamente nullo, qualunque siano le λ, e la sua caratteristica vale allora precisamente $i+1$.

VIII. Il $\lim_{i\to\infty} \Delta_i$ può essere eguale a zero per infiniti valori delle λ.

In grazia alla prima parte della III, si stabilisce subito il risultato previsto che:

Se n *è dispari, il problema di Goursat relativo alle caratteristiche, posto per la* (2) *(nel campo analitico), è in generale impossibile e, se possibile (i dati iniziali soddisfacendo ad opportune condizioni), è indeterminato.*

Dalla IV si trae che, se Δ_i non si annulla per ogni i pari nè per ogni i dispari, le condizioni di possibilità da imporsi alle A_{ri} sono in numero finito. Quelle ottenute, in conformità alla VII, per $i<n-1$ si riconosce che sono le

condizioni, evidenti *a priori*, di compatibilità in 0 dei dati iniziali (1); supposto che siano soddisfatte, si ha un'indeterminazione per le $a_{ri}(i<n-1)$, ma si può dimostrare che non si ha indeterminazione per l'integrale cercato. Infine per $i \to \infty$, sebbene per la VIII possa essere nullo il limite di Δ_i, non si ha alcuna condizione di possibilità nè alcuna indeterminazione, dal momento che tanto le A_{ri} quanto le a_{ri} tendono necessariamente a zero (per la convergenza delle serie di Mac Laurin).

Le proprietà esposte di Δ_i non permettono di esaurire in ogni caso la discussione impostata, che io credo molto difficile e per la quale i miei varii tentativi riuscirono finora vani. Mi spiace di non potere quindi comunicare in modo definitivo il risultato previsto che, per n pari ed $i \geqslant n-1$, è certo Δ_i diverso da zero, escluso eventualmente il suo limite per $i \to \infty$, e che in conseguenza, potendosi effettivamente dimostrare la convergenza delle serie ottenute per le φ:

Se n *è pari, il problema di Goursat relativo alle caratteristiche, posto per la* (2) (*nel campo analitico*), *è risolubile in uno ed un solo modo, purchè i dati iniziali siano compatibili in* 0.

Posso ad ogni modo assicurare la validità del risultato precedente per $n=4$ e per $n=6$, avendo in questi casi studiato esaurientemente il determinante Δ_i con metodi particolari che non sembrano atti ad estensione.

---

(1) Le condizioni di compatibilità in 0 dei dati iniziali sono le condizioni affinchè possa esistere una funzione di x e y che si riduca alle $\Phi_r(x)$ per $y=\lambda_r x$ $(r=1, 2, \ldots, n)$.

P. ZERVOS (Athenai - Grecia)

SUR UNE THÉORIE NOUVELLE DU PROBLÈME D'INTÉGRATION DES SYSTÈMES DE MONGE

1. - Dans une communication faite au Congrès de Rome (1) j'avais indiqué une certaine correspondance entre les équations aux dérivées partielles du premier ordre et les systèmes de Monge. J'avais alors utilisé une méthode de M. GOURSAT relative à l'intégration de systèmes de Monge. Soit un tel système

$$(A) \qquad f_i(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}, dy_1, dy_2, \ldots, dy_{n+1}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

D'après la méthode de M. GOURSAT on forme un système associé des équations aux dérivées partielles; si ce système est en involution l'intégration du système de Monge (A) est immédiate. J'ai alors remarqué qu'on peut faire correspondre à chaque système (A) un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Il s'agit ici d'indiquer directement d'autres correspondances plus générales amenant à une certaine dualité entre les équations aux dérivées partielles non linéaires et les systèmes de Monge.

Les théories générales de M. CARTAN sur les systèmes de Pfaff (2) peuvent être évidemment appliquées aux systèmes de Monge.

M. VESSIOT (3) aussi à donné une théorie des problèmes généraux d'intégration qui peut être appliquée à des systèmes de Monge.

2. - Soient une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(1) \qquad F(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

et ses équations caractéristiques

$$(2) \qquad \frac{dy_i}{P_i} = \frac{dy_{n+1}}{\sum P_i p_i} = \frac{-dp_i}{Y_i + p_i Y_{n+1}}$$

---

(1) *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici.* Roma (1909), p. 94.

(2) GOURSAT: *Leçons sur le problème de Pfaff.* Paris (1922).

(3) VESSIOT: *Sur une théorie nouvelle des problèmes généraux d'intégration.* (Bulletin de la Société Mathématique de France, 1924).

Posons

$$\frac{dy_k}{dy_1} = y_k'$$

et éliminons entre l'équation (1) et les n premières des équations (2) les quantités p_i ou, si l'on veut, supposons qu'on a résolu les n premières des équations (2) par rapport aux p_i; soit

$$p_i = \lambda_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, y_2', \ldots, y_{n+1}') \tag{3}$$

et qu'on introduit ces valeurs des p_i dans l'équation (1) on aura ainsi, comme on sait, l'équation de Monge

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, y_2', \ldots, y_{n+1}') = 0 \tag{4}$$

dont l'adjointe est l'équation donnée (1).

Supposons maintenant que d'une certaine façon on a obtenu une autre intégrale première des équations caractéristiques (2).

Soit

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a \tag{5}$$

cette intégrale première. Si je substitue ici les p par ses valeurs (3) en fonction des y' on prend une équation nouvelle de Monge

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, y_2', y_3', \ldots, y_{n+1}') = a. \tag{6}$$

Inversement, soit qu'on différentie les équations (3) et qu'on substitue les dp_i dans les n dernières équations des caracteristiques (2): on en déduit alors des équations de la forme

$$A_{\mu 2} dy_2' + \ldots + A_{\mu(n+1)} dy_{n+1}' + B_\mu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

où les A et B sont des fonctions des y_k et y_k'. Celles-ci sont des équations de Monge linéaires par rapport aux dérivées secondes y_2'', y_3'', ..., y_{n+1}''.

En y ajoutant les n premières des équations (2) aprés avoir substitué les p par ses valeurs on aura un système des $2n$ équations différentielles; soit qu'on a obtenu une combinaison intégrable de ces équations

$$d\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, y_2', y_3', \ldots, y_{n+1}') = 0.$$

Alors si dans l'équation $\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, y_2', \ldots, y_{n+1}') = a$ on substitue les y' par les p_i en vertu des formules (3) on prend une intégrale première des équations (2) outre que F.

Considérons par exemple dans le cas $n=2$ l'équation classique

$$pq = xy \tag{1'}$$

traitée par CAUCHY et posons $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{dz}{dx} = z'$. Les équations caractéristiques sont

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{y} = \frac{dq}{x}$$

d'où $\frac{p}{q}=y'$, $2p=z'$ ou $p=\frac{z'}{2}$, $q=\frac{z'}{2y'}$ prenons directement ces équations comme formules de transformations les équations (2) peuvent alors s'écrire

$$\frac{2y'dx}{z'}=\frac{2dy}{z'}=\frac{2y'dz}{z'^2}=\frac{dz'}{2y}=\frac{y'dz'-z'dy'}{2y'^2x}. \tag{2'}$$

J'en tire immediatement

$$z'dz'=4yy'dx \tag{3'}$$

or l'équation (1') donne $z'^2=4xyy'$ et l'équation (3') dévient $z'dz'=\frac{z'^2}{x}dx$, ou encore, $\frac{dz'}{z'}=\frac{dx}{x}$ d'où $z'=cx$ or $z'=p\cdot 2$ donc $2p=cx$; à savoir $p=c_1x$ qui peut s'écrire $p=\frac{P_0}{x_0}x$. De la même façon on peut aisement trouver d'autres intégrales.

D'après la manière précédente, la recherche des intégrales premières du système des équations caractéristiques se ramène à la recherche des combinaisons intégrables d'un système d'équations différentielles par raport à y et y' et réciproquement.

Je remarque maintenant que les premiers membres des relations (1, 5) vérifient la condition

$$[F, \Phi]=0 \tag{7}$$

et comme aux équations (1) et (5) correspondent les équations (4) et (6), on peut chercher une condition qui soit verifiée par les fonctions f et φ et correspondante à la condition (7), ou encore, on peut chercher la condition à laquelle doivent être soumises les fonctions f et φ pour que les fonctions F et Φ des équations adjointes remplissent la condition (7).

Pour déduire les équations adjointes des équations (4, 6) on élimine les quantités y_2', y_3',...., y_{n+1}', en supposant toujours qu'il s'agit d'avoir la condition (7):

1) entre les équations (4) (8) (9)

$$y_{n+1}'=p_1+\sum p_\varrho y_\varrho' \qquad (\varrho=2, 3,...., n) \tag{8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_\varrho'}+p_\varrho\frac{\partial f}{\partial y_{n+1}'}=0; \tag{9}$$

2) entre les équations (6) (8) (10)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_\varrho'}+p_\varrho\frac{\partial \varphi}{\partial y_{n+1}'}=0. \tag{10}$$

Des équations (1, 5, 8, 9, 10) on déduit

$$\frac{\partial F}{\partial p_\varrho}=y_\varrho'\frac{\partial f}{\partial y_{n+1}'}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial p_\varrho}=y_\varrho'\frac{\partial \varphi}{\partial y_{n+1}'} \tag{11}$$

et comme on a

$$\frac{\partial n}{\partial y_\lambda}=\frac{\partial H}{\partial y_\lambda}+\sum\frac{\partial H}{\partial p_\mu}\cdot\frac{\partial p_\mu}{\partial y_\lambda} \qquad \begin{matrix}(\lambda=1, 2,...., n+1)\\ (\mu=1, 2,...., n)\end{matrix}$$

où

$$1)\ n=f,\ H=F \quad \text{et} \quad 2)\ n=\varphi,\ H=\Phi$$

on tire aisément de la relation (7) une relation (7') où figurent seulement les y_ϱ' et les dérivées des f, φ par rapport aux y_ϱ' et y_λ et si nous exprimons

par $[f, \varphi]$ le résultat correspondant au $[F, \Phi]$ nous aurons par un calcul facile une expression pour $[f, \varphi]$ en fonction des y_ϱ' et des dérivées des f et φ par rapport aux y_λ et y_ϱ'.

3. - Considérons d'une manière générale un système de i équations de Monge $(i<n-1)$

(12) $$f_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, y_2', \ldots, y_{n+1}') = 0$$

et soit

$$F_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

les équations adjointes. D'après ce qui precéde, à chaque expression $[F_\varrho, F_\sigma]$ correspond une expression $[f_\varrho, f_\sigma]$ et si on a $[F_\varrho, F_\sigma]=0$ pour tout système des ϱ, σ $\begin{pmatrix}\varrho<n-1\\ \sigma<n-1\end{pmatrix}$ on aura aussi $[f_\varrho, f_\sigma]=0$ et réciproquement. J'appelle le système (12) *système en involution* de Monge si on a identiquement, ou en vertu des relations (12)

(12′) $$[f_\varrho, f_\sigma] = 0$$

pour tout système des ϱ, σ.

Il est aisé de distinguer l'importance de cette correspondance à cause de la dualité qui se présente ainsi entre les système d'équations aux dérivées partielles et les systèmes de Monge.

C. PAPAIOANNOU (Athenai - Grecia)

SULL'INTEGRAZIONE DI UNA CERTA EQUAZIONE DI MONGE CON QUATTRO VARIABILI

1. - Considero nello spazio delle n dimensioni l'equazione di Monge:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = 0$$

di cui la prima parte si può decomporre nel prodotto dei fattori del tipo $(x_k dx_1 - x_1 dx_k)$ cioè l'equazione:

$$\left[\begin{matrix}(x_k dx_1 - x_1 dx_k) \\ k = 2, 3, \ldots \eta\end{matrix}\right] = 0 \tag{1}$$

dove la prima parte rappresenta simbolicamente il prodotto:

$$(x_2 dx_1 - x_1 dx_2) \ldots (x_k dx_1 - x_1 dx_k) \ldots (x_\eta dx_1 - x_1 dx_\eta).$$

Considero ancora il sistema di Pfaff:

$$x_k dx_1 - x_1 dx_k = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, \eta) \tag{2}$$

e l'equazione

$$\sum_{i=1}^{i=\eta} p_i dx_i - dx_\eta = 0. \tag{3}$$

Eliminando fra le equazioni (2) e (3) i rapporti $\frac{dx_l}{dx_1}$ $(l = 2, 3, \ldots, \eta)$ si trova l'equazione

$$\sum_{l=1}^{l=\eta-1} p_l x_l - x_\eta = 0 \tag{4}$$

che è l'ausiliaria della (1).

È conosciuto che l'equazione (4) risulta anche per l'eleminazione dei rapporti $\frac{dx_l}{dx_1} = x_l'$ fra le equazioni

$$\left.\begin{aligned} & f = 0 && (5) \\ & \frac{\partial f}{\partial x_r'} + p_r \frac{\partial f}{\partial x_\eta'} = 0, \qquad (r = 2, \ldots, \eta - 1) && (6) \\ & x_\eta' = p_1 + \sum_{l=2}^{l=\eta-1} p_l x_l' && (7) \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

dove f rappresenta la prima parte dell'equazione (1).

Per quanto ciò appaia subito, può anche dedursi direttamente che i due sistemi (2, 3) e (A) sono equivalenti, come segue.

Le equazioni (6) si possono scrivere:

$$(8) \qquad -x_1\left[\begin{matrix}(x_m - x_1x_m')\\ m=2,\ldots.\ (r-1)(r+1),\ldots.\ \eta-1\end{matrix}\right](x_\eta - x_1x_\eta' + p_r(x_r - x_1x_r')) = 0,\ldots.$$

perchè possa verificarsi il sistema (8), bisogna che almeno per ciascuna equazione di esso uno dei fattori sia lo zero.

Supponiamo $x_1 \neq 0$, $p_r \neq 0$.

Dato che per una equazione, presa a caso, del sistema (8) sia il fattore

$$(9) \qquad x_l - x_1x_l' = 0.$$

Allora considero l'equazione del sistema

$$(10) \qquad -x_1\left[\begin{matrix}(x_m - x_1x_m')\\ m=2,\ldots.\ (l-1)(l+1),\ldots.\ \eta-1\end{matrix}\right](x_\eta - x_1x_\eta' + p_l(x_l - x_1x_l')) = 0,\ldots.$$

che, in virtù della (9) si può scrivere come segue:

$$(11) \qquad -x_1\left[\begin{matrix}(x_m - x_1x_m')\\ m=2,\ldots.\ l-1,\ l+1,\ldots.\ \eta\end{matrix}\right] = 0$$

ma per la (11) bisogna che uno dei fattori sia lo zero, ecc.

Ci resta da esaminare il caso in cui in una equazione del sistema (8) si abbia il fattore:

$$(12) \qquad x_\eta - x_1x_\eta' + p_r(x_r - x_1x_r') = 0.$$

Se tal fatto non si avvera anche per le altre equazioni, allora per una di esse deve applicarsi la (9). Se però anche per tutte le altre equazioni del sistema avviene ciò

$$(13) \qquad x_\eta - x_1x_\eta' + p_r(x_r - x_1x_r') = 0 \qquad (r=2,3,\ldots.,\eta-1)$$

allora si trova

$$(14) \qquad p_2(x_2 - x_1x_2') = p_3(x_3 - x_1x_3') = \ldots. = p_{\eta-1}(x_{\eta-1} - x_1x_{\eta-1}').$$

Ma in forza dell'equazione (1) bisogna che uno dei suoi fattori sia zero; e ammettendo che sia

$$x_\eta - x_1x_\eta' = 0$$

allora per la (13) è anche $x_r - x_1x_r' = 0$ (siccome $p_i \neq 0$) se però

$$x_k - x_1x_k' = 0$$

allora dalle (12) e (14) abbiamo

$$x_i - x_1x_i' = 0 \qquad (i=2,3,\ldots.,\eta) \text{ c. d. d.}$$

L'integrale completo della (4) si può rappresentare col tipo:

$$(15) \qquad V = \sum_{i=1}^{i=\eta} \varphi_i(a_1, a_2,\ldots.,a_{\eta-1})x_i = 0$$

2. - Desidero ora definire le funzioni φ_i dell'equazione (15) in modo che usando le equazioni del prof. ZERVOS (vedi « Comptes Rendus de l'Académie

des Sciences de Paris », 10 Avril 1905; « Atti del IV° Congresso Internazionale dei Matematici », Roma, 1908)

$$\left.\begin{aligned} &(16) \qquad V=0 \\ &(17) \qquad \sum_{i=1}^{i=\eta} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i = 0 \\ &(18) \qquad \sum_{i=1}^{i=\eta} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial a_l}}{\frac{\partial V}{\partial a_{\eta-1}}} \right) dx_i = 0, \qquad (l=1, 2, \ldots, \eta-2), \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

di trovare per eliminazione degli a_i dal sistema (B) l'equazione (1) di Monge.

Osserviamo che dalla (15) abbiamo,

$$\frac{\partial V}{\partial a_l} = \sum_{i=1}^{i=\eta} \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_l} x_i$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \varphi_i$$

quindi le equazioni (18) si scrivono

$$\sum_{r=1}^{r=\eta} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\sum_{i=1}^{i=\eta} \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_l} x_i}{\sum_{i=1}^{i=\eta} \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_{\eta-1}} x_i} \right) dx_r = 0 \qquad (l=1, 2, \ldots, \eta-2)$$

o ancora

$$\sum_{r=1}^{r=\eta} \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial a_l} \sum_{i=1}^{i=\eta} \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_{\eta-1}} x_i - \frac{\partial \varphi_r}{\partial a_{\eta-1}} \sum_{i=1}^{i=\eta} \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_l} x_i \right) dx_r = 0$$

e il sistema (B) può scriversi come segue:

$$\left.\begin{aligned} &(19) \qquad \sum_{i=1}^{i=\eta} \varphi_i x_i = 0 \\ &(20) \qquad \sum_{i=1}^{i=\eta} \varphi_i dx_i = 0 \\ &(21) \qquad \sum_{r=1}^{r=\eta} \sum_{i=1}^{i=\eta} \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial a_l} \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_{\eta-1}} - \frac{\partial \varphi_r}{\partial a_{\eta-1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_l} \right) x_i dx_r = 0 \end{aligned}\right\} \text{(C)}$$

3. - Si consideri il caso particolare in cui $\eta=4$, cioè considero l'equazione di Monge:

$$(22) \qquad (x_2 dx_1 - x_1 dx_2)(x_3 dx_1 - x_1 dx_3)(x_4 dx_1 - x_1 dx_4) = 0.$$

Come abbiamo già visto la corrispondente ad essa V è

$$(23) \qquad \sum_{i=1}^{i=4} \varphi_i(a_1, a_2, a_3) x_i = 0$$

Cerchiamo di definire le funzioni φ_i, in modo che per l'eliminazione di a_1, a_2, a_3 nelle equazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{1=4} \varphi_i(a_1, a_2, a_3)x_i = 0 \\
&\sum_{i=1}^{1=4} \varphi_i(a_1, a_2, a_3)dx_i = 0 \\
&\sum_{r=1}^{r=4}\sum_{i=1}^{i=4}\left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial a_1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a_3} - \frac{\partial\varphi_i}{\partial a_1}\frac{\partial\varphi_r}{\partial a_3}\right)x_i dx_r = 0 \\
&\sum_{r=1}^{r=4}\sum_{i=1}^{i=4}\left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial a_2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a_3} - \frac{\partial\varphi_i}{\partial a_2}\frac{\partial\varphi_r}{\partial a_3}\right)x_i dx_r = 0
\end{aligned}\right\} \quad (D)$$

si arrivi all'equazione (22).

L'eliminazione può eseguirsi facilmente se si scelgono le funzioni φ_i deficienti per quanto riguarda i parametri. Trovo al posto dell'equazione (23), la seguente:

$$a_3x_1 - a_1a_2x_2 + a_1x_3 + a_2x_4 = 0$$

In virtù di questa il sistema (D) si scrive:

$$\begin{aligned}
&a_3x_1 - a_1a_2x_2 + a_1x_3 + a_2x_4 = 0 \\
&a_3dx_1 - a_1a_2dx_2 + a_1dx_3 + a_2dx_4 = 0 \\
&a_2x_2dx_1 - a_2x_1dx_2 = x_3dx_1 - x_1dx_3 \\
&a_1x_2dx_1 - a_1x_1dx_2 = x_4dx_1 - x_1dx_4
\end{aligned}$$

e da esso per eliminazione di a_1, a_2, a_3 proviene l'equazione (22).

4. - È già stato osservato che dalle equazioni del sistema (B) proviene l'equazione

$$\frac{\Delta^2 V}{\Delta a^2} = 0.$$

Posso per analogia a quanto precede cercare delle condizioni tali, perchè dallo stesso sistema (B) si deduca l'equazione

$$\frac{\Delta^3 V}{\Delta a^3} = 0.$$

G. PFEIFFER (Kieff - Ucraina - U. S. S. R.)

QUELQUES ADDITIONS AU PROBLÈME DE M. BUHL

En 1901 et 1907 M. BUHL a étudié un problème très intéressant. Ce problème, dans tout son plein, consiste à rechercher les transformations infinitesimales:

$$Y(f)=\eta_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\eta_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots.+\eta_n\frac{\partial f}{\partial x_n}, \tag{1}$$

qui permutent les solutions d'une équation:

$$X(f)=\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots.+\xi_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0. \tag{2}$$

A lui sont liés beaucoup de noms saillants: POINCARÉ, APPELL, GOURSAT, DE DONDER, SALTYKOW, POPOVICI.

M. BUHL cherche des transformations (1), qui satisfont l'identité:

$$XY(f)-YX(f)=0. \tag{3}$$

M. POPOVICI prête l'attention au fait que la solution la plus générale du problème cité exige la recherche des transformations (1), qui satisfont l'identité:

$$XY(f)-YX(f)=\Lambda X(f), \tag{4}$$

Λ une fonction arbitraire.

L'identité (4) appartient à M. LIE.

Nous avons ainsi deux problèmes: trouver les transformations (1), satisfaisant l'identité (3), — problème de M. BUHL et trouver les trasformations (1), satisfaisant l'identité (4) —, problème de M. LIE.

Produisons dans l'identité (4) la transformation:

$$Y(f)=\frac{A(f)}{M}, \tag{5}$$

où M est un multiplicateur de l'équation $X(f)=0$:

$$X(M)+M\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}=0. \tag{6}$$

Nous obtiendrons l'identité:

$$XA(f)-AX(f)+A(f)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}=\Lambda MX(f). \tag{7}$$

M. GOURSAT prend $A(f)$ de l'identité:

$$XA(f)-AX(f)+A(f)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}=0. \tag{8}$$

De là résulte, qu'il résoud le problème de M. BUHL.

Je veux citer les théorèmes, qui donnent la liaison entre les équations (3), (4) aux mêmes transformations $Y(f)$.

Premier théorème. - Étant donné un système complet:

$$X(f)=0,\ Y(f)=0 \tag{9}$$

pour lequel a lieu l'identité:

$$XY(f)-YX(f)\equiv\Lambda X(f),\ \Lambda\not\equiv 0, \tag{10}$$

le système:

$$G(f)=\varrho X(f)=0,\ Y(f)=0, \tag{11}$$

où ϱ est une solution, qui plaît, de l'équation:

$$Y(\log\varrho)=\Lambda, \tag{12}$$

présent un système en involution:

$$GY(f)-YG(f)\equiv 0. \tag{13}$$

Deuxième théorème. - Étant donné un système en involution:

$$G(f)=0,\ Y(f)=0, \tag{14}$$

$$GY(f)-YG(f)\equiv 0, \tag{15}$$

le système:

$$X(f)=\alpha G(f)=0,\ Y(f)=0 \tag{16}$$

est complet; pour lui a lieu l'identité:

$$XY(f)-YX(f)\equiv\Lambda X(f),\ \Lambda=-\frac{1}{\alpha}Y(\alpha); \tag{17}$$

$\Lambda\not\equiv 0$, si α n'est pas l'intégrale de l'équation $Y(f)=0$.

G. PFEIFFER (Kieff - Ucraina - U. S. S. R.)

SUR LA RECHERCHE DES INTÉGRALES À $n-q$ DIMENTIONS DE L'ÉQUATION DE PFAFF GÉNÉRALISÉE

Les conditions, pour que les équations:

(1) $$f_1=c_1,\ f_2=c_2,\ldots,\ f_q=c_q$$

présentent une multiplicité intégrale à $n-q$ dimentions de l'équation de Pfaff généralisée:

(2) $$\Omega=\sum A_{\alpha_1\ \alpha_2\ldots\ \alpha_p}\ dx_{\alpha_1}\ dx_{\alpha_2}\ldots\ dx_{\alpha_p}=0,$$
$$2\leqslant p<n,$$

sont données par M. GOURSAT (1) dans une forme très élégante:

« Le produit symbolique:

(3) $$\Omega df_1\ df_2\ldots\ df_q$$

doit être identiquement nul:

(4) $$\Omega df_1\ df_2\ldots\ df_q\equiv 0\ ».$$

M. GOURSAT attire en même temps l'attention des lecteurs à l'intérêt de pousser plus loin l'étude des cas d'existence des multiplicités intégrales (1). Il indique, que ce serait possible, en généralisant les méthodes employées par M. CARTAN pour les systèmes de Pfaff. La dernière direction a suivi M. CERF, en écrivant sa Note (2) et son travail, pas encore publié.

Dans notre remarque nous voulons attirer l'attention à quelques traits caractéristiques de la recherche des multiplicités intégrales (1), qui se dévoilent, quand on se met à réaliser pratiquement les conditions (3).

Les conditions (3) peuvent être partagées en trois parties:

A) *La première partie.*

Par ce que le produit:

(5) $$df_1\ df_2\ldots\ df_q$$

est une forme:

(6) $$\omega=\sum M_{j_1\ j_2\ldots\ j_q}\ dx_{j_1}\ dx_{j_2}\ldots\ dx_{j_q}$$

---

(1) M. GOURSAT: *Leçons sur le problème de Pfaff.* Paris, 1922, p. 114.

(2) G. CERF: *Remarques sur une généralisation du problème de Pfaff.* Comptes rendus, t. 170, pp. 374-376.

de degré q, l'expression (3) ne peut être nul identiquement, que si le produit:

(7) $$\Omega\omega$$

le peut.

En général — pour les coefficients arbitraires $A_{\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ \alpha_p}$ de la forme Ω — on doit avoir la possibilité de trouver $C_n^q = C_n^{n-q}$ coefficients $M_{j_1\ j_2 \ldots\ j_q}$ de C_n^{p+q} relations, qui s'écrivent aisement.

Il est facile de construire un tableau, qui donne, en cas général, la rèponse à la question suivante:

« Étant donnée l'identité:

(8) $$\Omega\omega \equiv 0$$

quels peuvent être les q pour les n, p donnés? ».

B) *La deuxième partie.*

Admettons que l'on a trouvé la forme (6), qui satisfait l'identité (8), alors, par ce que le produit (5) est le produit de formes de Pfaff, les coefficients $M_{j_1 j_2 \ldots\ j_q}$ de la forme (6) doivent satisfaire les conditions d'Hamburger.

En soumettons les, s'il est possible.

C) *La troisième partie.*

Admettons que les coefficients $M_{j_1\ j_2 \ldots\ j_q}$ de la forme (6), satisfaisant l'identité (8), sont soumis aux conditions d'Hamburger, alors:

(9)
$$\begin{cases} \omega = \omega_1\ \omega_2 \ldots\ \omega_q, \\ \omega_i \equiv a_{i1}dx_1 + a_{i2}dx_2 + \ldots + a_{in}dx_n, \end{cases}$$
$$i = 1,\ 2, \ldots,\ q$$

ou

(10)
$$\begin{cases} \omega = D\tilde{\omega}_1\ \tilde{\omega}_2 \ldots\ \tilde{\omega}_q, \\ \tilde{\omega}_i = dx_i + \sum_{\sigma=q+1}^{n} p_{\sigma i}dx_\sigma, \end{cases}$$
$$i = 1,\ 2, \ldots,\ q,$$

D un multiplicateur sans différentielles.

Par ce que le produit (5) est le produit des différentielles totales, les systèmes:

(11) $$\omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0, \ldots,\ \omega_q = 0$$

et

(12) $$\tilde{\omega}_1 = 0,\ \tilde{\omega}_2 = 0, \ldots,\ \tilde{\omega}_q = 0$$

doivent être complétement intégrables.

G. PFEIFFER (Kieff - Ucraina - U. S. S. R.)

SUR LES PRODUITS DES GROUPES D'ESPÈCE SPECIALE DES FORMES DE PFAFF

Prenons la matrice:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{11},\quad a_{12},\ldots,\quad a_{1,q+1},\quad a_{1,q+2},\ldots,\quad a_{1n},\quad b_{11},\ldots,\quad b_{1k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q+1,1},\ a_{q+1,2},\ldots,\ a_{q+1,q+1},\ a_{q+1,q+2},\ldots,\ a_{q+1,n},\ b_{q+1,1},\ldots,\ b_{q+1,k}. \end{array}\right.$$

Donnons lui le nom de la matrice S et à sa partie, qui consiste des éléments b, le nom de la matrice T.

Sous M et N_h convenons de comprendre les déterminants:

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} M=\left|\begin{array}{lll} a_{11},\ldots, & a_{1q}, & a_{1,q+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{q+1,1},\ldots, & a_{q+1,q}, & a_{q+1,q+1} \end{array}\right|, \\ N_h=\left|\begin{array}{lll} a_{11},\ldots, & a_{1q}, & a_{1h} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{q+1,1},\ldots, & a_{q+1,q}, & a_{q+1,h} \end{array}\right|, \qquad h=q+2,\ldots,n, \end{array}\right.$$

sous Δ et Δ_h les produits des différencielles:

$$(3)\qquad \Delta=dx_1dx_2\ldots dx_qdx_{q+1},\quad \Delta_h=dx_1dx_2\ldots dx_qdx_h,\qquad h=q+2,\ldots,n.$$

Pour les déterminants d'ordre $q+1$ de la matrice S, qui s'obtiennent des déterminants (2), en remplaçant les colonnes $\tau_1, \tau_2,\ldots, \tau_\nu$ [1]; $\tau_1, \tau_2,\ldots, \tau_{\nu-1}, q+1$ [2] par des colonnes $\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_\nu$ [3] de la matrice T, recevrons les significations:

$$(4)\qquad M\begin{matrix}\sigma_1,\ \sigma_2,\ldots,\ \sigma_\nu \\ \tau_1,\ \tau_2,\ldots,\ \tau_\nu\end{matrix},\qquad N_h\begin{matrix}\sigma_1,\ \sigma_2,\ldots,\ \sigma_\nu \\ \tau_1,\ \tau_2,\ldots,\ \tau_\nu\end{matrix},\qquad h=q+2,\ldots,n;$$

$$(5)\qquad M\begin{matrix}\sigma_1,\ \sigma_2,\ldots,\ \sigma_{\nu-1},\ \sigma_\nu \\ \tau_1,\ \tau_2,\ldots,\ \tau_{\nu-1},\ q+1\end{matrix},\quad N_h\begin{matrix}\sigma_1,\ \sigma_2,\ldots,\ \sigma_{\nu-1},\ \sigma_\nu \\ \tau_1,\ \tau_2,\ldots,\ \tau_{\nu-1},\ q+1\end{matrix},\qquad h=q+2,\ldots,n;$$

pour les produits des différentielles, qui s'obtiennent des produits (3), en rem-

---

[1] $\tau_1, \tau_2,\ldots, \tau_\nu$ sont des combinaisons des nombres 1, 2,..., q.

[2] $\tau_1, \tau_2,\ldots, \tau_{\nu-1}$ sont des combinaisons des nombres 1, 2,..., q.

[3] $\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_\nu$ sont des combinaisons des nombres 1, 2,..., k.

plaçant les différencielles, qui occupent les lieux $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ (1); $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{\nu-1}, q+1$ (2), par des différentielles $dz_{\sigma_1}, dz_{\sigma_2}, \ldots, dz_{\sigma_\nu}$ (3), introduisons des pareilles significations:

$$(6) \qquad \Delta \begin{matrix}\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu \\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu\end{matrix}, \qquad \Delta_h \begin{matrix}\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu \\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu\end{matrix}, \qquad h = q+2, \ldots, n;$$

$$(7) \qquad \Delta \begin{matrix}\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu \\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{\nu-1}, q+1\end{matrix}, \quad \Delta_h \begin{matrix}\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu \\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{\nu-1}, q+1\end{matrix}, \qquad h = q+2, \ldots, n.$$

En composant, d'après la matrice (1), les groupes (A), (A_h) $(h=q+2, \ldots, n)$ des formes de PFAFF:

$$(8) \qquad W_j \equiv a_{j1}dx_1 + a_{j2}dx_2 + \ldots + a_{jq}dx_q + a_{j,\,q+1}dx_{q+1} + \sum_{\sigma=1}^{k} b_{j\sigma}dz_\sigma, \qquad (A)$$
$$j = 1, 2, \ldots, q+1;$$

$$(9) \qquad W_{jh} \equiv a_{j1}dx_1 + a_{j2}dx_2 + \ldots + a_{jq}dx_q + a_{jh}dx_h + \sum_{\sigma=1}^{k} b_{j\sigma}dz_\sigma, \qquad (A_h)$$
$$j = 1, 2, \ldots, q+1,$$
$$h = q+2, \ldots, n,$$

et le groupe des formes de Pfaff:

$$(10) \qquad \tilde{\omega}_j \equiv a_{j1}dx_1 + \ldots + a_{j,\,q+1}dx_{q+1} + a_{j,\,q+2}dx_{q+2} + \ldots + a_{jn}dx_n + \sum_{\sigma=1}^{k} b_{j\sigma}dx_\sigma,$$
$$j = 1, 2, \ldots, q+1,$$

écrivons les produits symboliques (4) des formes des groupes (A), (A_h) $(h = q+2, \ldots, n)$:

$$(11) \qquad \Omega \equiv W_1 W_2 \ldots W_q W_{q+1} = M\Delta + \sum_{\sigma\tau}^{kq} M_\tau^\sigma \Delta_\tau^\sigma + \sum_{\sigma}^{k} M_{q+1}^{\ \sigma} \Delta_{q+1}^{\ \sigma} + (H), \qquad (B)$$

$$(12) \qquad \Omega_h \equiv W_{1h} W_{2h} \ldots W_{qh} W_{q+1,\,h} =$$
$$= N_h \Delta_h + \sum_{\sigma\tau}^{kq} N_{h\,\tau}^{\ \sigma} \Delta_{h\,\tau}^{\ \sigma} + \sum_{\sigma}^{k} N_{h\,q+1}^{\ \ \sigma} \Delta_{h\,q+1}^{\ \ \sigma} + (H), \ (5) \qquad (B_h)$$
$$h = q+2, \ldots, n.$$

---

(1) $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ sont des combinaisons des nombres 1, 2, ..., q.

(2) $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{\nu-1}$ sont des combinaisons des nombres 1, 2, ..., q.

(3) $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu$ sont des combinaisons des nombres 1, 2, ..., k.

(4) E. GOURSAT: *Leçons sur le problème de Pfaff.* Paris, 1922, p. 90.

(5) Sous:

$$Q\Delta + \sum_{\sigma\tau}^{kn} Q_\tau^\sigma \Delta_\tau^\sigma + (H), \qquad Q_h\Delta_h + \sum_{\sigma\tau}^{kn} Q_{h\,\tau}^{\ \sigma} \Delta_{h\,\tau}^{\ \sigma} + (H)$$

nous entendons des expressions linéaires en produits des différentielles:

$$\Delta,\ \Delta_\tau^\sigma,\ \Delta \begin{matrix}\sigma_1, \sigma_2 \\ \tau_1, \tau_2\end{matrix}, \ldots; \qquad \Delta_h,\ \Delta_{h\,\tau}^{\ \sigma},\ \Delta_h \begin{matrix}\sigma_1, \sigma_2 \\ \tau_1, \tau_2\end{matrix}, \ldots,$$

dont les coefficients satisfont les conditions de M. HAMBURGER.

Marquons les conditions de M. HAMBURGER pour les produits (11), (12) par:

$$U,\quad U_h \qquad (h=q+2,\ldots,n). \tag{13}$$

Entre les coefficients des expressions (12), (11) ont lieu beaucoup de relations. Ces relations sont des conséquences des connexions (13) et des connexions:

$$\begin{cases} N_h = M\omega_h, \\ N_{h\,\tau}^{\ \sigma} = M_\tau^\sigma\,\omega_h - M_{q+1}^{\ \sigma}\,\omega_{h\tau}, \\ N_{h\,q+1}^{\ \sigma} = M_{q+1}^{\ \sigma}, \end{cases} \tag{14}$$

$$\sigma=1, 2,\ldots, k; \qquad \tau=1, 2,\ldots, q,$$
$$h=q+2,\ldots, n,$$

$$\omega_h=\frac{M_{q+1}^h}{M},\ \omega_{h1}=\frac{M_1^h}{M},\ldots,\ \omega_{hq}=\frac{M_q^h}{M} \tag{15}$$

que nous marquons par:

$$V. \tag{16}$$

M_τ^q (1) est le déterminant d'ordre $q+1$ de la matrice S, qui s'obtient du determinant M, en remplaçant la colonne τ par la dernière colonne du determinant N_h.

A l'ensemble des conditions (13), (16) nous avons donné le nom de conditions généralisées de M. HAMBURGER (2).

Appellons l'attention sur la liaison entre les systèmes d'équations:

$$W_1=0,\ W_2=0,\ldots,\ W_{q+1}=0, \tag{17}\quad (C)$$

$$W_{1h}=0,\ W_{2h}=0,\ldots,W_{q+1,\,h}=0, \qquad h=q+2,\ldots,n \tag{18}\quad (C_h)$$

et le système:

$$\tilde{\omega}_1=0,\ \tilde{\omega}_2=0,\ldots,\ \tilde{\omega}_{q+1}=0. \tag{19}$$

Dans l'équation (11):

$$\Omega=0 \tag{20}$$

les variables:

$$x_{q+2},\ x_{q+3},\ldots,\ x_n \tag{21}$$

et dans les équations (12):

$$\Omega_h=0 \tag{22}$$

---

(1) $\tau=1, 2,\ldots, q+1$.

(2) G. PFEIFFER: *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à plusieurs fonctions inconnues possédant l'intégrale de M. Hamburger.* Comptes rendus, t. 185, 1927, pp. 98-100.

les variables:

(23) $$x_{q+1},\ldots,\ x_{h-1},\ x_{h+1},\ldots,\ x_n$$

passent pour constantes.

Par ces hypothèses le système (19) dégénère en systèmes (17), (18). Par ce que l'intégration des équations symboliques (20), (22) amène à l'intégration des équations de PFAFF ([1]):

(24) $$\Lambda_1 W_1+\Lambda_2 W_2+\ldots.+\Lambda_q W_q+\Lambda_{q+1} W_{q+1}=0,$$

(25) $$\Lambda_1 W_{1h}+\Lambda_2 W_{2h}+\ldots.+\Lambda_q W_{qh}+\Lambda_{q+1} W_{q+1,\,h}=0,$$

il est clair, que l'intégration du système d'équations symboliques:

(26) $$\Omega=0,\ \Omega_{q+2}=0,\ldots,\ \Omega_n=0$$

est équivalente à l'intégration de l'équation de PFAFF:

(27) $$\Lambda_1\tilde{\omega}_1+\Lambda_2\tilde{\omega}_2+\ldots.+\Lambda_q\tilde{\omega}_q+\Lambda_{q+1}\tilde{\omega}_{q+1}=0.$$

Au cas que l'on veuille chercher les multiplicités intégrales des équations (20), (22) d'ordre $k+q-$multiplicités, qui passent en général par chaque point une à une, on vient à la recherche des combinaisons intégrables du système (19) ([2]), ce qui est la même chose, du système:

(28) $$\begin{cases} Mdx_\tau+\sum_{\sigma=1}^{k} M_\tau^\sigma\, dz_\sigma+\sum_{h=q+2}^{n} M_\tau^h\, dx_\tau=0, \\ \qquad \tau=1,\ 2,\ldots,\ q, \\ Mdx_{q+1}+\sum_{\sigma=1}^{k} M_{q+1}^{\ \sigma}\, dz_\sigma+\sum_{h=q+2}^{n} M_{q+1}^{\ h}\, dx_h=0. \end{cases}$$

Des équations symboliques (26), en regardant les variables $z_1, z_2,\ldots, z_k$ comme fonctions des variables $x_1, x_2,\ldots, x_n$, on passe aux équations linéaires en Jacobiens:

(29) $$M+\sum_{\sigma\tau}^{kq} M_\tau^\sigma\,\frac{\partial z_\sigma}{\partial x_\tau}+\sum_{\sigma}^{k} M_{q+1}^{\ \sigma}\,\frac{\partial z_\sigma}{\partial x_{q+1}}+(H)=0,$$

(30) $$N_h+\sum_{\sigma\tau}^{kq} N_h{}_\tau^\sigma\,\frac{\partial z_\sigma}{\partial x_\tau}+\sum_{\sigma}^{k} N_h{}_{q+1}^{\ \sigma}\,\frac{\partial z_\sigma}{\partial x_h}+(H)=0,$$
$$h=q+2,\ldots,\ n.$$

Nous avons bien étudié les systèmes (29), (30) ([3]).

Au maintien des conditions généralisées de M. Hamburger la recherche de

---

([1]) E. GOURSAT: *Leçons sur le problème de Pfaff.* Paris, 1922, p. 116.

([2]) E. GOURSAT: *Leçons sur le problème de Pfaff.* Paris, 1922, p. 113.

([3]) Une série des mémoires depuis longtemps écrits par l'auteur n'est pas encore publiée.

l'intégrale du système (29), (30), sous la seule relation, amène à l'intégration du système d'équations linéaires aux différentielles totales (28):

$$Mdx_\tau + \sum_{\sigma=1}^{k} M_\tau^\sigma \, dz_\sigma + M \sum_{h=q+2}^{n} \omega_{h\tau} dx_h = 0, \qquad \tau = 1, 2, \ldots, q, \tag{31}$$

$$Mdx_{q+1} + \sum_{\sigma=1}^{k} M_{q+1}^{\sigma} \, dz_\sigma + M \sum_{h=q+2}^{n} \omega_h dx_h = 0, \tag{32}$$

ce qui est de même, à l'intégration du système d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue:

$$M \frac{\partial f}{\partial z_j} = \sum_{\tau=1}^{q} M_\tau^j \frac{\partial f}{\partial x_\tau} + M_{q+1}^{j} \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{33}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_h} = \sum_{\tau=1}^{q} \omega_{h\tau} \frac{\partial f}{\partial x_\tau} + \omega_h \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}}, \qquad h = q+2, \ldots, n \ (^1). \tag{34}$$

Les recherches, exposées ci-dessus, amènent à des resultats plus généraux que les généralisations indiquées par M. GOURSAT (²), consistant dans l'extension immédiate des resultats connus pour une équation aux systèmes d'équations.

(¹) G. PFEIFFER: *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à plusieurs fonctions inconnues possédant l'intégrale de M. Hamburger.* Comptes rendus, t. 185, 1927, p. 100.

(²) E. GOURSAT: *Sur un problème d'Hamburger.* Comptes rendus, t. 185, 1927, p. 810.

P. HUMBERT (Montpellier - Francia)

SUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TROISIÈME ORDRE

Il est bien connu qu'un lien étroit existe entre l'équation de LAPLACE

$$\Delta_2 U=0$$

à un nombre quelconque de variables, supérieur ou égal à deux, el les fonctions hypergéométriques (du second ordre), à une ou plusieurs variables, soit complètes comme les fonctions de LEGENDRE, de GEGENBAUER, d'APPELL, ou de LAURICELLA, soit confluentes comme les fonctions de WEBER ou de BESSEL. Peut-on mettre en évidence un lien analogue entre des équations du même type, mais d'ordre *trois*, et les fonctions hypergéométriques du troisième ordre, de CLAUSEN et GOURSAT ? La présente note a pour but d'ébaucher une réponse à cette question.

Soit l'équation d'ordre trois, à trois variables,

$$\Delta_3 U=\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial z^3}-3\frac{\partial^3 U}{\partial x\partial y\partial z}=0; \tag{1}$$

c'est une généralisation directe de l'équation de LAPLACE à deux variables

$$\Delta_2 U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0,$$

qui, si l'on pose

$$\xi=x+iy$$
$$\eta=x-iy$$

devient

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

et admet la solution générale

$$U=f(\xi)+g(\eta).$$

Posons en effet, dans (1),

$$\xi=x+y+z$$
$$\eta=x+jy+j^2z \qquad (j^3=1)$$
$$\zeta=x+j^2y+jz$$

nous obtenons

$$\Delta_3 U=\frac{\partial^3 U}{\partial\xi\partial\eta\partial\zeta}=0 \tag{2}$$

équation dont la solution générale est

$$F(\xi, \eta) + G(\eta, \zeta) + H(\zeta, \xi)$$

F, G, H étant des fonctions arbitraires.

En particulier, la fonction

$$\log \xi + \log \eta + \log \zeta$$

sera une solution de (2); donc la fonction

$$V(x, y, z) = \log (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$

sera solution de (1).

Nous pouvons dire alors, suivant une méthode employée dans un problème analogue par M. APPELL, et dûe à M. GIULOTTO, que l'équation (1) est satisfaite aussi par l'expression

$$\frac{\partial^n V}{\partial x^n}$$

et par conséquent par la fonction

$$\frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h^n} \log [(x-h)^3 + y^3 + z^3 - 3(x-h)yz]$$

ou l'on fait $h=0$. Désignons-la par $P_n(x, y, z)$; on a par ailleurs

$$\log [(x-h)^3 + y^3 + z^3 - 3(x-h)yz] = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x, y, z);$$

supposons alors que le point x, y, z, soit sur la courbe (c) définie par les équations

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1 \\ x^2 - yz = 0 \end{cases}$$

la fonction $P_n(x, y, z)$ se réduira au polynome $P_n(x)$ défini par le développement

$$\log (1 + 3h^2 x - h^3) = \sum_n h^n P_n(x).$$

Donc, sur la courbe (c), le polynome $P_n(x)$ se rattache à l'équation $\Delta_3 U = 0$ de la même façon que se rattachent à l'équation de LAPLACE, par exemple la fonction de LEGENDRE sur la sphère, les polynomes d'HERMITE sur l'hypersphère, etc.

Or le polynome $P_n(x)$ est hypergéométrique du troisième ordre: on formera en effet sans difficulté l'équation différentielle à laquelle il satisfait; c'est

$$(4x^3 + 1)P_n''' + 18x^2 P_n'' + (10 + 3n - 3n^2)xP_n' + n^2(n-3)P_n = 0$$

qui est bien du type CLAUSEN.

L'expression de P_n en fonction hypergéométrique sera alors:

si $n \equiv 0 \pmod 3$:

$$P_n = -\frac{3}{n} F\left(-\frac{n}{6},\ -\frac{n}{6} + \frac{1}{2},\ \frac{n}{3};\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3};\ -4x^3\right)$$

si $n \equiv 1 \pmod 3$:

$$P_n = -\frac{3}{2}(n-1)x^2 F\left(-\frac{n}{6}+\frac{2}{3},\ -\frac{n}{6}+\frac{7}{6},\ \frac{n}{3}+\frac{2}{3};\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3};\ -4x^3\right)$$

si $n \equiv 2 \pmod 3$:

$$P_n = 3xF\left(-\frac{n}{6}+\frac{1}{3},\ -\frac{n}{6}+\frac{5}{6},\ \frac{n}{3}+\frac{1}{3};\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3};\ -4x^3\right).$$

Ce polynome est d'ailleurs à peu près identique à l'une des fonctions que j'ai introduites, il y a quelques années, pour généraliser les polynomes de M. PINCHERLE (1), et dont M. BEVAN BAKER (2) a donné l'expression hypergéométrique. J'avais posé

$$(1-3tx+t^3)^{-\nu} = \sum_n h^n \Pi_n^{\nu}(x);$$

le polynome de PINCHERLE (3) correspondait à $\nu = \frac{1}{2}$. En particulier, pour $\nu = 0$ on a

$$-\log(1-3tx+t^3) = \sum h^n \Pi_n^0(x)$$

et l'on peut constater que $P_n(x)$ est, à un facteur constant près, égal à $\Pi_{-n}^{(0)}(-x)$.

---

(1) Proceedings Edinburgh Mat. Soc., vol. XXXIX, 1920-21, p. 21.

(2) Id., ibid., p. 58.

(3) Memorie della R. Accad. Bologna, s. V, t. I, 1890, p. 337.

E. CAVALLI (Torino - Italia)

SULL'INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DELLA BALISTICA

Le equazioni differenziali che definiscono il moto del centro di gravità di un proietto nell'aria sono:

$$gd(v\cos\theta)=vf(v)d\theta,\quad gdx=-v^2d\theta,\quad gdy=-v^2\,\mathrm{tg}\,\theta d\theta,\quad gdt=-v\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

ove g è la gravità v, x, y e t sono rispettivamente la velocità, l'ascissa (orizzontale), l'ordinata (verticale), ed il tempo corrispondenti ad un punto della traiettoria nel quale è θ l'inclinazione della tangente.

La $f(v)$ è la ritardazione, o resistenza dell'aria sull'unità di massa, e si suppone direttamente opposta alla velocità e funzione della velocità.

Il problema analitico consiste nell'integrazione della 1ª equazione, detta odografa, integrata la quale le altre si riducono a quadrature.

NEWTON, al quale son dovuti i primi studi sulla resistenza che l'aria oppone al moto dei corpi, integrò quell'equazione nel caso della resistenza proporzionale alla 1ª potenza della velocità $f(v)=\gamma v$, e ne dedusse qualche carattere della forma della traiettoria; GIOVANNI BERNOULLI nel 1719 integrò la stessa equazione nel caso della resistenza proporzionale ad una potenza qualunque della velocità $f(v)=\gamma v^n$; nel 1744 D'ALEMBERT trovò altre quattro forme della $f(v)$ che permettono di ridurre a quadrature il problema, tra le quali le più importanti sono: $f(v)=a+\gamma v^n$ e $f(v)=a+\gamma\log v$; SIACCI nel 1901 trovò altre 14 forme della $f(v)$ che risolvono lo stesso problema, la più semplice delle quali è la seguente:

$$f(v)=Av\sqrt{2c+v^2}+B(c+v^2)$$

ove A, B, c sono costanti.

Ma nessuna di queste forme coincide con quella che sperimentalmente si ha per la resistenza; e soltanto il caso di BERNOULLI per $n=2$ si può prestare ad applicazioni pratiche perchè per $v\leqslant 240$ m. si può ritenere che la resistenza dell'aria sia effettivamente proporzionale al quadrato della velocità.

Senonchè SIACCI dal 1880 al 1896 elaborò un suo proprio metodo di integrazione che lo portò a formole semplici ed indipendenti dalla torma della $f(v)$. Considerato che

$$f(v)=\frac{\delta i}{C}F(v)$$

ove C è un coefficiente dipendente dalle dimensioni del proietto, i un coefficiente dipendente dalla forma del proietto, δ è la densità dell'aria e $F(v)$ una funzione della sola velocità; $f(v)$ varia non solo pel variare di v ma anche pel variare di δ il quale varia lungo la traiettoria perchè esso varia con l'altitudine. SIACCI pone

$$\delta_y F(v) = \delta_0 \beta F(u) \frac{\cos^2 \varphi}{\cos \theta}$$

dove $u = \frac{v \cos \theta}{\cos \varphi}$ è detta pseudo-velocità ed ha la particolare proprietà di diventare eguale a V nell'origine e di diminuire costantemente come $v \cos \theta$ lungo la traiettoria, δ_y è la densità dell'aria nel punto che si considera, δ_0 la densità nell'origine, β una variabile che fa sussistere l'eguaglianza. Introdotta questa espressione nelle equazioni, per β si assume un valore medio, e si perviene al seguente gruppo di formole che scrivo pel punto di caduta (2° punto in cui la traiettoria incontra il piano orizzontale per l'origine)

$$X = C'[D(u) - D(V)], \quad \text{sen } 2\varphi = C'\left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right], \quad C' = \frac{C}{\delta_0 i \beta}$$

$$\text{tg } \omega = \frac{C'}{2 \cos^2 \varphi}\left[J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}\right], \quad T = \frac{C'}{\cos \varphi}[T(u) - T(V)], \quad U = \frac{u \cos \varphi}{\cos \omega}$$

ove X è la gittata (ascissa del punto di caduta), φ è l'angolo di proiezione (inclinazione nell'origine), V la velocità iniziale, ω, T, U sono il valore numerico dell'inclinazione, il tempo e la velocità nel punto di caduta. Le funzioni che entrano in questa formula sono definite da

$$D(u) = \int \frac{-u du}{F(u)}, \quad J(u) = \int \frac{-2g du}{u F(u)}, \quad T(u) = \int \frac{-du}{F(u)}, \quad A(u) = \int J(u) dD(u)$$

e sono date da una tavola a semplice entrata con argomento $D(u)$ detta Tavola Balistica generale; cambiando la $F(u)$ cambia la Tavola Balistica ma non le formule.

Le formole si prestano a risolvere con facilità molti problemi di tiro relativi a studi di artiglieria ed altri; ma la principale applicazione delle formole balistiche consiste nella costruzione delle tavole di tiro.

Sono queste tabelle numeriche a semplice entrata, che in corrispondenza alle gittate X varianti di 100 in 100 metri devono dare i dati necessari per l'esecuzione del tiro e per la sua correzione: il dato più importante da inserire nelle tavole di tiro è l'angolo di proiezione, che serve per eseguire il puntamento. Quando si pensi che per una data velocità iniziale le gittate possono variare da 0 a 10 o 20 Km. si vede che bisogna calcolare 100 e 200 valori di φ, di ω, di T e di U; e se come frequentemente avviene, la bocca da fuoco usa parecchie cariche (4 o 5 almeno) questo calcolo deve essere ripetuto per 4 o 5 volte e ciò è grave anche se si limita il calcolo a valori di X di 500 in 500 metri, come si fa abitualmente, servendosi poi dell'interpolazione grafica per le distanze intermedie.

Ciò dimostra quanto sia importante che le formule da impiegare siano di facile applicazione ed alla portata di semplici calcolatori che non debbono essere distratti da preoccupazioni analitiche di carattere più elevato come sarebbe per esempio se si dovesse partire ogni volta dalle equazioni differenziali integrandole con metodi approssimati.

Ecco brevemente come si procede in pratica per procurarsi i dati occorrenti pel calcolo.

Con una stessa velocità iniziale, cioè con una stessa carica, si eseguiscono nelle migliori condizioni possibili tre o quattro serie di 10 o 15 colpi ciascuna, misurando ogni volta la gittata e l'angolo di tiro. Si hanno così tre o quattro gruppi di dati che si corrispondono; V, φ, X, i quali messi nelle prime due formule del tiro permettono di ricavare tre o quattro valori di C' e quindi di $i\beta$, giacchè si conoscono C e δ_0. Questi tre o quattro valori di $i\beta$ si collegano con diagramma ai corrispondenti valori di X, e dal diagramma si prende il valore di $i\beta$ corrispondente a qualunque X per cui si ha da fare il calcolo.

Benchè questo metodo sia sufficiente pei bisogni della pratica ed abbia finora ben risposto alle varie esigenze, sarebbe opportuno riprendere in esame le equazioni differenziali per vedere se non sia possibile integrarle, esattamente o con sufficiente approssimazione, anche nel caso in cui si tenga conto a parte della variabilità di δ_y con l'altitudine. Se si tiene conto della variabilità di δ_y allora il sistema delle equazioni differenziali si scinde diversamente: cioè le equazioni 1ª e 3ª

$$g d(v\cos\theta) = \frac{\delta_y i}{C} v F(v)\cdot d\theta\,; \quad g dy = -v^2\cdot \operatorname{tg}\theta d\theta$$

che contengono le tre stesse variabili, formano un sistema a parte, integrando il quale le altre due sono ridotte a quadrature.

Invece del sistema si può studiare l'equazione del 2° ordine che nasce dall'eliminazione di y tra le due. Per questa eliminazione ho constatato che uno speciale vantaggio è offerto dall'assumere per la δ_y la formula di BESSEL

$$\delta_y = \delta_0 e^{-\alpha y}$$

con α costante, la quale riproduce abbastanza bene le esperienze fatte recentemente dal prof. GAMBA dell'Università di Pavia. Il vantaggio cui accennavo consiste nel fatto che dall'equazione sparisce qualsiasi traccia del proietto. Ecco l'equazione cui si perviene assumendo come variabile indipendente la pseudo velocità u

$$\frac{d^2\theta}{du^2} + \frac{\alpha\cos^2\varphi}{g}\frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos^2\theta}u^2\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 + \varphi(v)\left[\frac{1}{u} + \operatorname{tg}\theta\frac{d\theta}{du}\right]\frac{d\theta}{du} = 0$$

in cui

$$\varphi(v) = 1 + \frac{vF'(v)}{F(v)} = 1 + n(v).$$

Un altro vantaggio presentato da questa equazione è che la v non vi com-

pare più nella $F(v)$ ma nella $\varphi(v)$ la quale assume valori più modesti che la $F(v)$: infatti mentre la $F(v)$ può variare tra 0 e $+\infty$, $\varphi(v)$ varia fra 2 e 7. Se si pone $\varphi(v)=\tau\varphi(u)$ si verifica che τ assume il valore 1 almeno in tre punti al finito, quindi si può ad esso più facilmente assegnare un valore medio poco differente da 1.

Si noti che il termine contenente a non si potrebbe considerare come termine piccolo e correttivo per la piccolezza di a, giacchè esso è moltiplicato per u^2 che è grande: mentre a è press'a poco 10^{-4}, u^2 è almeno dell'ordine di 10^4 quindi il prodotto non è trascurabile rispetto al termine $\frac{1}{u}\varphi(u)<\frac{7}{u}<\frac{7}{100}$ in generale.

Assumendo $\tau=1$ si ha quest'altra equazione più semplice

$$\frac{d^2\xi}{d\zeta^2}+[ku^2(1+\zeta^2)+n(u)-1]\frac{\xi}{1+\zeta^2}\left(\frac{d\xi}{d\zeta}\right)^2=0$$

dove abbiamo posto per brevità

$$\frac{a\cos^2\varphi}{g}=k$$

e le nuove variabili sono

$$\xi=\operatorname{tg}\theta;\quad \zeta=J(u)=\int\frac{-2gdu}{uF(u)}$$

la $n(u)$ è data come la $F(u)$ da una tavola numerica.

Quest'ultima equazione è esatta per $n=$cost. perchè allora $\tau=1$ sempre. Per $n=1$ l'equazione si riduce alla seguente (essendo $F(u)=\lambda u$)

$$\frac{d^2\xi}{d\zeta^2}+k\left(\frac{2g}{\lambda}\right)^2\frac{\xi}{\zeta^2}\left(\frac{d\xi}{d\zeta}\right)^2=0$$

che io ho integrato facilmente con

$$\zeta=C_1[\Phi(z)+C],\quad \frac{2g}{\lambda}\sqrt{\frac{h}{2}}\,\xi=-z\zeta+\frac{1}{2}C_1e^{z^2}$$

z essendo un parametro e C e C_1 costanti arbitrarie

$$\Phi(z)=\int_0^z e^{z^2}dz.$$

Ma questo caso non riveste alcuna importanza pratica, giacchè in nessuna zona delle velocità la resistenza si può ritenere proporzionale alla prima potenza della velocità, se non forse per le velocità piccolissime; quindi resta soltanto un risultato teorico.

Cosicchè un primo passo è già fatto nella risoluzione del nuovo problema analitico; e sarebbe ora conveniente ed opportuno che si facesse un secondo passo.

Ma non sono da ciò le proprie penne.

Onde io rivolgo appello a tutti gli analisti che non disdegnino di rivolgere la loro mente a questo problema, considerato come puro problema analitico.

Non si trincerino gli analisti nella consueta dichiarazione d'incompetenza; qui non si vuole ch'essi si addentrino nei dettagli della Balistica per trattare problemi

speciali, per i quali allora sì, sarebbe necessario la competenza ed anzi una competenza soda e profonda; ma si domanda solo di restringersi al problema analitico dell'integrazione di un'equazione o di un sistema di equazioni.

Ho esposto in precedenza il metodo SIACCI ed i problemi che esso risolve per indicare la meta cui bisogno tendere. Ma come non furono inutili i passi puramente analitici di BERNOULLI, EULERO, D'ALEMBERT, ecc. non saranno inutili ora passi puramente teorici. Per esempio sarebbe un risultato già importante se si riuscisse ad integrare una delle equazioni scritte sopra per $n(v)=\text{cost.}$ maggiore di 1 ed anche solamente $n(v)=2$.

L. TONELLI (Bologna - Italia)

SULLA SEMICONTINUITÀ DEGLI INTEGRALI DOPPI

In una Memoria pubblicata nel 1915, dopo altri lavori sullo stesso argomento, enunciai, per gli integrali appartenenti ad una classe molto estesa di problemi di Calcolo delle Variazioni, il teorema seguente: « Lorsque certaines conditions de régularité sont satisfaites, l'intégrale en question est toujours une fonction semi-continue de l'élément sur lequel elle agit; et l'on a précisément une fonction semi-continue inférieurement ou supérieurement, suivant que le problème est régulier-positif ou régulier-négatif ». Questa stessa proposizione fu enunciata, nel 1922, nei miei « *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* » nella forma seguente: « .... Si ha però — almeno per le funzioni di linea o superficie più importanti che si presentano nel Calcolo delle Variazioni — che queste funzioni godono generalmente della semicontinuità superiore o inferiore; e, con maggior precisione, sta il fatto che della semicontinuità godono tutte quelle funzioni di linea o superficie che soddisfano a certe condizioni di *regolarità* ».

Limitandomi agli integrali curvilinei, nella Memoria già indicata, in un altro lavoro su « *La semicontinuità nel Calcolo delle Variazioni* » e nel 1° volume dei miei « *Fondamenti* », feci conoscere due dimostrazioni diverse del teorema rammentato. Come risulterà da una mia nuova Memoria, che sarà prossimamente pubblicata negli « Acta Mathematica », queste dimostrazioni valgono perfettamente anche per gli integrali doppi o integrali di superficie.

Dopo il LEBESGUE, che dimostrò, nella sua *Tesi*, che l'integrale di superficie

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS,$$

quando si supponga $f \geqslant 0$, è una funzione semicontinua inferiormente, devo citare, a proposito della semicontinuità degli integrali doppi, il GOURSAT, il RADÒ e l'HAAR.

Il GOURSAT, partendo dall'ipotesi che esistano, per la funzione $f(x, y, z, p, q)$ due numeri positivi α, β, tali da aversi sempre

$$u^2 f_{pp} + 2uvf_{pq} + v^2 f_{qq} \geqslant \alpha u^2 + \beta v^2,$$

per ogni punto (x, y, z) che deve considerarsi e qualunque siano p, q, stabilì la semicontinuità inferiore dell'integrale

$$\iint_D f(x, y, z, p, q)dxdy, \tag{1}$$

per tutte le funzioni $z(x, y)$ continue, con le loro derivate parziali del primo ordine $p(x, y)$, $q(x, y)$, in tutto il campo D.

Lo studio dei lavori di Z. DE GEÖCZE, sulla quadratura delle superficie, ha condotto il RADÒ a dimostrare che gli integrali

$$\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}dxdy, \qquad \iint_D (p^2+q^2)dxdy$$

sono semicontinui inferiormente nella classe delle funzioni $z(x, y)$ che soddisfano, in D, alla condizione di LIPSCHITZ

$$|z(x_1, y_1)-z(x_2, y_2)| \leqslant \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}L[z], \tag{2}$$

$L[z]$ essendo una costante finita, che non è necessariamente la stessa per tutte le funzioni $z(x, y)$. Più generalmente, A. HAAR ha dimostrato che, se $f(p, q)$ dipende soltanto da p e q, e soddisfa sempre alle disuguaglianze

$$f_{pp}f_{qq}-f_{pq}^2>0, \qquad f_{pp}>0,$$

l'integrale

$$\iint_D f(p, q)dxdy$$

è semicontinuo inferiormente nella classe delle funzioni $z(x, y)$ soddisfacenti alla disuguaglianza (2).

Dopo questi lavori, resta ancora da dimostrare la semicontinuità dell'integrale (1) per la classe delle funzioni $z(x, y)$ che hanno la stessa generalità delle funzioni $y(x)$ da me studiate nei miei « *Fondamenti* ». In questo libro io ho stabilito la semicontinuità dell'integrale quasi-regolare

$$\int_a^b f(x, y, y')dx$$

rispetto alle funzioni $y(x)$ assolutamente continue nell'intervallo (a, b) e tali che $f(x, y(x), y'(x))$ risulti integrabile in (a, b). Come M. LAVRENTIEFF ha mostrato, queste funzioni danno la classe più estesa che possa essere considerata nel Calcolo delle Variazioni; e d'altra parte si è necessariamente condotti a tale classe di funzioni se si vogliono studiare, coi metodi diretti e in tutta la loro generalità, i problemi del Calcolo delle Variazioni.

Per l'integrale doppio (1), le funzioni $z(x, y)$ più generali, che si incontrano nell'applicazione dei metodi diretti del Calcolo delle Variazioni, sono le funzioni

assolutamente continue, secondo la definizione da me data nelle mie ricerche sulla quadratura delle superficie; e naturalmente, fra siffatte funzioni vanno considerate soltanto quelle per le quali la $f(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y))$ risulta integrabile nel campo dato D.

Nella Memoria che ho già annunciata, io dimostro precisamente la semicontinuità dell'integrale doppio (1), supposto *quasi-regolare*, relativamente alla classe generale delle funzioni $z(x, y)$ ora indicate.

N. SAKELLARIOU (Athenai - Grecia)

ÜBER DIE BELTRAMI-HAMILTONSCHE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNG IN DER VARIATIONSRECHNUNG

Es ist bekannt dass zu dem Variationsproblem

$$\int_{P_1}^{P_2} F(x, y;\ \vartheta)ds = \text{Min.},$$

wobei man gesetzt hat

$$F(x, y;\ \vartheta) = F(x, y;\ \cos\vartheta, \sin\vartheta) = F(x, y;\ x', y')$$

und überdies ist

$$F(x, y;\ kx', ky') = k \cdot F(x, y;\ x', y'), \qquad k>0 \tag{1}$$

im allgemeinen eine gewisse partielle Differentialgleichung erster Ordnung entspricht, welche die Beltrami-Hamiltonsche Differentialgleichung dieses Problems genannt wird (1). Sind nämlich die Gleichungen

$$x=\varphi(s, a), \qquad y=\psi(s, a) \tag{2}$$

die allgemeine Lösung der Lagrange-Eulerschen Differentialgleichung dieses Problems, welche eine beliebige Schar von Extremalen darstellen, die den Extremalbogen C_0 für $a=a_0$ gibt, und welche gewisse Eigenschaften besitzt, so hat man für gewählte positive grössen h und k

$$s=\sigma(x, y), \qquad a=a(x, y) \tag{3}$$

im Bereich

$$s_1-h \leqslant s \leqslant s_2+h, \qquad |a-a_0| \leqslant k \tag{3'}$$

von s und a, in dem $\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(s, a)} \neq 0$ ist.

Durch jeden Punkt $P(s)$ des so genannten Feldes unseres Problems geht eine und nur eine Extremale der Schar (2) für welche s und a den Bedingungen (3') genügen. In diesem Punkt hat diese Extremale eine ganz bestimmte positive

(1) A. Kneser bezeichnet diese Gleichung als Jacobi-Hamiltonsche in seinem Lehrbuch der Variationsrechnung, zweite Auflage, 1925, §§ 23, 25.

Tangente, deren die Richtungscosinus p, q als eindeutige definierte Funktionen von x, y ausgedrückt werden können, d. i.

$$p=\varphi_s(s,\alpha)=\varphi_s(\sigma(x,y),\alpha(x,y))=p(x,y)$$
$$q=\psi_s(s,\alpha)=\psi_s(\sigma(x,y),\alpha(x,y))=q(x,y).$$

Wir betrachten nun das Feldintegral

$$\int_{P_1}^{P} F(\varphi(\sigma,\alpha),\psi(\sigma,\alpha);\ \vartheta(x,y))ds,$$

dessen Wert eine eindeutige Funktion von $P(x,y)$ im Felde ist, den wir mit $W(x,y)$ bezeichnen, und es ist

$$\frac{\partial W}{\partial x}=F_{x'}(x,y;\ \vartheta(x,y)),\qquad \frac{\partial W}{\partial y}=F_{y'}(x,y;\ \vartheta(x,y)) \tag{4}$$

und die Funktion $\vartheta(x,y)$, d. i. die $p(x,y)$, $q(x,y)$ der partiellen Differentialgleichung genügen

$$\frac{\partial F_p(x,y;\ \vartheta)}{\partial y}-\frac{\partial F_q(x,y;\ \vartheta)}{\partial x}=0,$$

welche in engster Beziehung zu der Lagrange-Eulerschen Differentialgleichung $F_{xy'}-F_{yx'}+F_1\vartheta'=0$ steht. In der Tat, wir haben

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_p}{\partial y}=\dfrac{\partial F_q}{\partial x}=F_{xq}+F_{qp}\dfrac{\partial p}{\partial x}+F_{qq}\dfrac{\partial q}{\partial x}\\ \dfrac{\partial F_p}{\partial x}=F_{xp}+F_{pp}\dfrac{\partial p}{\partial x}+F_{pq}\dfrac{\partial q}{\partial x};\end{cases} \tag{5}$$

berücksichtigt man nun die aus der Homogeneität (1) folgenden Gleichungen

$$p\cdot F_{pp}+q\cdot F_{pq}=0,\qquad p\cdot F_{pq}+q\cdot F_{qq}=0$$
$$F_x=p\cdot F_{xp}+q\cdot F_{xq},$$

so findet nach Multiplikation der (5) mit p und q und Addition

$$p\cdot\frac{\partial F_p}{\partial x}+q\cdot\frac{\partial F_p}{\partial y}=\frac{dF_p}{ds}=F_x,$$

und auf dieselbe Weise aus den entsprechenden Ausdrücken für die $\frac{\partial F_q}{\partial x}$, $\frac{\partial F_q}{\partial y}$ die Gleichung

$$\frac{dF_q}{ds}-F_y=0.$$

Aus den (4) und der $p^2+q^2-1=0$ erhält man durch Elimination von p und q die Beltrami-Hamiltonsche Differentialgleichung

$$\Phi\left(\frac{\partial W}{\partial x},\ \frac{\partial W}{\partial y},\ x,\ y\right)=0, \tag{6}$$

welche die Funktion W explizit nicht enthält.

Es sei nun eine beliebige partielle Differentialgleichung von der Form (6) gegeben, d. i. erster Ordnung, in welcher die unbekannte Funktion W selbst

nicht explizit vorkommt. Es fragt sich, unter welchen Bedingungen diese Gleichung einem regulären Variationsproblem entspricht, und wie man den Integranden $F(x, y; \vartheta)$ des entsprechenden Integrals darstellen kann.

Wenn wir mit $W_1(x, y; \vartheta(x, y))$, $W_2(x, y; \vartheta(x, y))$ die zwei unbekannten Funktionen $F_p(x, y; \vartheta)$, $F_q(x, y; \vartheta)$ der rechten Seiten von (4) bezeichnen, so haben wir

$$F(x, y; \vartheta) = p \cdot W_1(x, y; \vartheta) + q \cdot W_2(x, y; \vartheta) \tag{7}$$

und nach der Bestimmung der W_1, W_2 können wir den Integranden $F(x, y; \vartheta)$ des Variationsproblems

$$\int_{P_1}^{P} F(x, y; \vartheta) ds = \text{Min.}$$

bilden, wobei

$$x' = \frac{dx}{ds} = \cos \vartheta, \qquad y' = \frac{dy}{ds} = \sin \vartheta$$

statt $p(x, y)$, $q(x, y)$ gesetzt ist, und welches auf die gegebene Differentialgleichung (6) führt, wenn die $F_{x'}(x, y; \vartheta)$, $F_{y'}(x, y; \vartheta)$ sich auf W_1, W_2 reduzieren und überdies aus den zwei Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial x} = W_1, \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = W_2$$

und einer dritten $p^2 + q^2 = 1$ durch Elimination von p und q die Gleichung (6) erhalten wird. Nun finden wir aus (7)

$$F_p = W_1 + p \cdot \frac{\partial W_1}{\partial p} + q \cdot \frac{\partial W_2}{\partial p}$$
$$F_q = W_2 + p \cdot \frac{\partial W_1}{\partial q} + q \cdot \frac{\partial W_2}{\partial q},$$

und wegen der gemachten Voraussetzung ergibt sich

$$\begin{cases} p \cdot \dfrac{\partial W_1}{\partial p} + q \cdot \dfrac{\partial W_2}{\partial p} = 0 \\ p \cdot \dfrac{\partial W_1}{\partial q} + q \cdot \dfrac{\partial W_2}{\partial q} = 0; \end{cases} \tag{8}$$

setzen wir noch $p^2 + q^2 - 1 = 0$, so haben wir notwendig

$$\frac{\partial(W_1, W_2)}{\partial(p, q)} = 0,$$

und die aufgestellte Forderung ist gleichbedeutend mit

$$\Phi(W_1, W_2, x, y) = 0.$$

Für die Bestimmung der $W_1(x, y; \vartheta)$, $W_2(x, y; \vartheta)$ lösen wir die letzte Gleichung, welche die gegebene (6) unter anderen Form ist, nach W_1 auf, und es sei

$$W_1 = g(W_2, x, y). \tag{9}$$

Differenzieren wir dieselbe nach p und q, so ergibt sich

$$\frac{\partial W_1}{\partial p} = \frac{\partial g}{\partial W_2} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial p}$$
$$\frac{\partial W_1}{\partial q} = \frac{\partial g}{\partial W_2} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial q},$$

und wegen (8) haben wir,

$$\frac{\partial W_2}{\partial p}\left(\frac{\partial g}{\partial W_2} + \frac{q}{p}\right) = 0$$
$$\frac{\partial W_2}{\partial q}\left(\frac{\partial g}{\partial W_2} + \frac{q}{p}\right) = 0.$$

Die Annahme $\frac{\partial W_2}{\partial p} = 0$ oder auch $\frac{\partial W_2}{\partial q} = 0$ hat als Folgerung $\frac{\partial W_1}{\partial p} = 0$ b. z. w. $\frac{\partial W_1}{\partial q} = 0$ und die Funktion F_1 des entsprechenden Variationsproblems ist gleich Null, d. i. W_1, W_2 sind von p und q unabhängig und es handelt sich mehr um kein reguläres Variationsproblem. Schliessen wir diesen Fall aus, so folgt

$$\frac{\partial g}{\partial W_2} = -\frac{q}{p}, \tag{10}$$

woraus sich ergibt, wenn die linke Seite von (10) die Funktion W_2 enthält, und mit Hülfe von (9) $\begin{matrix} W_2 = W_2(x, y; \vartheta) \\ W_1 = W_1(x, y; \vartheta) \end{matrix}$. Damit können wir den Integranden des erwähnten Variationsproblems bilden, und wir haben

$$F(x, y; \vartheta) = \cos\vartheta \cdot \frac{\partial W(x, y; \vartheta)}{\partial x} + \sin\vartheta \cdot \frac{\partial W(x, y; \vartheta)}{\partial y}. \tag{11}$$

Die Funktion $F(x, y; \vartheta)$ ist positiv-homogen und von der Dimension 1, da in der Gleichung (10) nur das Verhältnis der q und p auftritt. Die Auflösung der Gleichung (10) nach W_2 setzt voraus erstens, dass in der gegebenen Differentialgleichung die $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$ wirklich beide vorkommen und zweitens, dass die Form (9) der gegebenen Differentialgleichung nicht linear in W_2 ist, nämlich dass die gegebene Differentialgleichung keine lineare in $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$ ist, da sie in der Form (9) eine solche in W_1 ist.

Man könnte die gegebene Gleichung (6) nach W_2 auflösen und W_1 aus der Gleichung $\frac{\partial g}{\partial W_1} = -\frac{p}{q}$ als Funktion von x, y, p, q bestimmen. Aus den vorangehenden ergibt sich das fonlgende Resultat.

Zu einer beliebigen gegebenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung von der Form (6), welche die beiden partiellen Ableitungen wirklich enthält und nicht linear in bezug auf dieselben ist, entspricht immer ein reguläres Variationsproblem. Zur Bestimmung des Integranden dieses Problems löst man zunächst die gegebene Differentialgleichung nach einer der partiellen Ableitungen z. B. nach $\frac{\partial W}{\partial x}$ auf, und bestimmt dann die $\frac{\partial W}{\partial y}$ als Funktion von x, y, ϑ mit Hilfe der Gleichung (10), und dazu die $\frac{\partial W}{\partial x}$ als Funktion der x, y, ϑ, und hat den gesuchten Integranden in der Form (11).

Sezt man in (4)

$$\frac{\partial W}{\partial x} = F(x, y;\ 1, p) - p \cdot F_p(x, y;\ 1, p), \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = F_p(x, y;\ 1, p),$$

wobei p statt y' gesetzt und als Funktion der x, y zu betrachten ist, so hat man den Fall des x—Variationsproblems, den Herr F. Paulus, in seiner Abhandlung « *Die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung als Ausganspunkt fur die Umkehrung des Variationsproblems und ihre damit zusamenhängende Bedeutung für die Integration der allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung* » (Math. Zeitschrift, Bd. 25, Heft 2), untersucht hat.

Zur Anwendung es sei gegeben die partielle Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 - 2u(x, y) - 2l = 0,$$

wobei l eine konstante Grösse bedeutet und u eine Funktion von x, y ist. Wir haben zuerst

$$W_1^2 + W_2^2 = 2u(x, y) + 2l;$$

lösen wir diese Gleichung nach W_1 auf, und erhalten

$$W_1 = \sqrt{2u(x, y) + 2l - W_2^2}.$$

Nun finden wir

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{-W_2}{\sqrt{2u(x, y) + 2l - W_2^2}} = -\frac{q}{p},$$

(nach gl. (10)) woraus sich ergibt

$$W_2 = -\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot \sqrt{2u(x, y) + 2l},$$

und

$$W_1 = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot \sqrt{2u(x, y) + 2l}.$$

Imfolgedessen der gesuchte Integrand des entsprechenden Variationsproblems in Parameterdarstellung hat folgende Form:

$$F(x, y;\ x', y') = \sqrt{x'^2 + y'^2} \cdot \sqrt{2u(x, y) + 2l},$$

und das Variationproblem lautet folgendermassen.

Es soll das Integral

$$\int_{P_1}^{P} \sqrt{2u(x, y) + 2l} \cdot ds,$$

zu einem Minimum gemacht werden, und welches das Prinzip der kleinsten Aktion für die Bewegung eines materiellen Punktes in einer Ebene ausdrückt.

O. PERRON (München - Germania)

ÜBER STABILITÄT UND ASYMPTOTISCHES VERHALTEN DER INTEGRALE VON GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND DIFFERENZENGLEICHUNGEN

§ 1.

Man kann es immer als einen Fortschritt der Wissenschaft ansehen, wenn es gelingt, mehrere getrennt nebeneinander herlaufende Probleme unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt zu bringen, so dass sie auch nach der gleichen Methode behandelt werden können. Ich will daher hier zwei zunächst ziemlich verschieden aussehende Probleme aus der Theorie der Differentialgleichungen miteinander in Verbindung bringen und dann auch die zwei entsprechenden Probleme im Gebiet der endlichen Differenzengleichungen behandeln.

Ich erinnere zunächst an den POINCARÉschen Satz über lineare Differentialgleichungen

$$x^{(n)}+f_1(t)x^{(n-1)}+ \dots + f_n(t)x=0 \qquad \left(x^{(\nu)}=\frac{d^\nu x}{dt^\nu}\right),$$

wobei die Funktionen $f_\nu(t)$ etwa für $t\geqq 0$ stetig sind und für $t\to\infty$ endlichen Grenzwerten zustreben:

$$\lim_{t\to\infty} f_\nu(t)=a_\nu.$$

Der Satz sagt aus, dass, wenn die Wurzeln $\varrho_1,\dots,\ \varrho_n$ der Gleichung

$$\varrho^n+a_1\varrho^{n-1}+ \dots + a_n=0$$

lauter verschiedene reelle Teile haben, für jedes Integral $x=x(t)$ ein Index ν existiert derart, dass

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x'}{x}=\varrho_\nu \tag{1}$$

ist. Während POINCARÉ die $f_\nu(t)$ als rationale Funktionen voraussetzen musste, konnte ich den Satz ganz allgemein sicherstellen und konnte weiter zeigen, dass auch umgekehrt zu jeder Wurzel ϱ_ν wirklich Integrale gehören, für welche die Formel (1) gilt. Insbesondere gehört zu der Wurzel mit dem kleinsten reellen Teil *genau ein* Integral, das sogenannte *ausgezeichnete Integral* des Herrn PINCHERLE. Aus (1) folgt sogleich

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log|x|}{t}=R(\varrho_\nu). \tag{2}$$

Sind die reellen Teile der Wurzeln nicht alle voneinander verschieden, so gelten diese Sätze nicht mehr in vollem Umfang. Man kann aber an Stelle der Formel (2) wenigstens noch die folgende beweisen:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log |x|}{t} = R(\varrho_\nu).$$

Analoge Sätze gelten auch für ein System linearer Differentialgleichungen

$$x_\nu' = f_{\nu 1}(t)x_1 + f_{\nu 2}(t)x_2 + \ldots + f_{\nu n}(t)x_n \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei die $f_{\nu\mu}(t)$ für $t \geqq 0$ stetig sind und für $t \to \infty$ endlichen Grenzwerten zustreben:

$$\lim_{t\to\infty} f_{\nu\mu}(t) = a_{\nu\mu}.$$

Das infinitäre Verhalten der Integrale hängt dann ab von den Wurzeln $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho, & a_{12}, \ldots, & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, & a_{nn}-\varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Für jedes Integral ist nämlich der obere Limes

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log (|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|)}{t}$$

gleich dem reellen Teil einer Wurzel ϱ_ν, und umgekehrt gibt es zu jedem ϱ_ν auch wirklich Integrale, für welche der obere Limes gleich $R(\varrho_\nu)$ ist, und zwar gibt es soviel linear unabhängige wie es Wurzeln gibt, deren reeller Teil nicht grösser als $R(\varrho_\nu)$ ist. Sind die reellen Teile alle voneinander verschieden, so lässt sich das infinitäre Verhalten der Integrale noch viel genauer beschreiben, worauf ich aber nicht mehr eingehen will. Jedenfalls erkennt man, dass die Integrale hinsichtlich ihrer Grössenordnung in verschiedene Klassen zerfallen, die den verschiedenen reellen Teilen der Wurzeln ϱ_ν entsprechen.

§ 2.

Nunmehr wende ich mich einer scheinbar ganz anderen Frage zu, nämlich der Stabilitätsfrage. Hier handelt es sich um ein System von *nichtlinearen* Differentialgleichungen

$$x_\nu' = a_{\nu 1}x_1 + \ldots + a_{\nu n}x_n + \varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Dabei sollen die Funktionen φ_ν im Verhältnis zu den linearen Gliedern absolut sehr klein sein; zumeist werden sie als Potenzreihen in Bezug auf die x_μ vorausgesetzt, die mit Gliedern mindestens zweiter Dimension beginnen und eine von t unabhängige Majorante haben. Die $a_{\nu\mu}$ dürfen Funktionen von t sein; doch will ich hier nur den Fall konstanter $a_{\nu\mu}$ ins Auge fassen.

Das System (3) hat die triviale Lösung $x_\nu=0$ und es fragt sich, ob noch andere Integrale vorhanden sind, die für alle hinreichend grossen t absolut unter einer beliebig klein vorgebbaren Schranke bleiben. Wenn *alle* Integrale, deren Anfangswerte (etwa für $t=0$) absolut hinreichend klein sind, diese Eigenschaft haben, so heisst die Lösung $x_\nu=0$ *stabil*; wenn *kein* Integral die besagte Eigenschaft hat, heisst sie *instabil*, und dazwischen liegen noch die verschiedenen Fälle der *bedingten Stabilität*. Welcher Fall vorliegt, hängt ab von den Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho, & a_{12}, \ldots, & a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, & a_{nn}-\varrho \end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

Haben alle Wurzeln einen negativen reellen Teil, so liegt Stabilität vor; haben sie alle einen positiven reellen Teil, so liegt Instabilität vor, während sich die Fälle bedingter Stabilität ergeben, wenn die reellen Teile teils positiv teils negativ sind.

Wir wollen jetzt annahmen, dass genau m Wurzeln, etwa $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$ einen negativen reellen Teil haben. POINCARÉ und LIAPOUNOFF haben, im Fall die Funktionen φ_ν Potenzreihen in Bezug auf die x_μ mit von t unabhängiger Majorante sind, ein Integral nachgewiesen, das im allgemeinen nach Potenzen von

$$b_1 e^{\varrho_1 t},\ b_2 e^{\varrho_2 t}, \ldots,\ b_m e^{\varrho_m t}$$

entwickelbar ist, also m willkürliche Konstanten $b_1, \ldots, b_m$ enthält. Aus dieser Reihenentwicklung ergibt sich, dass eine m-fache Mannigfaltigkeit von Integralen für $t\to\infty$ nach Null strebt und die Integrale zerfallen je nach der Wahl der willkürlichen Konstanten in verschiedene Klassen, die von verschiedener Ordnung klein werden; dabei ist der obere Limes

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log(|x_1|+\ldots+|x_n|)}{t}$$

stets gleich dem reellen Teil einer Wurzel ϱ_ν. Das gleiche hat *Cotton* unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen über die Funktionen φ_ν beweisen können.

Man erkennt die Analogie dieses Sachverhalts mit dem vorhin genannten Satz über Systeme linearer Differentialgleichungen, und in der Tat ist es mir gelungen, für beide Probleme, die man bisher mit ganz verschiedenen Mitteln behandelt hat, eine einheitliche Methode ausfindig zu machen, die zudem in jeder Richtung über das bisher Erreichte hinausführt.

Um mich kürzer ausdrücken zu können, will ich die folgende Terminologie einführen. Wenn die Funktionen φ_ν in einem Bereich der Gestalt

$$|x_1|\leqq a, \ldots,\ |x_n|\leqq a, \qquad t\geqq 0$$

definiert und stetig sind und wenn sie daselbst der Ungleichung

$$|\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)|\leqq K(|x_1|+\ldots+|x_n|)$$

genügen, wo K eine positive Konstante ist, so sage ich, die Funktionen erfüllen die Bedingung $\mathfrak{A}$. Wenn es zu jeder positiven Zahl ε zwei positive Zahlen δ_ε und T_ε derart gibt, dass im Bereich

$$|x_1| \leqq \delta_\varepsilon, \ldots, |x_n| \leqq \delta_\varepsilon, \qquad t \geqq T_\varepsilon$$

stets die Ungleichungen

$$|\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \varepsilon(|x_1| + \ldots + |x_n|)$$

gelten, so sage ich, die Funktionen φ_ν erfüllen die Bedingung $\mathfrak{B}$. Die Bedingung $\mathfrak{B}$ ist z. B. erfüllt, wenn die φ_ν lineare homogene Funktionen der x_μ sind, deren Koeffizienten für $t \to \infty$ nach Null streben; das führt auf den POINCARÉschen Satz über lineare Differentialgleichungen. Die Bedingung $\mathfrak{B}$ ist aber auch erfüllt, wenn die Beziehung

$$\frac{\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)}{|x_1| + \ldots + |x_n|} \to 0, \qquad \text{für } |x_1| + \ldots + |x_n| \to 0$$

gleichmässig für alle hinreichend grossen Werte von t statthat; das führt auf den Fall der Stabilitätsfrage.

Wenn die Funktionen φ_ν der weiteren Forderung genügen, dass zu jedem positiven ε zwei Zahlen δ_ε, T_ε existieren derart, dass im Bereich

$$|x_1'| \leqq \delta_\varepsilon, \ |x_1''| \leqq \delta_\varepsilon, \ldots, |x_n'| \leqq \delta_\varepsilon, \ |x_n''| \leqq \delta_\varepsilon, \qquad t \geqq T_\varepsilon$$

stets die Ungleichungen

$$|\varphi_\nu(t, x_1', \ldots, x_n') - \varphi_\nu(t, x_1'', \ldots, x_n'')| \leqq \varepsilon(|x_1' - x_1''| + \ldots + |x_n' - x_n''|)$$

gelten, so sage ich, sie erfüllen die Bedingung $\mathfrak{C}$. In dem erwähnten Fall linearer homogener φ_ν ist z. B. die Bedingung $\mathfrak{C}$ erfüllt.

Mit diesen Begriffsbildungen kann nun z. B. der folgende Satz bewiesen werden:

Wenn in dem Differentialgleichungssystem (3) *die Funktionen* φ_ν *die Bedingungen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *erfüllen und wenn die Wurzeln* $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ *der Gleichuug* (4) *nicht lauter positive reelle Teile haben, so gibt es zu jedem etwa vorhandenen Integralsystem* x_ν, *für welches*

$$\lim_{t \to \infty} x_1 = 0, \ldots, \lim_{t \to \infty} x_n = 0$$

ist, einen Index l *derart, dass*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log(|x_1| + \ldots + |x_n|)}{t} = R(\varrho_l) \leqq 0$$

ist. Wenn die Funktionen φ_ν *ausserdem die Bedingung* $\mathfrak{C}$ *erfüllen, so gibt es auch umgekehrt zu jedem Index* l, *für den* $R(\varrho_l) < 0$ *ist, wirklich Integralsysteme der vorbezeichneten Art, und zwar bilden diejenigen für welche*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log(|x_1| + \ldots + |x_n|)}{t} \leqq -r < 0$$

ist, eine Schar mit genau h willkürlichen Konstanten, wo h die Anzahl derjenigen Wurzeln ϱ_ν bezeichnet, für die $R(\varrho_\nu) \leqq -r$ ist.

Wenn über die Wurzeln ϱ_ν weitere Voraussetzungen gemacht werden, z. B. dass sie lauter verschiedene reelle Teile haben, lässt sich das asymptotische Verhalten der Integrale noch wesentlich genauer beschreiben, worauf ich aber nicht mehr eingegen will. Ebenso wenig kann ich auf den Beweis hier eingehen, der ausführlich in der Mathematischen Zeitschrift Band 29 soeben erschienen ist.

§ 3.

Nunmehr wende ich mich zu den analogen Fragestellungen über endliche Differenzengleichungen, wobei die unabhängig Variable t auf die ganzzahligen Werte 0, 1, 2,.... beschränkt werden soll.

Zunächst gilt für eine lineare Differenzengleichung

$$x(t+n)+f_1(t)x(t+n-1)+ \ldots. +f_n(t)x(t)=0,$$

deren Koeffizienten gegen endliche Grenzwerte

$$\lim_{t\to\infty} f_\nu(t)=a_\nu$$

streben, der POINCARÉsche Satz, dass, wenn die Wurzeln $\varrho_1,\ldots.,\ \varrho_n$ der Gleichung

$$\varrho^n+a_1\varrho^{n-1}+ \ldots. +a_n=0$$

lauter verschiedene absolute Beträge haben, für jede Lösung $x(t)$ ein Index ν existiert derart, dass

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t+1)}{x(t)}=\varrho_\nu \tag{5}$$

ist. Umgekehrt gibt es auch zu *jeder* Wurzel ϱ_ν wirklich Lösungen, für welche die Formel (5) gilt. Insbesondere gehört zu der absolut kleinsten Wurzel *genau ein* Integral, das *ausgezeichnete Integral* des Herrn PINCHERLE. Aus (5) folgt

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{|x(t)|}=|\varrho_\nu|. \tag{6}$$

Sind die absoluten Beträge der Wurzeln nicht alle voneinander verschieden, so gelten diese Sätze nicht mehr in vollem Umfang; man kann aber an Stelle der Formel (6) wenigstens noch die folgende nachweisen:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|x(t)|}=|\varrho_\nu|. \tag{7}$$

Analoge Sätze gelten auch wieder für ein System linearer Differenzengleichungen

$$x_\nu(t+1)=f_{\nu 1}(t)x_1(t)+ \ldots. +f_{\nu n}(t)x_n(t) \qquad (\nu=1, 2,\ldots., n),$$

wenn die Koeffizienten gegen endliche Grenzwerte

$$\lim_{t\to\infty} f_{\nu\mu}(t) = a_{\nu\mu}$$

streben. Für jedes Integral ist nämlich der obere Limes

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|x_1(t)| + \ldots + |x_n(t)|}$$

gleich dem absoluten Betrag einer Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho, & a_{12}, \ldots, & a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, & a_{nn}-\varrho \end{vmatrix} = 0,$$

und umgekehrt gibt es zu *jeder* Wurzel ϱ_ν auch wirklich Integrale, für welche der obere Limes gleich $|\varrho_\nu|$ ist, und zwar gibt es soviel linear unabhängige wie es Wurzeln gibt, deren absoluter Betrag nicht grösser als $|\varrho_\nu|$ ist. Sind die absoluten Beträge alle voneinander verschieden, so lässt sich das infinitäre Verhalten der Integrale noch viel genauer beschreiben, worauf ich aber wieder nicht eingehen will. Jedenfalls zerfallen die Integrale hinsichtlich ihrer Grössenordnung wieder in verschiedene Klassen, die den verschiedenen absoluten Beträgen der Wurzeln ϱ_ν entsprechen.

§ 4.

Nunmehr wende ich mich auch der Stabilitätsfrage zu, die bei Differenzengleichungen noch kaum beachtet worden ist. Dabei handelt es sich um ein System von *nichtlinearen* Differenzengleichungen

$$x_\nu(t+1) = a_{\nu 1}x_1(t) + \ldots + a_{\nu n}x_n(t) + \varphi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

wo die Funktionen φ_ν im Vergleich zu den linearen Gliedern wieder absolut sehr klein sind und die $a_{\nu\mu}$ Funktionen von t sein dürfen, aber hier wieder als Konstanten angenommen werden sollen. Das System hat dann die triviale Lösung $x_\nu(t) = 0$, und es fragt sich, ob noch andere Lösungen vorhanden sind, die für alle hinreichend grossen t absolut unter einer beliebig klein vorgebbaren Schranke bleiben. Wenn *alle* Integrale, deren Anfangswerte $x_\nu(0)$ absolut hinreichend klein sind, diese Eigenschaft haben, so soll die Lösung $x_\nu(t) = 0$ *stabil* heissen; wenn *kein* Integral die besagte Eigenschaft hat, soll sie *instabil* heissen, und dazwischen liegen wieder die verschiedenen Fälle der *bedingten Stabilität.*

Welcher Fall vorliegt, hängt wieder ab von den Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho, & a_{12}, \ldots, & a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, & a_{nn}-\varrho \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Sind alle Wurzeln absolut kleiner als 1, so liegt Stabilität vor, sind alle absolut grösser als 1, so liegt Instabilität vor, während sich die Fälle bedingter Stabilität ergeben, wenn die absoluten Beträge teils kleiner teils grösser als 1 sind. Sind genau m Wurzeln, etwa $\varrho_1,\ldots,\varrho_m$ absolut kleiner als 1, so lässt sich zeigen, dass eine m-fache Mannigfaltigkeit von Integralen für $t\to\infty$ gegen Null strebt, und die Integrale zerfallen je nach der Wahl der willkürlichen Konstanten in verschiedene Klassen, die von verschiedener Ordnung klein werden. Dabei ist der obere Limes

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\sqrt[t]{|x_1(t)|+\ldots+|x_n(t)|}$$

stets gleich einem $|\varrho_\nu|$.

Diese Sätze, die bis jetzt nur unter sehr speziellen Annahmen über die Funktionen φ_ν von LATTÈS bewiesen worden sind, haben wieder eine auffallende Ähnlichkeit mit den erwähnten Sätzen über lineare Differenzengleichungssysteme, und in der Tat ist es mir auch hier gelungen, beide Probleme nach einer einheitlichen Methode zu behandeln und weiterzuführen. Ich führe nämlich genau wie vorhin für die Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1,\ldots, x_n)$ wieder die Bedingungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ein, mit dem Unterschied, dass die Variable t auf die ganzzahligen Werte 0, 1, 2,.... beschränkt wird und dass bei der Bedingung $\mathfrak{A}$ die Forderung der Stetigkeit wegfällt. Im übrigen bleiben aber die Bedingungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ unverändert, und man kann dann z. B. den folgenden Satz beweisen:

Wenn in dem Differenzengleichungsystem (8) *die Funktionen* $\varphi_\nu(t, x_1,\ldots, x_n)$ *die Bedingungen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *erfüllen und wenn die Wurzeln der Gleichung* (9) *nicht sämtlich grösser als* 1 *sind, so gibt es zu jeder für hinreichend grösse* t, *etwa für* $t\geqq T$, *existierenden Lösung* $x_\nu(t)$, *für welche*

(A) $$|x_1(t)|+\ldots+|x_n(t)|>0 \qquad \text{für } t\geqq T,$$

(B) $$\lim_{t\to\infty} x_1(t)=0,\ldots,\ \lim_{t\to\infty} x_n(t)=0$$

ist, einen Index l *derart, dass*

(C) $$\overline{\lim_{t\to\infty}}\sqrt[t]{|x_1(t)|+\ldots+|x_n(t)|}=|\varrho_l|\leqq 1$$

ist. Wenn die Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1,\ldots, x_n)$ *ausserdem auch die Bedingung* $\mathfrak{C}$ *erfüllen, so gibt es auch umgekehrt zu jedem Index* l, *für den* $|\varrho_l|<1$ *ist, wirklich Lösungen, für welche die Beziehungen* (B) *und* (C) *und im Fall* $\varrho_l\neq 0$ *auch* (A) *gelten. Dabei bilden diejenigen Lösungen, für welche*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\sqrt[t]{|x_1(t)|+\ldots+|x_n(t)|}\leqq r<1$$

ist, eine Schar mit genau h *willkürlichen Konstanten, wo* h *die Anzahl derjenigen Wurzeln* ϱ_ν *bezeichnet, für die* $|\varrho_\nu|\leqq r$ *ist.*

Wenn über die Wurzeln ϱ_ν weitere Voraussetzungen gemacht werden, z. B. dass sie lauter verschiedene absolute Beträge haben, lässt sich das asymptotische Verhalten der Integrale noch wesentlich genauer beschreiben. Aber darauf sowie auf die Beweisführung, die ausführlich im Journal für reine und angewandte Mathematik erscheinen wird, will ich hier nicht mehr eingehen.

R. COURANT (Göttingen - Germania)

ÜBER PARTIELLE DIFFERENZENGLEICHUNGEN

Der Vortrag behandelte im wesentlichen Gegenstände, welche den Inhalt einer inzwischen erschienenen ausführlichen Publikation « Ueber die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik » von R. COURANT, K. FRIEDRICHS und H. LEWY, « Math. Annalen », Bd. 100, p. 32-74 bilden. Es handelt sich dabei um die Theorie der partiellen linearen Differenzengleichungen, welche den klassischen linearen Differentialgleichungen der mathematischen Physik entsprechen; weiter im wesentlichen um die Frage, ob und in welcher Art die Lösungen der Differentialgleichungsprobleme — Randwert-, Eigenwert- und Anfangswertprobleme — sich als Limites der Lösungen der entsprechenden Differenzengleichungsprobleme auffassen lassen. Die Untersuchung zeigt, dass bei Randwert- und Eigenwertproblemen des elliptischen Typus dieses stets der Fall ist, dass sogar die Tatsache der Approximation für die sämtlichen noch in Frage kommenden Differentialquotienten bzw. Differenzenquotienten erster und höherer Ordnung besteht; bei den hyperbolischen Anfangswertproblemen liegt jedoch Konvergenz dann und nur dann vor, wenn für die Maschen des der Differenzengleichung zugrunde gelegten Gitters gewisse Ungleichungen bestehen, welche durch die Lage der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen bestimmt werden.

Der Vortrag ging ausserdem noch etwas ausführlicher auf die Beziehungen der Differenzengleichungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung ein, genauer gesagt, zu dem Problem der Irrfahrten in einem Gitter (1). Ueber einige dieser Ausführungen, die in der oben erwähnten Publikation keinen Platz gefunden haben, soll an dieser Stelle berichtet werden.

---

(1) Das Irrfahrtenproblem im Gitter (« Irrfahrten im Strassennetz ») und sein Zusammenhang mit Grundproblemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist zuerst von G. POLYA hervorgehoben und in mehreren Abhandlungen behandelt worden:

G. POLYA: 1) *Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betr. die Irrfahrt im Strassennetz.* Math. Ann. 84; 2) *Anschauliche und elementare Darstellungen der Lexis'sch-Dispersionstheorie.* Zs. f. schweiz. Statistik u. Volkswirtsschaftslehre 55; 3) *Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die « Irrfahrt ».* Mitt. d. physikal. Gesellsch. Zürich 19; 4) *Anschaulich experimentelle Herleitung der Gauss'schen Fehlerkurve.* Zs. f. math. nat. Unterr. 52.

Wir legen unseren Betrachtungen ein kubisches Punktgitter mit der Maschenweite h im x, y, z—Raume zugrunde. Etwa das System aller Punkte mit den Koordinaten $x=ih$, $y=jh$, $z=kh$ mit ganzzahligen i, j, k. Aus der Gesamtheit dieser Gitterpunkte greifen wir einen « Bereich » G heraus, von dem je zwei Punkte sich durch eine Kette von Gitterpunkten mit jeweiligem Abstand h verbinden lassen. Jeden Punkt von G, dessen Nachbarpunkte ebenfalls zu G gehören, nennen wir inneren Punkt, jeden anderen Randpunkt von G. In diesem Gittergebiet G betrachten wir Funktionen des Ortes $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$,.... und verwenden für ihre Differenzenquotienten die folgenden Abkürzungen:

$$\frac{1}{h}[u(x+h, y, z)-u(x, y, z)]=u_x,\quad \frac{1}{h}[u(x, y, z)-u(x-h, y, z)]=u_{\bar{x}}$$

$$u_{x\bar{x}}=u_{\bar{x}x}=\frac{1}{h^2}[u(x+h, y, z)-2u(x, y, z)+u(x-h, y, z)]$$

u. s. w.

Ebenso werden wir unsere Funktionen noch in Abhängigkeit von einer dritten « Zeitvariablen » t betrachten, deren Werte ebenfalls ganzzahlige Vielfache

$$t=n\tau$$

einer festen Zahl τ sein sollen.

Wir denken uns die Gitterpunkte als Träger einer Substanz. Im Punkte x, y, z sei zur Zeit $t=n\tau$ die Menge $f(x, y, z, t)$ vorhanden, und wir stellen uns vor, dass im Zeitpunkte $t=n\tau$ ein Substanzaustausch zwischen den benachbarten Gitterpunkten derart vor sich geht, dass jeder innere Gitterpunkt von G seine ganze Substanzmenge gleichmässig an die sämtlichen Nachbarpunkte verteilt. In den Randpunkten von G seien besondere Randbedingungen vorgeschrieben, z. B. soll $f(x, y, z, t)$ dort vorgebene von der Zeit unabhängige Werte besitzen. Die Erfüllung einer solchen Bedingung können wir uns etwa dadurch gewährleistet denken, dass von aussen her die notwendige Nachlieferung bzw. Absorption von Substanz erfolgt. Der Anfangszustand der Zeit $t=0$ endlich sei durch eine vorgegebene Gitterfunktion $\varphi(x, y, z)$ charakterisiert.

Unsere Verteilungsfunktion $f(x, y, z, t)$ genügt alsdann einer Differenzengleichung der Form

$$\frac{h^2}{6}\Delta f=\tau f_t$$

wobei zur Abkürzung

$$\Delta f=f_{x\bar{x}}+f_{y\bar{y}}+f_{z\bar{z}}$$

gesetzt ist.

Für einen in einem zwei- oder eindimensionalen Gitter sich abspielenden analogen Austauschprozess ergibt sich

$$\frac{h^2}{4}(f_{x\bar{x}}+f_{y\bar{y}})=\tau f_t$$

bzw.

$$\frac{h^2}{2}f_{x\bar{x}}=\tau f_t.$$

Die linken Seiten dieser Differenzengleichungen bezeichnen dabei den Über-

schuss des arithmetischen Mittels aus den Funktionswerten der Nachbarpunkte über den Funktionswert im betrachteten Gitterpunkt selbst.

Stellen wir die Randbedingung

$$f(x, y, z, t)=0$$

und als Anfangsbedingung die, dass $f(x, y, z, t)$ in einem bestimmten Gitterpunkte Q mit den Koordinaten ξ, η, ζ zur Zeit $t=0$ den Wert 1, in allen anderen Punkten aber den Wert Null besitzt, so erweist sich die betreffende Lösung $w(x, y, z; \xi, \eta, \zeta; t)$ als die Wahrscheinlichkeit, vom Punkte Q ausgehend in n Schritten den Punkt P zu erreichen, ohne dass dabei der Rand des Gebietes getroffen wird. Die unendliche Summe

$$H(P, Q)=\sum_{n=0}^{\infty} w(P, Q, n)$$

— mit $w(P, Q, n)$ bezeichnen wir abkürzend die von den Koordinaten x, y, z bzw. ξ, η, ζ der Punkte P bzw. Q abhängige Gitterfunktion $w(x, y, z; \xi, \eta, \zeta; t)$ — stellt alsdann die mathematische Hoffnung dar, bei einer Irrfahrt, welche endigt, sobald der Rand von G getroffen wird, den Punkt P einmal zu berühren. Diese Funktion $H(P, Q)$ genügt der Differenzengleichung

$$\Delta H=0 \qquad \text{wenn } P \neq Q$$

und

$$\Delta H=-\frac{6}{h^2} \qquad \text{wenn } P=Q$$

Wir bezeichnen sie in Analogie zu dem bekannten Ausdruck bei Differentialgleichungen als Greensche Funktion.

Im folgenden wollen wir Wahrscheinlichkeitsfunktionen $w(P, Q, n)$ und mathematische Hoffnungen $H(P, Q)$ explizite für den Fall bestimmen, dass das zugrundegelegte Gittergebiet ein Quadrat bzw. ein Kubus ist, und der Ausgangspunkt Q der Irrfahrt mit dem Mittelpunkt dieser Gebiete zusammenfällt. Wir werden anschliessend durch Grenzübergang Darstellungen für jene Funktionen bei einer im unbegrenzten Gitter verlaufenden Irrfahrt gewinnen.

Geht man mit dem Ansatz

$$f(P, t)=u(P)\cdot\varphi(t)$$

in die Differenzengleichung

$$\frac{h^2}{6}\Delta f=\tau f_t$$

ein, so wird man auf Lösungen der Form

$$f(P, t)=u(P)(1-\lambda)^n$$

geführt; hierbei genügt die Funktion $u(P)$ der Differenzengleichung

$$\frac{h^2}{6}\Delta u+\lambda u=0.$$

Insbesondere ergeben sich für die Funktionen $u(P)$ Eigenfunktionen $u_\nu(P)$ der Gleichung

$$\frac{h^2}{6}\Delta u+\lambda u=0,$$

wenn wir solche Lösungen suchen, die am Rande verschwinden. Diese Eigenfunktionen denken wir uns so normiert, dass $h^3\sum u_\nu^2(P)=1$ wird, wobei die Summe über alle inneren Punkte zu erstrecken ist.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeitsfunktion $w(P, Q, t)$ lässt sich nun durch eine lineare Kombination

$$\sum_\nu c_\nu u_\nu(P)(1-\lambda_\nu)^n$$

dieser speziellen Lösungen darstellen; man findet durch Benutzung der Anfangsbedingungen zur Zeit $t=0$ leicht

$$c_\nu=h^3 u_\nu(Q)$$

also

$$w(P, Q, t)=h^3\sum_\nu u_\nu(P)u_\nu(Q)(1-\lambda_\nu)^n$$

und — da sich leicht ergibt, dass

$$|1-\lambda_\nu|<1$$

gilt —

$$H(P, Q)=h^3\sum_\nu \frac{u_\nu(P)\,u_\nu(Q)}{\lambda_\nu}$$

Genau analog gebildete Ausdrücke ergeben sich für das ein- und zweidimensionale Gitter.

I. Das eindimensionale Gitter.

Das Gittergebiet G bestehe aus den Punkten

$$x=ih; \qquad i=0, \pm1,\ldots, \pm N.$$

Dann sind die Eigenwerte λ_ν der Differenzengleichung

$$\frac{h^2}{2}u_{x\bar{x}}+\lambda u=0$$

durch die $2N-1$ Zahlen

$$\lambda_\nu=2\sin^2\left(\frac{2\nu+1}{4N}\pi\right); \quad \nu=-N+1,\ldots, 0, 1,\ldots, N-1.$$

und die zugehörigen Eigenfunktionen durch

$$u_\nu(x)=\frac{1}{\sqrt{Nh}}\cos\left(\frac{2\nu+1}{2N}\pi i\right)$$

gegeben. Wahrscheinlichkeit und mathematische Hoffnung bei einer vom Nullpunkte ausgehenden Irrfahrt lassen sich also durch die folgenden Summen bestimmen:

$$w(x, t)=\frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{2N-1}\cos\left(\frac{2\nu+1}{2N}i\right)\cos^n\left(\frac{2\nu+1}{2N}\pi\right)$$

$$H(x)=\frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{2N-1}\frac{\cos\left(\frac{2\nu+1}{2N}i\right)}{2\sin^2\left(\frac{2\nu+1}{4N}\pi\right)}$$

Lassen wir nun N über alle Grenzen wachsen, so gehen die Summen in die entsprechenden Integrale über; es ergibt sich zunächst

$$w(x, t) = \int_0^1 \cos(\pi\xi i) \cos^n(\pi\xi) d\xi$$

und, wenn wir den Grenzübergang an der Differenz $H(0) - H(x)$ vollziehen — der entsprechende Prozess auf $H(x)$ angewandt, führt nicht auf eine konvergente Folge —

$$H(0) - H(x) = \int_0^1 \frac{1 - \cos(\pi\xi i)}{2 \sin^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)} d\xi$$

II. Das zweidimensionale Gitter.

Das Gebiet G möge hier die Punkte

$$x = ih; \qquad i = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$$
$$y = jk; \qquad j = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$$

umfassen; der Ausgangspunkt der Irrfahrt sei der Nullpunkt. Es sind für die Randbedingung $u = 0$ die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Differenzengleichung

$$\frac{h^2}{4}(u_{x\bar{x}} + u_{y\bar{y}}) + \lambda u = 0$$

zu ermitteln; diese sind

$$\lambda_{\nu\mu} = \sin^2\left(\frac{2\nu+1}{4N}\pi\right) + \sin^2\left(\frac{2\mu+1}{4N}\pi\right)$$
$$u_{\nu\mu} = \frac{1}{Nh} \cos\left(\frac{2\nu+1}{2N}\pi i\right) \cos\left(\frac{2\mu+1}{2N}\pi j\right).$$

Hier ergeben sich also die Formeln

$$w(x, y, t) = \frac{1}{2^n N^2} \sum_{\nu=0}^{2N-1} \sum_{\mu=0}^{2N-1} \cos\left(\frac{2\nu+1}{2N}\pi i\right) \cos\left(\frac{2\mu+1}{2N}\pi j\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{2\nu+1}{2N}\pi\right) + \cos\left(\frac{2\mu+1}{2N}\pi\right)\right]^n$$

$$H(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_{\nu=0}^{2N-1} \sum_{\mu=0}^{2N-1} \frac{\cos\left(\frac{2\nu+1}{2N}\pi i\right) \cos\left(\frac{2\mu+1}{2N}\pi j\right)}{\sin^2\left(\frac{2\nu+1}{4N}\pi\right) + \sin^2\left(\frac{2\mu+1}{4N}\pi\right)},$$

und entsprechend für das unendliche Gitter

$$w(x, y, t) = \frac{1}{2^n} \int_0^1 \int_0^1 \cos(\pi\xi i) \cos(\pi\eta j) [\cos\pi\xi + \cos\pi\eta]^n d\xi d\eta$$

$$H(0, 0) - H(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1 - \cos(\pi\xi i) \cos(\pi\eta j)}{\sin^2\frac{\pi\xi}{2} + \sin^2\frac{\pi\eta}{2}} d\xi d\eta.$$

III. Das dreidimensionale Gitter.

In dem würfelförmigen Gittergebiet

$$\begin{aligned} x&=ih \\ y&=jh \\ z&=kh \end{aligned} \qquad i, j, k=0, \pm 1, \ldots, \pm N$$

besitzt die Differenzengleichung

$$\frac{h^3}{6}(u_{x\bar{x}}+u_{y\bar{y}}+u_{z\bar{z}})+\lambda u=0$$

die Eigenwerte

$$\lambda_{\nu\mu\varrho}=\frac{2}{3}\left[\sin^2\left(\frac{2\nu+1}{4N}\pi\right)+\sin^2\left(\frac{2\mu+1}{4N}\pi\right)+\sin^2\left(\frac{2\varrho+1}{4N}\pi\right)\right]$$

und die Eigenfunktionen

$$u_{\nu\mu\varrho}=\frac{1}{(Nh)^{\frac{3}{2}}}\cos\left(\frac{2\nu+1}{2N}\pi i\right)\cos\left(\frac{2\mu+1}{2N}\pi j\right)\cos\left(\frac{2\varrho+1}{2N}\pi k\right).$$

Daher ist

$$w(x, y, z, t)=\frac{1}{3^n N^3}\sum_{\nu=0}^{2N-1}\sum_{\mu=0}^{2N-1}\sum_{\varrho=0}^{2N-1}\cos\left(\frac{2\nu+1}{2N}\pi i\right)\cos\left(\frac{2\mu+1}{2N}\pi j\right)\cos\left(\frac{2\varrho+1}{2N}\pi k\right)\cdot$$
$$\cdot\left[\cos\left(\frac{2\nu+1}{2N}\pi\right)+\cos\left(\frac{2\mu+1}{2N}\pi\right)+\cos\left(\frac{2\varrho+1}{2N}\pi\right)\right]^n$$

und

$$H(x, y, z)=\frac{3}{2N^3}\sum_{\nu=0}^{2N-1}\sum_{\mu=0}^{2N-1}\sum_{\varrho=0}^{2N-1}\frac{\cos\left(\frac{2\nu+1}{2N}\pi i\right)\cos\left(\frac{2\mu+1}{2N}\pi j\right)\cos\left(\frac{2\varrho+1}{2N}\pi k\right)}{\sin^2\left(\frac{2\nu+1}{2N}\pi i\right)+\sin^2\left(\frac{2\mu+1}{2N}\pi j\right)+\sin^2\left(\frac{2\varrho+1}{2N}\pi k\right)}.$$

Im unendlichen Gitter gilt

$$w(x, y, z, t)=\frac{1}{3^n}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\cos(\pi\xi i)\cos(\pi\eta j)\cos(\pi\zeta k)[\cos(\pi\xi)+$$
$$+\cos(\pi\eta)+\cos(\pi\zeta)]^n d\xi d\eta d\zeta$$

$$H(x, y, z)=\frac{3}{2}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{\cos(\pi\xi i)\cos(\pi\eta j)\cos(\pi\zeta k)}{\sin^2\frac{\pi\xi}{2}+\sin^2\frac{\pi\eta}{2}+\sin^2\frac{\pi\zeta}{2}}d\xi d\eta d\zeta.$$

Die Lösung des Irrfartenproblems im unendlichen Gitter lässt sich nun auch auf kombinatorischem Wege gewinnen. Die Wahrscheinlichkeit, in n Schritten zum Punkte P zu gelangen, ist offenbar gleich der Anzahl der zu diesem Punkte in n Schritten hinführenden Wege dividiert durch die Anzahl sämtlicher aus n Schritten bestehenden Wege. Es ergibt sich so

$$w(x, t)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n+i}{2}}$$

bzw.

$$w(x, y, t)=\frac{1}{4^n}\binom{n}{\frac{n+i+j}{2}}\binom{n}{\frac{n+i-j}{2}}$$

bzw.

$$w(x, y, z, t)=\frac{1}{6^n}\binom{n}{\frac{n+i+j+k}{2}}\binom{n}{\frac{n+i+j-k}{2}}\binom{n}{\frac{n+i-j-k}{2}};$$

wenn $n+i$, bzw. $n+i+j$, bzw. $n+i+j+k$ ungerade ist, so ist die rechte Seite gleich Null zu setzen. Da die Lösung unseres Problems eindeutig ist, müssen diese Ausdrücke mit den oben gefundenen Integralen übereinstimmen. Wir erhalten also die folgenden Identitäten

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n+i}{2}} = \int_0^1 \cos(\pi\xi i)\cos^n(\pi\xi)\,d\xi$$

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n+i+j}{2}}\binom{n}{\frac{n+i-j}{2}} = \int_0^1\int_0^1 \cos(\pi\xi i)\cos(\pi\eta j)[\cos\pi\xi+\cos\pi\eta]^n\,d\xi\,d\eta$$

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n+i+j+k}{2}}\binom{n}{\frac{n+i+j-k}{2}}\binom{n}{\frac{n+i-j-k}{2}} = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \cos(\pi\xi i)\cos(\pi\eta j)\cos(\pi\zeta k)\cdot$$
$$\cdot[\cos\pi\xi+\cos\pi\eta+\cos\pi\zeta]^n\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Die mathematische Hoffnung $H(P, 0)$ vom Nullpunkte aus einmal einen Punkt P zu berühren stellt, sich mit Hilfe der direkt gefundenen Wahrscheinlichkeit durch die unendliche Summe dar

$$H(P, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n+i}{2}}$$

bzw.

$$H(P, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}\binom{n}{\frac{n+i+j}{2}}\binom{n}{\frac{n+i-j}{2}}$$

bzw.

$$H(P, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n}\binom{n}{\frac{n+i+j+k}{2}}\binom{n}{\frac{n+i+j-k}{2}}\binom{n}{\frac{n+i-j-k}{2}}$$

Vergleichen wir mit den früher gefundenen Integralen, so ergeben sich die Relationen

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left\{\binom{n}{\frac{n}{2}}-\binom{n}{\frac{n+i}{2}}\right\} = \int_0^1 \frac{1-\cos(\pi\xi i)}{2\sin^2\frac{\pi\xi}{2}}\,d\xi$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\left\{\binom{n}{\frac{n}{2}}^2-\binom{n}{\frac{n+i+j}{2}}\binom{n}{\frac{n+i-j}{2}}\right\} = \int_0^1\int_0^1 \frac{1-\cos(\pi\xi i)\cos(\pi\eta j)}{\sin^2\frac{\pi\xi}{2}+\sin^2\frac{\pi\eta}{2}}\,d\xi\,d\eta$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6^n}\binom{n}{\frac{n+i+j+k}{2}}\binom{n}{\frac{n+i+j-k}{2}}\binom{n}{\frac{n+i-j-k}{2}} =$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{\cos(\pi\xi i)\cos(\pi\eta j)\cos(\pi\zeta k)}{\sin^2\frac{\pi\xi}{2}+\sin^2\frac{\pi\eta}{2}+\sin^2\frac{\pi\zeta}{2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

O. A. SMITH (Birkeród - Danimarca)

REZIPROKE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND DIFFERENZENGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

Beim zweiten skandinavischen Matematikerkongres in Kopenhagen 1911 habe ich den folgenden Satz dargelegt und bewiesen:

Ist die Differentialgleichung gegeben

$$(1) \qquad (a_2t^2+a_1t+a_0)J^{(2)}+(b_2t^2+b_1t+b_0)J^{(1)}+(c_2t^2+c_1t+c_0)J=0$$

und betrachtet man folgendes Integral

$$y=\int_{\alpha}^{\beta} e^{tx}J\Phi(t)dt$$

wo α und β Wurzeln in der Gleichung sind

$$a_2t^2+a_1t+a_0=0$$

und

$$\Phi(t)=(t-\alpha)^A(t-\beta)^B e^{a_2t}$$

wo

$$A=\frac{(a_1-1)\alpha+(a_0+\beta)+a_2\alpha^2}{\alpha-\beta}$$

$$B=\div\frac{(a_1-1)\beta+(a_0+\alpha)+a_2\beta^2}{\alpha-\beta}$$

wird y durch folgende Differentialgleichung zu bestimmen sein

$$(2) \qquad (a_2x^2+b_2x+c_2)\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1x^2+b_1x+c_1)\frac{dy}{dx}+(a_0x^2+b_0x+c_0)y=0.$$

Des einfachen Verschiebungsgesetzes halber, nach welchem (2) aus dem (1) gebildet ist, habe ich diese Differentialgleichungen reziproke genannt.

Man erkennt unmittelbar, dass die entsprechende Transformation auf (2) angewandt, in (1) hinüberführt.

Ein völlig entsprechender Satz gilt, wenn die Wurzeln zusammen fallen.

Ich werde jezt genauer auseinandersetzen, dass zwischen den Differentialgleichungen eines gewissen bestimmten Typus und den Differenzengleichungen zweiter Ordnung ein entsprechender Satz besteht.

Zu diesem Zwecke werden wir die folgende Differentialgleichung betrachten:

$$f(t)J^{(2)}+\varphi(t)J^{(1)}+\psi(t)J=0,$$

wo $f(t)$, $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ in einem gewissen gemeinschaftlichen Arealkontinuum Funktionen von t allein sein.

Wir betrachten jetzt folgendes Integral

$$y(x)=\int_{\gamma}^{\delta} e^{tx}J\cdot\Phi(t)dt$$

und wünschen dann die Differenzengleichung zu finden, die $y(x)$ befriedigt, in dem wir über $\Phi(t)$ nebst γ und δ, welche nicht x enthalten, in der Weise, dass die gesuchte Differenzengleichung möglichst einfach wird. Zu diesem Zwecke gehen wir von der Identität aus

$$(e^{t\omega}-1)^2=(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)+(\alpha+\beta)(e^{t\omega}-1)-\alpha\beta$$

und finden dann sofort

$$\Delta_\omega^2 y(x)=\frac{\alpha+\beta}{\omega}\Delta_\omega y(x)-\frac{\alpha\beta}{\omega^2}y(x)+\frac{1}{\omega^2}\int_{\gamma}^{\delta} e^{tx}(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)J\cdot\Phi(t)dt,$$

gebraucht man teilweise Integration, bekommt man

$$\begin{aligned}\int_{\gamma}^{\delta} e^{tx}J\Phi(t)(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)dt &= \left[\frac{e^{tx}}{x}J\cdot\Phi(t)(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)\right]_{\gamma}^{\delta}\div\\ &\div\frac{1}{x}\int_{\gamma}^{\delta} e^{tx}J^{(1)}\Phi(t)(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)dt-\\ &-\frac{1}{x}\int_{\gamma}^{\delta} e^{tx}J\Phi^{(1)}(t)(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)dt-\\ &-\frac{\omega}{x}\int_{\gamma}^{\delta} e^{tx}J\Phi(t)e^{t\omega}(e^{t\omega}-1-\alpha)dt-\frac{\omega}{x}\int_{\gamma}^{\delta} e^{tx}J\Phi(t)e^{t\omega}(e^{t\omega}-1-\beta)dt.\end{aligned}$$

Wird nun der Integrationsweg zwischen $\frac{\log(1+\alpha)}{\omega}$ und $\frac{\log(1+\beta)}{\omega}$ gelegt, bekommt man

$$\begin{aligned}\Delta_\omega^2 y(x)=\frac{\alpha+\beta}{\omega}\Delta_\omega y(x)-\frac{\alpha\beta}{\omega^2}y(x)-\frac{2}{\omega x}y(x+2\omega)+\frac{\alpha+\beta+2}{\omega x}y(x+\omega)\div\\ \div\frac{1}{\omega^2 x}\int_{\gamma}^{\delta} e^{tx}J^{(1)}\Phi(t)(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)dt-\\ -\frac{1}{\omega^2 x}\int_{\gamma}^{\delta} e^{tx}J\Phi^{(1)}(t)(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)dt.\end{aligned}$$

Wird auf das erste der obenerwähnten Integrale wieder teilweise Integration angewandt und setzt man dieses in die Gleichung ein, bekommt man

$$\Delta_\omega^2 y(x) = \frac{\alpha+\beta}{\omega}\Delta_\omega y(x) - \frac{\alpha\beta}{\omega^2}y(x) - \frac{2}{\omega x}y(x+2\omega) + \frac{\alpha+\beta+2}{\omega x}y(x+\omega) +$$

$$+ \frac{1}{\omega^2 x^2}\int_\gamma^\delta e^{tx} J^{(2)}\Phi(t)(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)dt +$$

$$+ \frac{1}{\omega^2 x^2}\int_\gamma^\delta e^{tx} J^{(1)}\Phi^{(1)}(t)(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)dt +$$

$$+ \frac{1}{\omega^2 x^2}\int_\gamma^\delta e^{tx} J^{(1)}\Phi(t)[2e^{t\omega}\omega(e^{t\omega}-1)-(\alpha+\beta)\omega e^{t\omega}]dt \div$$

$$\div \frac{1}{\omega^2 x^2}\int_\gamma^\delta e^{tx} J\Phi^{(1)}(t)(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)dt$$

aber

$$J^{(2)} = \div \frac{\varphi(t)}{f(t)}J^{(1)} - \frac{\psi(t)}{f(t)}J$$

also

$$\Delta_\omega^2 y(x) = \frac{\alpha+\beta}{\omega}\Delta_\omega y(x) - \frac{\alpha\beta}{\omega^2}y(x) - \frac{2}{\omega x}y(x+2\omega) + \frac{\alpha+\beta+2}{\omega x}y(x+\omega) \div$$

$$\div \frac{1}{\omega^2 x^2}\int_\gamma^\delta e^{tx}\cdot\frac{\varphi(t)}{f(t)}J^{(1)}\Phi(t)(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)dt -$$

$$- \frac{1}{\omega^2 x^2}\int_\gamma^\delta e^{tx}\cdot\frac{\psi(t)}{f(t)}J\cdot\Phi(t)(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)dt +$$

$$+ \frac{1}{\omega^2 x^2}\int_\gamma^\delta e^{tx} J^{(1)}\Phi^{(1)}(t)(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)dt +$$

$$+ \frac{1}{\omega^2 x^2}\int_\gamma^\delta e^{tx} J^{(1)}\Phi(t)[2e^{t\omega}\omega(e^{t\omega}-1)-(\alpha+\beta)\omega e^{t\omega}]dt -$$

$$- \frac{1}{\omega^2 x^2}\int_\gamma^\delta e^{tx} J\Phi^{(1)}(t)(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)dt.$$

Die Integrale, die $J^{(1)}$ unter dem Integralzeichen enthalten, sammeln wir jetzt unter eins und bestimmen $\Phi(t)$ so, dass dieses Integral wegfällt.

Dadurch bekommen wir

$$\Phi(t) = \frac{1}{(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)}\, e^{\int\frac{\varphi(t)}{f(t)}dt}$$

Setzen wir nun dies ein, bekommen wir

$$\Delta_\omega^2 y(x) = \frac{\alpha+\beta}{\omega}\Delta_\omega y(x) - \frac{\alpha\beta}{\omega^2}y(x) -$$
$$-\frac{1}{\omega^2 x^2}\int_\gamma^\delta e^{tx}\cdot\frac{\psi(t)}{f(t)}J\cdot\Phi(t)(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)dt -$$
$$-\frac{1}{\omega^2 x}\int_\gamma^\delta e^{tx}\frac{\varphi(t)}{f(t)}J\cdot\Phi(t)(e^{t\omega}-1-\alpha)(e^{t\omega}-1-\beta)dt.$$

Wählen wir nun als Ausgangsgleichung folgende Differentialgleichung

$$(3)\quad (A(e^{t\omega}-1)^2+B(e^{t\omega}-1)+C)J^{(2)}+(a_2(e^{t\omega}-1)^2+a_1(e^{t\omega}-1)+a_0)J^{(1)}+$$
$$+(b_2(e^{t\omega}-1)^2+b_1(e^{t\omega}-1)+b_0)J=0$$

findet man die Differenzengleichung, die $y(x)$ bestimmt zu sein

$$(4)\quad \omega^2(Ax^2+a_2x+b_2)\Delta_\omega^2 y(x)+\omega(Bx^2+a_1x+B_1)\Delta_\omega y(x)+$$
$$+(Cx^2+a_0x+b_0)y(x)=0$$

und man findet hier wieder dasselbe einfache Verschiebungsgesetz. Kann man also (3) integrieren, wird man auch (4) integrieren können.

Ein interessanter Spezialfall vorkommt, wenn

$$\omega(A-B+C)+(a_2-a_1+a_0)=0$$

und

$$b_1=2b_2=b_0.$$

In dem Falle kann man (3) in eine Differentialgleichung der Form

$$(A_1z^2+B_1z+C_1)J^{(2)}+(A_2z+B)J^{(1)}+A_3J=0$$

reduzieren, und die Integration ist durchführbar.

Zum Schlusse sei nur erwähnt, dass eine ähnliche Untersuchung durchzuführen ist, wenn man die Transformation

$$y(x)=\int_\gamma^\delta t^{x-1}J\cdot\Phi(t)dt$$

benutzt, und dass man auch dabei eine Differentialgleichung findet mit dem charakteristischen Verschiebungsgesetz, jedoch von einem ganz anderen Typus.

G. M. JULIA (Paris - Francia)

REMARQUES SUR LES PROBLÈMES DE « MEILLEURE APPROXIMATION » ET SUR LE PROBLÈME DE DIRICHLET

Introduction.

J'ai montré dans une mémoire antérieur (Annales de l'E. N. S., 1927: *Développement en série de polynomes ou de fractions rationnelles de la fonction.....*) comment on pouvait résoudre par approximation le problème de la représentation conforme sur un cercle d'un domaine borné simplement connexe, de nature assez générale, contenant l'origine, en utilisant la propriété d'extrémum connue de la fonction $\varphi(z)$ qui fournit cette représentation, avec les conditions initiales $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$: « le maximum de $|\varphi(z)|$ dans D est inférieur à celui de toute autre fonction holomorphe dans D vérifiant les mêmes conditions initiales »; on cherche parmi les polynomes de degré n vérifiant ces conditions initiales celui pour lequel le maximum de la valeur absolue dans D est le plus petit possible; il existe, il est unique, il tend vers $\varphi(z)$ quand le degré n devient infini.

Appliquant une idée analogue au problème de Dirichlet relatif à l'aire D, sur la frontière $\mathfrak{F}$ de laquelle on donne une fonction continue réelle $f(M)$ du point M, et dans laquelle on cherche une fonction harmonique $F(x, y)$ prenant en tout point M de la frontière la valeur $f(M)$, on peut raisonner comme suit:

Considérons tous les *polynomes harmoniques de degré n* en (x, y); parmi eux, en existe-t-il un ou plusieurs dont « *l'écart à* f(M) » *sur* $\mathfrak{F}$ *soit minimum* ou, en gros, qui s'approche de $f(M)$ sur C plus près que les autres? Lorsque le degré n devient infini, ce polynome n'a-t-il pas pour limite la fonction $F(x, y)$ solution du problème de Dirichlet précédent? Dans ce qui va suivre, on va répondre à ces questions sous des restrictions précises imposées au domaine D et en définissant ce qu'il convient d'appeler ici: « écart de 2 fonctions continues sur un ensemble ». Pour préciser, nous supposerons ici D limité par une courbe de Jordan simple fermée C représentable par des équations $x=x(t)$, $y=y(t)$ pour $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $x(t)$ et $y(t)$ étant des fonctions continues de t dans $(0, 2\pi)$ et les équations simultanées $\begin{cases} x(a)=x(b) \\ y(a)=y(b) \end{cases}$ n'étant possibles que pour $a=0$, $b=2\pi$. De plus, M décrivant C, et 2 fonctions continues de ce point M, $f(M)$ et $g(M)$

étant données, *le maximum de* $|f(M)-g(M)|$ *quand* M *parcourt* C sera pris ici pour définition de *l'écart sur* C *des* 2 *fonctions* f(M) *et* g(M).

On sait que d'autres définitions sont possibles; par exemple, si $f(t)$ et $g(t)$ sont les expressions de $f(M)$ et $g(M)$ en fonction du paramètre t du point M sur C, on pourrait, et c'est ce que nous ferons dans un mémoire ultérieur, appeler écart de ces 2 fonctions le nombre

$$\int_0^{2\pi} |f(t)-g(t)|^k dt,$$

k étant un nombre positif. En particulier, pour $k=2$, les problèmes qui se posent alors sont analogues à ceux qu'introduit la série de Fourier et effectivement, lorsque C est un cercle de centre 0 de rayon 1, $f(\varphi)$ étant une fonction continue de l'abscisse curviligne φ du point M de coordonnées x, y, dont le développement de Fourier est

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos\varphi+b_1\sin\varphi)+\ldots.+(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)+\ldots.$$

le polynome harmonique de degré n dont l'écart

$$\int_0^{2\pi} |f(\varphi)-P_n(\cos\varphi,\sin\varphi)|^2 d\varphi$$

à $f(\varphi)$ sur C est minimum n'est autre que:

$$P_n(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)=$$

$$\frac{a_0}{2}+r(a_1\cos\varphi+b_1\sin\varphi)+\ldots.+r^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)$$

dont la limite pour $n=\infty$ est bien la fonction harmonique dans C prenant sur C les valeurs $f(\varphi)$. C'est là un résultat qui n'est pas particulier au cercle et que nous étendrons dans un memoire ultérieur à toute courbe de Jordan pour toute valeur $k>1$ de l'exposant qui figure dans l'écart.

L'idée qui est mise en oeuvre ici est susceptible de la généralisation suivante:

Une équation aux dérivées partielles étant donnée, pour chercher la solution qui correspond à des conditions aux limites données, on peut, dans une famille de fonctions simples *satisfaisant à l'équation*, (polynomes, fractions rationnelles, etc....) et dépendant d'une infinité de paramètres arbitraires, chercher *celle (ou celles) qui fournit la meilleure approximation des conditions aux limites* parmi toutes celles qui dépendent d'un nombre fini n de ces paramètres, puis, faisant croître n indéfiniment, examiner si cette fonction tend vers la solution cherchée.

C'est une méthode en quelque sorte dualistique de celle de Ritz qui cherche, dans une classe de fonctions satisfaisant aux conditions aux conditions aux

limites, à choisir celle (ou celles) qui « satisfait le mieux » (sans, bien entendu, en être une solution), à l'équation aux dérivées partielles, ou plutôt au problème de variations qui lui a donné naissance; le nombre des paramètres dont dépend cette fonction augmentant ensuite indéfiniment, on cherche si cette fonction a pour limite la solution cherchée.

Mai nous n'insisterons pas ici sur les généralisations possibles, nous réservant d'y revenir dans une autre publication.

1. - Considérons ici une courbe de Jordan C, simple, fermée, qu'on peut supposer représentée dans le plan des $z=x+iy$ par les équations $x=x(t)$, $y=y(t)$ pour $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Soit d'autre part, une fonction continue donnée du point M sur C; avec la représentation choisie pour C, nous la désignerons par $f(t)$; $f(t)$ sera donc une fonction continue quelconque de la variable t, telle que $f(0)=f(2\pi)$. Considérons maintenant, en posant $z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, la suite des polynomes harmoniques homogènes: 1, $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$, $r^2\cos 2\varphi$, $r^2\sin 2\varphi$,...., $r^n\cos n\varphi$, $r^n\sin n\varphi$,.... Lorsque le point M (d'affixe $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ se déplace sur C, cette suite donne naissance à une suite de fonctions continues du point M, et par conséquent de t qu'on appellera:

$$p_0(t),\ p_1(t),\ldots,\ p_n(t),\ldots,$$

en posant:

$$p_{2k-1}(t)=r^k\cos k\varphi,\quad\text{et}\quad p_{2k}(t)=r^k\sin k\varphi,\quad (k=1,\ 2,\ldots,\ \infty).$$

La présente note a pour objet l'étude des problèmes suivants:

1°) Parmi toutes les combinaisons $\sum_0^N a_k p_k$ à coefficients a_k réels, pour lesquelles $N\leqslant N_0$, en existe-t-il une (ou plusieurs) pour laquelle le maximum de $\left|f-\sum_0^N a_k p_k\right|$ pour $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, c'est-à-dire « *l'écart à* $f(t)$ » soit *plus petit que pour toutes les autres*?

2°) Est-il possible de former une combinaison linéaire $\sum_0^N a_k p_k(t)$ qui s'approche arbitrairement de $f(t)$, c'est-à-dire pour laquelle $\left|f(t)-\sum_0^N a_k p_k\right|<\varepsilon$, ε étant arbitrairement petit et positif?

2. - La réponse à ces deux questions est affirmative.

Cela revient à dire que, (1°) parmi tous les polynomes harmoniques en x, y, *de degré* n *donné*, il y en a *au moins un* dont l'écart à $f(t)$, *mesuré sur* C, est *minimum*. Soit ε_n cet écart pour un degré n. On peut (2°) affirmer que ε_n tend vers *zéro* quand n devient infini. Nous appelons ici comme précédemment écart ε_n le maximum de $|f(t)-P_n[x(t),\ y(t)]|$ pour $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, P_n étant le poly-

nome harmonique envisagé. Ce polynome P_n s'appellera polynome harmonique *de meilleure approximation sur C*. Il en résulte que la suite des polynomes P_1, P_2,...., P_n,...., converge uniformément vers $f(t)$, *sur C*. Elle converge donc *uniformément dans C* vers une fonction harmonique $F(x, y)$ qui prend sur C la valeur $f(t)$ au point M de paramètre t, c'est-à-dire vers la solution du problème de Dirichlet pour la donnée $f(t)$ sur C.

La recherche de la milleure approximation de $f(t)$ sur C par les polynomes harmoniques des degrés successifs entraîne par conséquent la solution du problème de Dirichlet.

3. - Démontrons d'abord *l'existence* d'au moins un polynome harmonique de meilleure approximation. Un polynome harmonique de degré n dépend linéairement de $2n+1$ paramètres réels, et l'on voit aussitôt, par exemple à l'aide de la formule de Lagrange, que ces $2n+1$ paramètres sont bornés en valeur absolue si le polynome envisagé est borné en valeur absolue dans une région quelconque du plan.

Tout polynome harmonique dont l'écart à $f(t)$ sur C est inférieur ou égal à l'écart de x à $f(t)$ (1), c'est-à-dire inférieur au maximum de $|x(t)-f(t)|$ pour $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, aura sur C son module inférieur à

$$\text{Max}\,|f(t)| + \text{Max}\,|x-f| < 2\,\text{Max}\,|f| + \text{Max}\,|x|$$

et par suite, les polynomes harmoniques parmi lesquels on choisit celui qui minime l'écart $\text{Max}\,|f(t)-P_n[x(t), y(t)]|$ sont bornés sur C, donc dans C.

Leurs coéfficients sont bornés en module. Evidemment, le Maximum de $|f(t)-P_n[x(t), y(t)]|$ est une fonction *continue positive* des coéfficients de P_n, qui atteint son minimum en un point au moins du domaine borné où varient ces coéfficients. Il y a donc bien *un polynome* P_n *au moins de meilleure approximation sur* C *pour la fonction* $f(t)$. Soit ε_n l'écart à $f(t)$, (écart minimum), de ce polynome P_n.

4. - Si l'on était sur, à priori, que toute combinaison linéaire

$$a_0 p_0(t) + a_1 p_1(t) + \ldots + a_{2n} p_{2n}(t),$$

valeur sur C d'un polynome harmonique de degré n, n'a pas plus de $2n$ racines dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, les $p_i(t)$ formeraient un systéme de Tchebyscheff et le polynome d'approximation P_n trouvé plus haut serait unique. Mais ceci n'a pas lieu en général, le nombre de ces racines étant celui des intersections de la courbe $P_n(x, y)=0$ avec la courbe C, lequel, à priori, peut être arbitrairement élevé, et peut même être infini. *L'unicité de* P_n *ne peut donc pas être garantie*

(1) On peut évidemment se borner à considérer ceux-là.

en général: elle l'est toutes les fois qu'on sait, à priori, que le nombre des intersections précédentes est $\leqslant 2n$, par exemple *si* C *est une conique.* Si P_n n'est pas unique, on désignera par P_n l'un quelconque des polynomes de meilleure approximation.

5. - Nous démontrerons plus loin que $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. Il s'ensuit que

$$\lim_{n=\infty} P_n[x(t),\ y(t)] = f(t)$$

uniformément pour $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Donc, sur C et par suite dans C

$$|P_{n+k}(x, y) - P_n(x, y)| < \varepsilon$$

pour $n > n_0$ quel que soit k.

La suite des $P_n(x, y)$ converge donc pour $n = \infty$ *uniformément dans* C *et sur* C vers une fonction $F(x, y)$ qui sera continue dans C et sur C, prendra en chaque point M de C la valeur $f(t)$ de f en ce point et qui sera *harmonique à l'intérieur de* C comme limite, uniformément atteinte, d'un polynome harmonique. $F(x, y)$ est la solution du problème de Dirichlet pour $f(t)$.

6. - Démontrons que $\lim \varepsilon_n = 0$. Cela revient à prouver que toute fonction continue $f(t)$ du point t de C peut se développer, sur C, en série uniformément convergente de polynomes harmoniques. Il revient au même de prouver que *toute fonction* F(x, y) [1] *harmonique dans* C, *continue sur* C, *peut se développer en série de polynomes harmoniques uniformément convergente dans* C *et sur* C. A cet effet, nous utiliserons une propriété de la représentation conforme que M. COURANT énonce ainsi: (COURANT. Göttinger Nachrichten, 1914 et 1922. « *Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei Konformer Abbildung* »):

Si $\psi_1(\zeta)$, $\psi_2(\zeta)$,...., $\psi_n(\zeta)$.... $\psi(\zeta)$ *sont les fonctions qui représentent* $|\zeta| \leqslant 1$ *d'une manière conforme sur les domaines du plan* z *limités par les courbes de Jordan* Γ_1, Γ_2,...., Γ_n,...., Γ, *avec* $\psi_n(0) = 0$ *et tous les* $\psi_n(0)$ *positifs, les* ψ_n *convergent vers* $\psi(\zeta)$, *uniformément dans* $|\zeta| \leqslant 1$, *lorsque les* Γ_n *convergent uniformément vers* Γ.

Cette propriété a déjà été utilisée par M. L. WALSH (Math. Annalen, Bd 96) au développement d'une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans C et continue sur C en série de polynomes en z uniformément convergente dans C et sur C. On peut former aisément une suite de courbes de Jordan C_1, C_2,...., C_n,...., emboîtées et

---

[1] On sait en effet, par exemple à l'aide de la représentation conforme de C sur un cercle, qu'à toute fonction $f(t)$ continue sur C correspond une et une seule fonction $F(x, y)$, harmonique dans C, continue dans C et sur C, et prenant sur C les valeurs $f(t)$.

satisfaisant aux conditions de convergence uniforme vers C de M. COURANT. Considérons les fonctions $z_1(z)$, $z_2(z)$,...., $z_n(z)$,...., qui transforment par représentation conforme C en C_1, C_2,...., C_n,...., avec $z_n(0)=0$, $z_n(0)>0$, l'origine supposée intérieure à C. Elles tendent uniformément vers z dans C et sur C.

On a $|z_n(z)-z|<\varepsilon$ uniformément dans C et sur C pour $n>n_0$.

Pour abréger, nous désignons par $F(z)$ la valeur au point $z=x+iy$ de la fonction harmonique $F(x, y)$; appelant $z(z_n)$ la fonction inverse de $z_n(z)$, on voit que $z(z_n)$ est holomorphe dans C_n, donc $F[z(z_n)]$ est *harmonique dans* C_n. On peut lui associer la fonction conjuguée $\Phi(z_n)$ harmonique dans C_n et développer, dans C_n, $F+i\Phi$ en série de polynomes en z_n, c'est-à-dire trouver un polynome en z_n qui diffère aussi peu qu'on le veut, *dans* C *et sur* C, de $F+i\Phi$; envisageant les parties réelles, on voit que, ε' étant arbitrairement petit, on peut trouver un polynome harmonique $P(z_n)$ tel que $|F[z(z_n)]-P(z_n)|<\varepsilon'$, lorsque z_n décrit C et son intérieur. Or, lorsque z_n décrit C et son intérieur, $z(z_n)$ décrit un domaine intérieur à C et l'on a $|z_n(z)-z|<\varepsilon$ puisque $n>n_0$ en vertu de l'hypothèse précédente, ou, ce qui revient au même: $|z(z_n)-z_n|<\varepsilon$. $F(z)$ étant continue dans C et sur C, par hypothèse, y est uniformément continue et l'on aura:

$$|F[z(z_n)]-F(z_n)|<\eta,$$

η tendant vers zéro avec ε. Le polynome harmonique $P(z_n)$ est donc tel que l'on a, pour z_n *décrivant* C *et son intérieur*:

$$|F(z_n)-P(z_n)|<\eta+\varepsilon'.$$

En définitive, ε' et η étant pris arbitrairement petits, on peut choisir ε et par suite n, et P de façon à satisfaire à $|F(z_n)-P(z_n)|<\eta+\varepsilon'$ dans C et sur C.

Cela veut dire qu'on peut trouver un polynome harmonique $P(x, y)$ dont *l'écart à* F(x, y) *ou à* f(t) *sur* C soit arbitrairement petit, ou encore que toute fonction $F(x, y)$ harmonique dans C et continue sur C peut se développer en série de polynomes harmoniques uniformément convergente dans et sur C, c. q. f. d.

7. - Nous ferons remarquer que la différence $|f(t)-P_n[x(t), y(t)]|$ dont le maximum sur C a été rendu minimum par le choix de P_n, ne dépend qu'en apparence de la représentation paramétrique choisie pour C; en chaque point M de C, c'est en réalité une fonction du point M dont la valeur ne dépend que des coordonnées (x, y) de ce point et non de la représentation choisie pour C, puisque, d'après le numéro 1, il en est ainsi de $f(t)$.

Par conséguent, la détermination des polynomes harmoniques de meilleure approximation sur C dont il vient d'être question est en réalité indépendante de la représentation paramétrique choisie pour C, il en est donc de même de ces polynomes harmoniques.

8. - Il est clair que la méthode ne peut s'appliquer telle quelle aux aires multiplement connexes, puisqu'une série de polynomes harmoniques uniformément convergente sur le contour d'une aire converge aussi uniformément dans tout l'intérieur vers une fonction harmonique.

9. - Il est clair enfin que l'on peut substituer aux polynomes harmoniques des fractions rationnelles et, en général, toutes fonctions harmoniques et régulières dans C dépendant de paramètres suffisants pour permettre l'approximation des N. 3 et 6.

J. BABINI (Santa Fè - Argentina)

SOBRE LA INTEGRACIÓN APROXIMADA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

La integración aproximada de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, se efectúa comunmente sustituyendo la ecuación diferencial por un sistema de dos ecuaciones simultaneas de primer orden; pero puede tambien efectuarse directamente utilizando los circulos osculadores a las curvas integrales.

Sea, en efecto, $y''=f(x, y, y')$ la ecuación diferencial y supongamos que las condiciones limites de la integral buscada sean condiciones iniciales:

$$x=x_0\,;\quad y=y_0\,;\quad y'=y_0'.$$

En ese caso, a un incremento h de la variable, corresponderá para la función un incremento

$$\Delta y=hy_0'+\frac{h^2}{2}f+\frac{h^3}{3!}f'+\frac{h^4}{4!}f''+\ldots.$$

donde $f, f', f'',\ldots.$ indican los valores que toman las derivadas segunda, tercera, cuarta, etc. en el punto inicial $x=x_0$.

Consideremos ahora un circulo C de radio r que en ese punto inicial tenga con la curva integral un contacto de primer orden. Su ecuación parametrica será

$$\begin{aligned} x&=x_0+r(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\alpha_0)\\ Y&=y_0-r(\cos\alpha-\cos\alpha_0)\end{aligned}$$

donde $\operatorname{tg}\alpha_0=y_0'$.

Entonces al incremento h de la variable corresponderá un incremento de la ordenada del circulo

$$\Delta Y=hy_0'+\frac{h^2}{2}\frac{1}{r\cos^3\alpha_0}+\frac{h^3}{2}\frac{\operatorname{sen}\alpha_0}{r^2\cos^5\alpha_0}+\frac{h^4}{8}\frac{1+4\operatorname{sen}^2\alpha_0}{r^3\cos^7\alpha_0}+\ldots.$$

y al sustituir el arco de curva integral por el arco de C se cometerá un error

$$\delta=\frac{h^2}{2}\left(f-\frac{1}{r\cos^3\alpha_0}\right)+\frac{h^3}{3!}\left(f'-\frac{3\operatorname{sen}\alpha_0}{r^2\cos^5\alpha_0}\right)+\frac{h^4}{4!}\left(f''-\frac{3(1+4\operatorname{sen}^2\alpha_0)}{r^3\cos^7\alpha_0}\right)+\ldots.$$

En el caso en que C fuera el circulo osculador C_0 a la curva integral en el punto inicial, indicando con t el parametro de este circulo, tendriamos

$$\begin{aligned} x&=x_0+r_0(\operatorname{sen}t-\operatorname{sen}\alpha_0)\\ \eta&=y_0-r_0(\cos t-\cos\alpha_0)\\ \eta'&=\operatorname{tg}t\end{aligned}$$

donde

$$r_0 = \frac{1}{f\cos^3 a_0}.$$

Tomemos ahora para r el valor

$$r = \frac{1}{c} = \frac{1}{F(t)\cos^3 t}$$

donde $F(t) = f(x, \eta, \eta')$ o lo que es lo mismo, tomemos para r el valor del radio del circulo osculador a la curva integral que en el punto de abscisa x tiene un contacto de primer orden con C_0.

En ese punto el valor de c estará dado por

$$\frac{1}{r} = c = f\cos^3 a_0 + (x - x_0)\cos^3 a_0(f' - 3f^2 \operatorname{sen} a_0 \cos a_0) +$$
$$+ \frac{(x-x_0)^2}{2}\cos^3 a_0[F''(a_0)f^2\cos^4 a_0 - 5ff' \operatorname{sen} a_0 \cos a_0 - 3f^3\cos^2 a_0(1 - 2\operatorname{sen}^2 a_0)] + \ldots.$$

Si $x = x_0$ el circulo C coincide con el circulo osculador C_0 y el error que se comete en el extremo del intervalo es

$$\delta_1 = \frac{h^3}{3!}(f' - 3f^2 \operatorname{sen} a_0 \cos a_0) + \ldots. \tag{1}$$

Este es el *metodo del radio de curvatura*, que consiste en sustituir los arcos de la curva integral por arcos de circulos osculadores en los puntos iniciales de los mismos y con el cual se comete un error del tercer orden respecto al incremento de la variable.

Error algo menor se obtiene si se hace $x = x_0 + \frac{h}{2}$ es decir, si se toma para r el valor del radio de curvatura en el punto de abscisa media. En efecto en ese caso

$$\frac{1}{r} = c = f\cos^3 a_0 + \frac{h}{2}\cos^3 a_0(f' - 3f^2 \operatorname{sen} a_0 \cos a_0) + \ldots.$$

y el error será

$$\delta_2 = -\frac{1}{2}\frac{h^3}{3!}(f' - 3f^2 \operatorname{sen} a_0 \cos a_0) + \ldots. \tag{2}$$

De la misma forma será el error si se toma para r el valor medio de los radios de curvatura r_0 y r_1 en los extremos del arco de C_0.

Como

$$\frac{1}{r_1} = f\cos^3 a_0 + h\cos^3 a_0(f' - 3f^2 \operatorname{sen} a_0 \cos a_0) + \ldots.$$

resulta

$$\frac{1}{r} = c = f\cos^3 a_0 + \frac{h}{2}\cos^3 a_0(f' - 3f^2 \operatorname{sen} a_0 \cos a_0) + \ldots.$$

y el error será del mismo orden y con igual primer termino que δ_2 [1].

---

[1] Estos procedimientos, que mejoran el metodo del radio de curvatura se encuentran utilizados en forma grafica y sin desarrollo analitico alguno en:

C. RUNGE, *Graphischen Methoden* (Berlin, 1919, pag. 121); R. MEHMKE, *Leitfaden zum Graphischen Rechnen* (Berlin, 1917, pag. 140); W. HORT; *Die Differentialgleichungen des Ingenieurs* (Berlin, 1925, pag. 280).

Pero un error menor se obtiene haciendo $x=x_0+\frac{h}{3}$, es decir, si se toma para r el valor del radio de curvatura en el extremo del primer tercio del intervalo. En efecto, en ese caso por ser

$$\frac{1}{r}=c=f\cos^3\alpha_0+\frac{h}{3}(f'-3f^2\operatorname{sen}\alpha_0\cos\alpha_0)\cos^3\alpha_0+$$
$$+\frac{h^2}{18}[F''(\alpha_0)f^2\cos^4\alpha_0-5ff'\operatorname{sen}\alpha_0\cos\alpha_0-$$
$$-3f^3\cos^2\alpha_0\cos 2\alpha_0]\cos^3\alpha_0+....$$

el error que se comete es

$$\delta_3=\frac{h^4}{4!}[f''-\frac{2}{3}F''(\alpha_0)f^2\cos^4\alpha_0-$$
$$-\frac{14}{3}ff'\cos\alpha_0\operatorname{sen}\alpha_0-f^2\cos^2\alpha_0(1-8\operatorname{sen}^2\alpha_0)]+....$$

es decir del cuarto orden respecto al incremento de la variable. Este metodo que llamamos *metodo del primer tercio*, si bien se presta mas a ser aplicado graficamente, puede utilizarse tambien numericamente.

Para eso se calcula

$$f_0=f(x_0,y_0,y_0')$$
$$\operatorname{sen}\alpha_1=\operatorname{sen}\alpha_0+\frac{h}{3}f_0\cos^3\alpha_0$$

lo que nos permite obtener el incremento de la funcion en el extremo del primer tercio del intervalo

$$k_1=-\frac{h}{3}\frac{\cos\alpha_1-\cos\alpha_0}{\operatorname{sen}\alpha_1-\operatorname{sen}\alpha_0}=\frac{h}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}.$$

Con este valor se calcula

$$f_1=f(x_0+\frac{h}{3},y_0+k_1,\operatorname{tg}\alpha_1)$$
$$\operatorname{sen}\alpha_2=\operatorname{sen}\alpha_0+hf_1\cos^3\alpha_1$$

y se obtendrá el incremento de la funcion en el extremo del intervalo

$$k=h\operatorname{tg}\frac{\alpha_0+\alpha_2}{2}.$$

Para facilitar el calculo puede utilizarse el siguiente esquema

$h=$

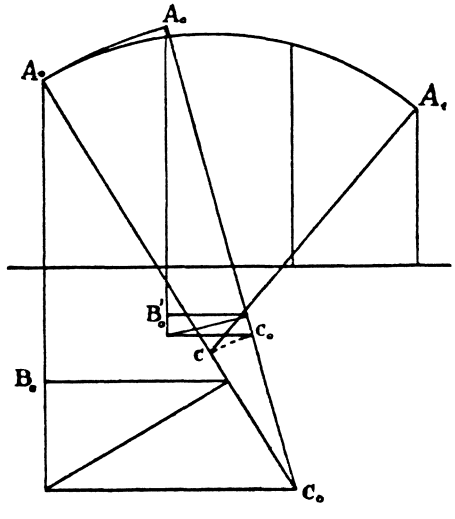
x_0 $x_0+\frac{h}{3}$	y_0 y_0+k_1	α_0 α_1	$\operatorname{sen}\alpha_0$ $\operatorname{sen}\alpha_1$	$f_0\cos^3\alpha_0$ $f_1\cos^3\alpha_1$	k_1 k
x_0+h	y_0+k	α_2	$\operatorname{sen}\alpha_2$		

Por ejemplo, aplicado este método a la ecuación del pendulo $y'' = -\operatorname{sen} y$ con las condiciones limites $x_0 = 0$; $y_0 = 30°$; $y_0' = 0$ obtuvimos:

x	y	α	x	y	α
0	30°	0°	1	16° 41′ 27″	— 23° 23′ 57″
0,1	29° 51′ 27″	— 2° 51′ 3″	1,1	14° 8′ 00″	— 24° 42′ 37″
0,2	29° 25′ 48″	— 5° 41· 00″	1,2	11° 25′ 52″	— 25° 47′ 18″
0,3	28° 43′ 25″	— 8° 22′ 46″	1,3	8° 36′ 38″	— 26° 37′ 54″
0,4	27° 44′ 11″	— 11° 6′ 18″	1,4	5° 41′ 58″	— 27° 14′ 19″
0,5	26° 28′ 49″	— 13° 37′ 41″	1,5	2° 43′ 36″	— 27° 36′ 36″
0,6	24° 58′ 2″	— 15° 57′ 7″	1,6	— 0° 16′ 43″	— 27° 44′ 43″
0,7	23° 12′ 39″	— 18° 7′ 38″			
0,8	21° 13′ 29″	— 20° 6′ 6″			
0,9	19° 1′ 39″	— 21° 58′ 54″			

Si calculamos el punto donde el ultimo arco de circulo C corta al eje obtenemos para $y = 0$; $x = 1{,}5908$; $\alpha = -27° 43′ 57″$ mientras que los valores exactos, dados por las funciones elipticas son: $y = 0$; $x = 1{,}5981$; $\alpha = -27° 22′ 4″$ bastante aproximados a los anteriores.

El metodo del primer tercio se presta facilmente para integrar graficamente las ecuaciones diferenciales de segundo orden. Para eso si A_0 es el punto inicial de la curva integral y A_0C_0 la normal en ese punto, llevando sobre A_0B_0 el valor de $\frac{1}{f}$, calculado analitica o graficamente, la construccion de la figura permite obtener el centro de curvatura C_0. Con ese centro se traza el circulo osculador hasta encontrar la paralela al eje de las y correspondiente al primer tercio del intervalo h elegido. En ese punto A_0' se calcula el valor de $\frac{1}{f}$ tomando para y' el valor de la pendiente de la tangente al circulo osculador y se determina como antes el centro C_0' que se transporta sobre C tomando $C_0C = C_0C_0'$. La circunferencia de centro C que pasa por A_0 determina sobre el extremo del intervalo h un nuevo punto A_1 de la curva integral en el cual la normal es A_1C.



El metodo del primer tercio es especialmente cómodo para integrar las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y'' = (1 + y'^2)^{3/2} \varphi(x)$$

pues en ese caso a un incremento h de x corresponde para y un incremento

$$k = h \operatorname{tg} \frac{a_0 + a_1}{2}$$

siendo

$$\operatorname{sen} a_1 = \operatorname{sen} a_0 + h\varphi\left(x_0 + \frac{h}{3}\right)$$

y graficamente basta tomar para r el valor

$$\frac{1}{\varphi\left(x_0 + \frac{h}{3}\right)}$$

que puede obtenerse facilmente de una grafica de $\varphi(x)$.

La simple observación de las formulas (1) y (2) demuestra que la suma $\frac{\delta_1 + 2\delta_2}{3}$ será una expresion cuyo primer término es del cuarto orden respecto a h, es decir que se puede obtener un error del mismo orden que con el método del primer tercio, tomando como ordenada (y derivada) en el extremo del intervalo la ordenada (y derivada) del circulo osculador menos los $^2/_3$ de la diferencia entre esa ordenada (y derivada) y la del circulo obtenido tomando el radio medio.

Este método es en cierto modo la generalizacion, para las ecuaciones de segundo orden, de la formula de RUNGE para las de primer orden, pero ya desde el punto de vista numérico, como gráfico (1), es preferible el método del primer tercio, pues con menor trabajo se obtiene igual aproximacion.

---

(1) La integración gráfica por este metodo puede verse en: J. BABINI, *Sobre la integración gráfica de las ecuacionés diferenciales de segundo orden* (en Anales de la S. Cientifica Argentina, tomo CII, pag. 170. B. Aires, 1927).

M. KRAWTCHOUK (Kiew, Ukraine - U. R. S. S.)

SUR L'INTÉGRATION APPROCHÉE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

§ 1. - Désignons par y une intégrale unique de période 1 de l'équation différentielle linéaire

$$L(y)=y^{(k)}+A_1(x)y^{(k-1)}+ \ldots + A_k(x)y=f(x) \tag{1}$$

aux coefficients continus.

Soit

$$\varphi_1(x), \qquad \varphi_2(x), \qquad \varphi_3(x),\ldots \tag{2}$$

un système fermé, où la fonction $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,\ldots)$ a la période 1 et $\varphi_i^{(k)}(x)$ $(i=1,2,\ldots)$ est une combinaison linéaire de

$$\varphi_1(x), \qquad \varphi_2(x),\ldots, \qquad \varphi_{i+1}(x);$$

on pourrait poser par ex.:

$$\varphi_1=1, \qquad \varphi_2=\sin 2\pi x, \qquad \varphi_3=\cos 2\pi x, \qquad \varphi_4=\sin 4\pi x, \qquad \varphi_5=\cos 4\pi x,\ldots$$

Prenons à présent pour valeur approchée de y l'expression

$$y_m=a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+ \ldots + a_m\varphi_m(x),$$

déterminée par le système des équations suivantes:

$$\int_0^1 [L(y_m)-f]\varphi_i(x)dx=0 \qquad (i=1, 2,\ldots, m).$$

En désignant la différence $y-y_m$ par u, ces dernières équations peuvent être écrites comme il suit:

$$\int_0^1 L(u)\varphi_i(x)dx=0 \qquad (i=1, 2,\ldots, m). \tag{3}$$

Supposons encore qu'il existe la dérivée $y^{(k+r)}$ vérifiant la condition de Lipschitz

d'ordre δ; alors on peut indiquer de telles fonctions $\varphi_i(x)$ et de tels coefficients b_i qu'on ait:

$$u^{(k)}=\sum_{i=1}^{m} b_i\varphi_i(x)-E^{r+\delta}(x),$$

où l'ordre de petitesse de $E^{r+\delta}(x)$ par rapport à $\frac{1}{m}$ est $\geqslant r+\delta$, et cela permet de former des égalités (3) une combinaison linéaire suivante:

$$\int_0^1 L(u)(u^{(k)}+E^{r+\delta})dx=0. \tag{4}$$

En désignant par η la différence

$$L(u)-u^{(k)}=A_1(x)u^{(k-1)}+ \ldots + A_k(x)u$$

on peut écrire l'égalité (4) comme il suit:

$$\int_0^1 (u^{(k)}+\eta)(u^{(k)}+E^{r+\delta})dx=0,$$

ce qui donne:

$$\int_0^1 u^{(k)2}dx+\sqrt{2}\theta\sqrt{\int_0^1 u^{(k)2}dx\int_0^1[\eta^2+(E^{r+\delta})^2]dx}+\int_0^1 \eta E^{r+\delta}dx=0$$

$$(-1\leqslant\theta\leqslant+1).$$

La dernière égalité démontre que

$$\int_0^1 u^{(k)2}dx=\mu\int_0^1[u^{(k-1)2}+ \ldots + u'^2+u^2+(E^{r+\delta})^2]dx, \tag{5}$$

μ étant une fonction bornée de m.

D'autre part, si $\Gamma(x,\xi)$ est la fonction de Green de notre problème, on a évidemment:

$$\begin{aligned} u(x)&=\int_0^1 \Gamma\cdot L(u(\xi))d\xi \\ u'(x)&=\int_0^1 \frac{\partial\Gamma}{\partial x}\cdot L(u(\xi))d\xi \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u^{(k-1)}(x)&=\int_0^1 \frac{\partial^{k-1}\Gamma}{\partial x^{k-1}}\cdot L(u(\xi))d\xi. \end{aligned} \tag{6}$$

En désignant par

$$\gamma,\qquad \gamma_1,\ldots,\qquad \gamma_{k-1}$$

les restes que l'on obtient en développant respectivement

$$\Gamma, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial x}, \ldots, \quad \frac{\partial^{k-1}\Gamma}{\partial x^{k-1}}$$

suivant les fonctions $\varphi_i(\xi)$ et en s'arretant au m-ième terme, on dèduit de (6), à l'aide des conditions (3), les inégalités suivantes:

$$(7)\quad \begin{aligned} u^2(x) &= \Big[\int_0^1 \gamma \cdot L(u(\xi))d\xi\Big]^2 \leqslant \int_0^1 \gamma^2 d\xi \cdot \int_0^1 L^2(u(\xi))d\xi \\ u'^2(x) &= \Big[\int_0^1 \gamma_1 \cdot L(u(\xi))d\xi\Big]^2 \leqslant \int_0^1 \gamma_1^2 d\xi \cdot \int_0^1 L^2(u(\xi))d\xi \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u^{(k-1)2}(x) &= \Big[\int_0^1 \gamma_{k-1} \cdot L(u(\xi))d\xi\Big]^2 \leqslant \int_0^1 \gamma_{k-1}^2 d\xi \cdot \int_0^1 L^2(u(\xi))d\xi. \end{aligned}$$

De ces dernières inégalités et de (5) on peut éliminer $\int_0^1 u^{(k)2} d\xi$; alors, vu que

$$\lim_{m=\infty} \int_0^1 \gamma^2 d\xi = 0, \quad \lim_{m=\infty} \int_0^1 \gamma_1^2 d\xi = 0, \ldots, \quad \lim_{m=\infty} \int_0^1 \gamma_{k-1}^2 d\xi,$$

on obtient:

$$\begin{aligned} u^2 &= \eta_0 \cdot \int_0^1 [u^{(k-1)2} + \ldots + u'^2 + u^2 + (E^{r+\delta})^2] d\xi \\ u'^2 &= \eta_1 \cdot \int_0^1 [u^{(k-1)2} + \ldots + u'^2 + u^2 + (E^{r+\delta})^2] d\xi \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u^{(k-1)2} &= \eta_{k-1} \cdot \int_0^1 [u^{(k-1)2} + \ldots + u'^2 + u^2 (E^{r+\delta})^2] d\xi, \end{aligned}$$

où

$$\lim_{m=\infty} \eta_0 = 0, \quad \lim_{m=\infty} \eta_1 = 0, \ldots, \quad \lim_{m=\infty} \eta_{k-1} = 0.$$

Il s'en suit que l'ordre de petitesse des différences

$$\begin{aligned} u &= y - y_m \\ u' &= y' - y_m' \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u^{(k-1)} &= y^{(k-1)} - y_m^{(k-1)} \end{aligned}$$

par rapport à $\frac{1}{m}$ est $\geqslant r+\delta$; ce qui démontre la convergence du procédé ci-dessus donné pour le calcul approché de y.

§ 2. - Supposons à présent que l'équation (1) est d'ordre pair et qu'elle a dans l'intervalle (0,1) une solution unique y satisfaisant aux conditions frontières suivantes:

$$\begin{aligned} &y(0)=y(1)=0 \\ &y''(0)=y''(1)=0 \\ &y^{IV}(0)=y^{IV}(1)=0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y^{(k-2)}(0)=y^{(k-2)}(1)=0. \end{aligned} \tag{8}$$

Nous allons de même cette fois définir y approximativement sous la forme d'une somme

$$y_m=a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\ldots.+a_m\varphi_m(x)$$

satisfaisant aux équations (3), où les fonctions (2), au lieu d'être périodiques, vérifient les conditions frontières (8); on pourrait prendre par ex.

$$\varphi_1=\sin \pi x, \qquad \varphi_2=\sin 2\pi x, \qquad \varphi_3=\sin 3\pi x,....$$

Vu la fermeture du système (2), il existe une égalité du type:

$$u^{(k)}=\sum_{i=1}^{m} b_i\varphi_i(x)-E(x),$$

où

$$\lim_{m=\infty}\int_0^1 E^2(x)dx=0;$$

donc des égalités (3) on peut former la combinaison linéaire suivante:

$$\int_0^1 L(u)(u^{(k)}+E)dx=0$$

et en déduire, comme dans le paragraphe précédent:

$$\int_0^1 u^{(k)2}dx=\mu\int_0^1 (u^{(k-1)2}+\ldots.+u'^2+u^2+E^2)dx, \tag{9}$$

où μ est une fonction bornée de m. En éliminant à présent l'expression $\int_0^1 u^{(k)2}dx$ de (7) et (9), on obtient de nouveau

$$\begin{aligned} u^2&=\zeta_0\cdot\int_0^1 (u^{(k-1)2}+\ldots.+u'^2+u^2+E^2)dx \\ u'^2&=\zeta_1\cdot\int_0^1 (u^{(k-1)2}+\ldots.+u'^2+u^2+E^2)dx \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u^{(k-1)2}&=\zeta_{k-1}\cdot\int_0^1 (u^{(k-1)2}+\ldots.+u'^2+u^2+E^2)dx, \end{aligned}$$

où

$$\lim_{m=\infty} \zeta_0 = 0, \qquad \lim_{m=\infty} \zeta_1 = 0, \ldots, \qquad \lim_{m=\infty} \zeta_{k-1} = 0,$$

et cela démontre que les différences

$$\begin{aligned} u &= y - y_m \\ u' &= y' - y_m' \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u^{(k-1)} &= y^{(k-1)} - y_m^{(k-1)} \end{aligned}$$

ont l'ordre de petitesse par rapport à $\frac{1}{m}$ non moindre que celui de l'expression

$$\sqrt{\int_0^1 E^2(x)\,dx}.$$

Ainsi la convergence du procédé exposé est assurée.

On peut appliquer des considérations analogues aussi dans les cas des conditions frontières autres que celles des deux paragraphes ci-dessus. Nous n'insistons pas sur ce point-là, car le choix des fonctions $\varphi_i(x)$ devient parfois assez pénible et la convergence du procédé assez lente.

Remarquons en passant que le *procédé de réduites* ci-dessus utilisé est une généralisation immédiate de celui de W. RITZ (1).

Le procédé de moindres carrés de M. N. KRYLOFF, où au lieu des équations (3) on a les conditions

$$\int_0^1 L(u)L(\varphi_i)\,dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{10}$$

de minimum de l'intégrale $\int_0^1 [L(y_m) - f]^2 dx$, est aussi quelquefois très commode, bien que les conditions (10) sont au point de vue du calcul numérique un peu plus compliquées que les conditions (3); le procédé converge assez rapidément toutes les fois qu'on peut affirmer l'existence de l'égalité de la forme:

$$y^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} B_i \varphi_i^{(k)}(x) + E^{r+\delta}(x), \tag{11}$$

et une telle réprésentation de $y^{(k)}$ est en effet réalisable au moyen des fonctions $\varphi_i^{(k)}(x)$ du paragraphe suivant.

Comme l'a remarqué M. N. KRYLOFF (2), on peut considérer les deux procédés

---

(1) Quant à la méthode de réduites cf. la note récente de M. N. KRYLOFF (Comptes rendus, t. 187).

(2) Cf. N. KRYLOFF: *Sur une méthode d'intégration*, etc. (C. R., t. 182, p. 676, 1926), N. KRYLOFF *Sur différents procédés*, etc., chp. I (Annales de Toulouse, 1926).

ci-dessus mentionnés, comme des cas particuliers d'un procédé plus général qui se réduit à la définition des coefficients a_i par les équations

$$\int_0^1 L(u)M(\varphi_i)dx=0 \qquad (i=1, 2,...., m),$$

$M(y)$ étant une expression différentielle linéaire quelconque:

$$M(y)=y^{(l)}+B_1(x)y^{(l-1)}+ .... +B_l(x)y.$$

Nous allons étudier de plus près le cas

$$M(y)=y^{(k)}$$

comprenant, à ce que nous semble, certains avantages du procédé de W. RITZ et de celui de moindres carrés.

§ 3. - Retournons au cas général, où l'ordre k de l'équation (1) est un nombre quelconque. Supposone que dans l'intervalle (0,1) cette équation a une intégrale unique vérifiant les conditions frontières suivantes:

$$\alpha^{(j)}y(0)+\beta^{(j)}y(1)+\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i^{(j)}y^{(i)}(0)+\sum_{i=1}^{k-1}\beta_i^{(j)}y^{(i)}(1)=0 \qquad (12)$$
$$j=1, 2,...., k.$$

En désignant par $P(x)$ toute fonction satisfaisant aux conditions (12) et ayant la dérivée $P^{(k+r)}(x)$ qui vérifie la condition de Lipschitz d'ordre δ, choisissons les fonctions

$$\varphi_1(x), \qquad \varphi_2(x), \qquad \varphi_3(x),.... \qquad (13)$$

de sorte qu'elles satisfassent aux conditions (12) et permettent la représentation suivante:

$$P^{(k)}(x)=\sum_{i=1}^{m} C_i\varphi_i^{(k)}(x)+E^{r+\delta}(x).$$

Pour les conditions frontières du type

$$y(0)=y'(0)= .... =y^{(k-1)}(0)=0$$

on peut dans ce but poser par ex.

$$\varphi_{i+1}=x^{k+i};$$

dans le cas des conditions

$$\begin{aligned} &y(0)=y'(0)=y''(0)= .... =y^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}(0)=0 \\ &y(1)=y'(1)=y''(1)= .... =y^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}(1)=0 \end{aligned} \qquad k\equiv 0 \pmod 2$$

on pourrait utiliser les polynômes suivants:

$$\varphi_{i+1}=\frac{d^i}{dx^i}x^{\frac{k}{2}+i}(1-x)^{\frac{k}{2}+i}, \text{ etc.}$$

En général, on peut toujours construire les fonctions (13) sous la forme de certains polynômes.

Comme intégrale approchée de l'équation (1), nous allons prendre l'expression

$$y_m = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x),$$

où les coefficients a_i vérifient les équations

$$\int_0^1 L(u)\varphi_i^{(k)}(x)dx = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m). \tag{14}$$

En supposant que y appartient à la classe des fonctions $P(x)$, on peut former évidemment avec les équations (14) la combinaison linéaire suivante:

$$\int_0^1 L(u)(u^{(k)} + E^{r+\delta})dx = 0,$$

toute pareille à l'égalité (2); ce qui conduit aux conclusions tout à fait analogues à celles de la fin du paragraphe 1.

On peut donc énoncer le théorème suivant:

Si y est la solution unique du problème:

$$L(y) = y^{(k)} + A_1(x)y^{(k-1)} + \ldots + A_k(x)y = f(x)$$

$$\alpha^{(j)}y(0) + \beta^{(j)}y(1) + \sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i^{(j)}y^{(i)}(0) + \sum_{i=1}^{k-1}\beta_i^{(j)}y^{(i)}(1) = 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, k),$$

alors le procédé de réduites qui consiste dans l'évaluation des coefficients a_i des équations (13), *converge de la sorte que l'ordre de petitesse des différences*

$$u = y - y_m$$
$$u' = y' - y_m'$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u^{(k-1)} = y^{(k-1)} - y_m^{(k-1)}$$

est $\leqslant r+\delta$ toutes les fois où $y^{(k+r)}$ existe, et où $\frac{\Delta y^{(k+r)}}{\Delta x^{\delta}}$ est un nombre borné.

S. A. JANCZEWSKI (Leningrad - U. S. S. R.)

LES THÉORÈMES D'OSCILLATION DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES AUTOADJOINTS DU QUATRIÈME ORDRE

1. - Envisageons le système différentiel homogène linéaire

$$[\varrho(x)y'']''+[\psi(x)-\lambda\tau(x)]y=0 \qquad (a\leqslant x\leqslant b) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} U_i(y)\equiv c_{i1}(\varrho y'')_a'+c_{i2}(\varrho y'')_a+c_{i3}y_a'+c_{i4}y_a+ \\ +d_{i1}(\varrho y'')_b'+d_{i2}(\varrho y'')_b+d_{i3}y_b'+d_{i4}y_b=0 \qquad (i=1-4). \end{aligned} \tag{2}$$

On suppose ici que ϱ'', τ, ψ sont continues, $\varrho>0$, $\tau\geqslant 0$ et ne s'annule identiquement dans aucun intervalle partiel de (a, b), et que le système (1)-(2) est son propre adjoint; dès lors tous les nombres caractéristiques sont réels.

Un cas particulier important des systèmes (1)-(2) constituent les systèmes, ou les conditions $U_i(y)=0$ sont équivalents aux conditions

$$\begin{aligned} a_{j1}(\varrho y'')_a'+a_{j2}(\varrho y'')_a+a_{j3}y_a'+a_{j4}y_a=0 \qquad [j=1, 2] \\ b_{j1}(\varrho y'')_b'+b_{j2}(\varrho y'')_b+b_{j3}y_b'+b_{j4}y_b=0. \end{aligned} \tag{3}$$

Nous les nommons les systèmes de Sturm.

Nous avons démontré dans (A), (C), (E) [1] que chaque système (1)-(2) est — à un changement de x en $a+b-x$ près — équivalent à un système aux conditions d'une des dix formes canoniques:

I
$$\begin{aligned} (\varrho y'')_a'-A_0y_a'+A_1y_a+M_4y_b'+M_1y_b=0, \\ (\varrho y'')_a+A_2y_a'+A_0y_a+M_2y_b'+M_3y_b=0 \\ (\varrho y'')_b'+M_3y_a'-M_1y_a-B_0y_b'+B_1y_b=0, \\ (\varrho y'')_b-M_2y_a'+M_4y_a+B_2y_b'+B_0y_b=0; \end{aligned}$$

---

[1] Nous citerons nos articles de la manière suivante:

(A) *Sur quelques problèmes aux limites pour les équations différentielles linéaires du quatrième ordre.* Comptes Rendus, t. 184, 1927, p. 141.

(B) *Les théorèmes d'oscillation des problèmes réguliers de Sturm pour les équations différentielles linéaires du quatrième ordre.* Comptes Rendus, t. 184, 1927, p. 261.

(C) *Sur les systèmes différentielles homogènes du quatrième ordre.* Comptes Rendus, t. 186, 1928, p. 287.

(D) *Les théorèmes d'oscillation des systèmes différentiels homogènes réguliers du quatrième ordre.* Comptes Rendus, t. 186, 1928, p. 413.

(E) *Oscillation theorems for the differential boundary value problems of the fourth order.* Annals of Mathematics, t. 29, 1928, pp. 521-542.

(F) *Oscillation theorems for the differential boundary value problems of the fourth order.* II. Annals of Mathematics, t. 31, 1930.

II $(\varrho y'')_a' + A_3(\varrho y'')_a + A_4 y_a + L_4 y_b' + L_1 y_b = 0,$
$y_a' + A_3 y_a + L_2 y_b' + L_3 y_b = 0$
$(\varrho y'')_b' - L_3(\varrho y'')_a - L_1 y_a - B_0 y_b' + B_1 y_b = 0,$
$(\varrho y'')_b + L_2(\varrho y'')_a + L_4 y_a + B_2 y_b' + B_0 y_b = 0;$

III $(\varrho y'')_a' + A_3(\varrho y'')_a + A_4 y_a + R_3(\varrho y'')_b + R_1 y_b = 0,$
$y_a' + A_3 y_a + R_2 y_b = 0$
$(\varrho y'')_b' - R_2(\varrho y'')_a - R_1 y_a + R_3(\varrho y'')_b + B_4 y_b = 0,$
$y_b' - R_3 y_a + B_3 y_b = 0;$

IV $(\varrho y'')_a + A_5 y_a' + E_3 y_b' + E_1 y_b = 0, \quad y_a + E_2 y_b = 0$
$(\varrho y'')_b' + E_2(\varrho y'')_a' + E_1 y_a' - B_0 y_b' + B_1 y_b = 0,$
$(\varrho y'')_b - E_3 y_a' + B_2 y_b' + B_0 y_b = 0;$

V (VII) $y_a' + H_1 y_b' + H_3 y_b = 0, \quad y_a + H_2 y_b = 0$
$(\varrho y'')_b' + H_2(\varrho y'')_a' - H_3(\varrho y'')_a - B_0 y_b' + B_1 y_b = 0,$
$(\varrho y'')_b + H_1(\varrho y'')_a + B_2 y_b' + B_0 y_b = 0$ (1);

VI (V) $(\varrho y'')_a + A_5 y_a' + W y_b = 0, \quad y_a = 0$
$(\varrho y'')_b' + W y_a' + B_3(\varrho y'')_b + B_4 y_b = 0, \quad y_b' + B_3 y_b = 0;$

VII (VIII) $y_a' + S_2 y_b = 0, \quad y_a + S_1 y_b = 0$
$(\varrho y'')_b' + S_1(\varrho y'')_a' - S_2(\varrho y'')_a + B_3(\varrho y'')_b + B_4 y_b = 0, \; y_b' + B_3 y_b = 0;$

VIII (VI) $(\varrho y'')_a + A_5 y_a' + T y_b = 0, \quad y_a = 0$
$y_b = 0, \quad (\varrho y'')_b - T y_a' + B_5 y_b' = 0;$

IX $y_a' + F y_b' = 0, \quad y_a = 0, \quad y_b = 0, \quad (\varrho y'')_b + F(\varrho y'')_a + B_5 y_b' = 0;$

X $y_a = y_a' = 0, \quad y_b = y_b' = 0.$

Les systèmes de Sturm se réduisent aux mêmes formes canoniques, seulement nous aurons pour eux $M_i = L_i = R_i = E_i = H_i = W = S_i = T = F = 0$. Nous établissons encore que $+\infty$ peut être le seul point limite des nombres caractéristiques des systèmes (1)-(2). Voir (A), (C), (E).

2. - Nous divisons tous les systèmes (1)-(2) par les catégories suivantes: systèmes où les déterminants $\Delta \equiv \left|\frac{c_{11},\ldots,\, c_{14}}{c_{41},\ldots,\, c_{44}}\right| = \left|\frac{d_{11},\ldots,\, d_{14}}{d_{41},\ldots,\, d_{44}}\right|$ [égaux par ce que les condition (2) sont autoadjoints] sont $\neq 0$; systèmes où $\Delta = 0$ et qui ne sont pas systèmes de Sturm; systèmes de Sturm [ici Δ est aussi $= 0$]. Si nous avons $\Delta = 0$, alors deux des conditions (2) peuvent être transformées à la forme:

(4) $$\sum_{j=0}^{3} (-1)^j a_j Y_a^{3-j} = 0, \qquad \sum_{j=0}^{3} b_j Y_b^{3-j} = 0 \quad (2).$$

(1) Les numéros mis en parenthèses sont employés dans (A), (B), (E). La numération des autres articles est celle de l'article présent.

(2) Nous écrirons pour abréger: $Y^0 = y$, $Y^1 = y'$, $Y^2 = \varrho y''$, $Y^3 = (\varrho y'')'$; *nc*, nombre caractéristique; *fc*, fonction caractéristique [fondamentale]; *fcn* — *fc*, correspondante au *nc* λ_n

Si Δ est $\neq 0$, les conditions (2) sont équivalents aux conditions

$$(5) \qquad Y_a^k = \sum_{j=0}^{3} p_{kj} Y_b^{3-j} \qquad \text{ou} \qquad Y_b^k = \sum_{j=0}^{3} q_{kj} Y_a^{3-j}$$
$$[k=0-2;\ q_{kj}=(-1)^{k+j+1}p_{jk}].$$

Nous nommons réguliers tous les systèmes où sont vérifiées les conditions:

(*) Dans le cas $\Delta=0$, a_j ont le même signe, b_j ont le même signe;

Dans le cas $\Delta\neq 0$, p_{kj} ont le même signe (1) [quelques uns des coefficients a_j, b_j, p_{kj} peuvent être aussi nuls].

3. - En se servant de la méthode de continuité (2) nous obtenons les théorèmes d'oscillation des systèmes réguliers. Ces systèmes ont une infinité de nombres caractéristiques λ_s; $\lambda_0,\ldots,\lambda_{m+1}$ sont irréguliers [leurs *fc* peuvent avoir un nombre indéfini des zéros]. Les λ_{m+2}, $\lambda_{m+3},\ldots$ sont tous >0, $\lambda_{m+2}\geqslant\lambda_{m+1}$ et $>\lambda_m,\ldots,\lambda_0$ et nous avons λ_{2n} et λ_{2n+1} [resp. λ_{2n-1} et λ_{2n} (3)] plus grands que tous les λ_k du rang plus petit et plus petits que tous les λ_k de rang plus grand [$2n$ ou $2n-1\geqslant m+2$]. Les propriétés oscillatoires des *fc* correspondants à ces (4) *nc* sont données par une des quatre théorèmes d'oscillation A^0, B^0, C^0, D^0: Les *fc* $2n+1$ et $2n$ [resp. $2n-1$ et $2n$ (3)] ont indépendemment l'une de l'autre dans $a<x<b$ un nombre suivant de zéros simples:

[D^0] $2n+1$ ou $2n$ ou $2n-1$ ou $2n-2$ [resp. $2n$, $2n-1$, $2n-2$, $2n-3$];
[C^0] $2n+1$ ou $2n$ ou $2n-1$ [resp. $2n$, $2n-1$, $2n-2$];
[B^0] $2n+1$ ou $2n$ [resp. $2n$, $2n-1$];
[A^0] $2n$ [resp. $2n-1$] et encore un zéro dans $a\leqslant x\leqslant b$.

Pour les systèmes de Sturm l'on a $\lambda_m<\lambda_{m+1}<\ldots$, $\lambda_m>\lambda_{m-1}\ldots$, λ_0 et la *fcn* [$n\geqslant m$] a dans $a<x<b$ un nombre suivant de zéros simples:

[E^0] n; ou [F^0] n ou $n-1$; ou [G^0] n ou $n-1$ ou $n-2$ (4).

---

(1) Les définitions de régularité données dans (B), (D), (E) sont les cas particuliers de la définition actuelle.

(2) L'exposition complète de la méthode de continuité et de tous les théorèmes, qui s'y rattachent, voir dans (E) et dans (F).

(3) Nous supposons dans IX, $F<0$ [resp. >0]; dans VIII, $T>0$ [resp. <0]; dans VII, $S_i\geqslant[\leqslant]0$; dans VI, $W<[>]0$; dans V, $H_i\geqslant[\leqslant]0$; dans IV, E_1, $E_3\leqslant[\geqslant]0$, $E_2\geqslant[\leqslant]0$; dans III, $R_1\geqslant[\leqslant]0$, R_2, $R_3\leqslant[\geqslant]0$; dans II, L_1, $L_4\geqslant[\leqslant]0$, L_2, $L_3\leqslant[\geqslant]0$; dans I, $M_i\geqslant[\leqslant]0$.

(4) Pour les systèmes de Sturm tous les $nc\lambda_n$ [$n\geqslant m$] sont de l'index 1, ayant seulement une *fc* correspondante. Dans le cas général les $nc\lambda_s$ [$s\geqslant m+2$] peuvent être maximum de l'index 2, c'est-à-dire peuvent avoir maximum deux *fc* correspondantes. Nous disons dans ce dernier cas qu'il y a deux *nc* égaux λ_s et $\lambda_{s\pm1}$ et nous désignons par *fc* s et *fc* $s\pm1$ deux *fc* indépendants qui correspondent au *nc* multiple en question. Quand aux autres *nc*, le nombre des *fc* indépendants qui correspondent à eux est aussi égal au nombre de ces *nc*, qui est obtenu dans le théorème.

Le théorème D^0 provient des systèmes aux conditions canoniques du type I; C^0 des systèmes II, IV; B^0 des systèmes III, V, VI, VIII; A^0 des systèmes IV [avec $\Delta \neq 0$], V [avec $\Delta \neq 0$], VII, IX. Dans quelques cas particuliers des systèmes V [avec $\Delta = 0$], IV [avec $\Delta = 0$], II, I on obtient un théorème d'oscillation plus élementaire A^0 ou B^0 [voir par exemple dans (D)].

Le théorème E^0 provient des systèmes de Sturm, considérés dans (B), (E) (1); G^0 des systèmes aux conditions du type I; F^0 de tous les autres systèmes réguliers de Sturm.

On peut prendre pour m le rang du plus petit nc régulier positif surpassant le rapport de max ψ à min τ (2) pour le système qui résulte du système donné quand on remplace ψ par min ψ et τ par max τ. Si l'on a $\psi \equiv 0$ alors dans le théorème

	D^0	C^0	B^0	A^0	G^0	F^0	E^0
on prend	$m=7$	6	5	5	6	5	4.

L'existence des λ_k irréguliers est vérifiée par des exemples [voir (B), (E)].

Les propriétés des *fc* pour les systèmes réguliers sont ainsi établies. Quand aux systèmes où les conditions (*) ne sont pas vérifiées, ici: 1° les *fc* peuvent avoir les zéros multiples pour $a < x < b$, 2° les théorèmes d'oscillation dépendent des valeurs numériques des coefficients des conditions aux limites (3).

---

(1) Nous avons supposé là A_0, B_0, B_2, $B_3 \geqslant 0$; A_2, $A_3 \leqslant 0$.

(2) Nous supposons que si $\psi(x)$ est $\not\equiv 0$, alors on a $\tau(x) > 0$; dans le cas $\psi \equiv 0$, $\tau(x)$ est $\geqslant 0$.

(3) Cette dernière circonstance est démontrée par des exemples. On peut entre autres construire des systèmes [avec $\varrho = 1$, $\psi = 0$, $\tau = \text{const.}$] où les coefficients c_{ik} d_{ik} sont choisis en sorte que nous avons une *fc* sans zéros dans $a < x < b$ [ou, si l'on veut, avec 1, 2,...., zéros] correspondante à un nc λ^* tel que l'on a: 1) $\lambda^* > M$; 2) λ^* plus grand que N autres nc [M, N deux nombres aussi grands que l'on veut]. Voir pour cela un article spécial dans « Göttinger Nachrichten ».

C. POPOVICI (Jasi - Romania)

NOUVELLES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE VOLTERRA

1. - Sous ce titre M. VOLTERRA a bien voulu m'honorer en publiant (1) une de mes Notes, dans laquelle je montrais que l'équation

$$\varphi(x)=\int_{\alpha x}^{x} k(x, s)f(s)ds \tag{1}$$

admet une infinité de solutions, parmi lesquelles une infinité qui prennent une valeur donnée pour une valeur x_0 de la variable, et même pour $x=0$.

Également pour l'équation

$$f(x)-P(x)f(\alpha x)+\lambda\int_{0}^{x} f(s)K(x, s)ds=Q(x) \tag{2}$$

M. PICARD a démontré (2) l'unicité d'une solution. Sous les mêmes conditions j'ai démontré (3) qu'il y a une infinité.

Ces solutions servent pour déterminer l'intégrale de l'équation hyperbolique de Laplace prenant des valeurs données sur deux courbes données. MM. GOURSAT (4), PICARD (5), PICONE (6), JONESCO (7) ont trouvé qu'il y a une solution unique. Il résulte de ce que je viens de dire que cette solution n'est pas unique et j'ai montré qu'avec moins de restrictions, on peut avoir des intégrales prenant en général des valeurs données sur trois et même quatre courbes données.

2. - Reprenant la question, je vais faire ressortir en évidence la généralité de ces solutions, et ensuite montrer qu'on peut trouver des solutions dans des cas où certaines solutions sont divergentes et aussi comment on trouve des

---

(1) Circolo Palermo, 1915.
(2) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 1907.
(3) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 1914.
(4) Annales de Toulouse, 1903-1904.
(5) Loc. cit., 2.
(6) Circolo Palermo, 1910.
(7) Bulletin de la Société Mathématique de France, 1927.

solutions lorsque les équations fonctionnelles sont incompatibles et aux points singuliers.

Les équations (1) et (2) servent pour déterminer l'intégrale de l'équation du second ordre

$$s+a(x, y)p+b(x, y)q+c(x, y)z=d(x, y)$$

qui prend des valeurs données sur deux droites $y=x$, $y=ax$. Lorsque, au lieu de deux droites, on a deux courbes données, alors par un changement de variables on est ramené au cas où l'une des courbes est $y=x$ et l'autre $y=x_1(x)$, x_1 une fonction connue.

Si nous considérons l'équation (2), p. ex., dans laquelle on change x en x_1, alors autant la solution de M. PICARD si elle reste convergente, que les solutions que j'ai données dans mes notes (et dont j'ai montré qu'il y a une infinité de manières pour en construire de convergentes), conviennent à l'équation intégrale proposée. Dans ces solutions interviennent des fonctions, notamment P et Q, dans lesquels x est remplacé successivament par $x_k(x)=x_1(x_{k-1})$ comme on le verra.

CHAPITRE I.

3. - On peut aller plus loin: donnons nous sur une surface une suite dénombrable, *dans les deux sens*, de courbes:

$$x_{-m},\ldots,\ x_{-1},\ x,\ x_1,\ldots,\ x_n$$

simples courbes de référence, tracés à la main, sans expression analytique nécessairement (le cas où les courbes correspondent à des expressions analytiques, étant considéré comme un cas particulier) et donc sans que l'une des courbes x_k p. ex. soit connue, dès qu'on connait une seule courbe de l'ensemble x_1 (comme on sous entend généralement le problème). Considérons ensuite un ensemble de courbes, aussi arbitraires, coupant les premières en des points $x_k(x)$; mais cet ensemble ne sera plus dénombrable, il dépendra d'un paramètre x. Avec ces prémisses l'équation fonctionnelle (1) ou (2), cette dernière, p. ex., s'écrira:

$$\text{(II)} \qquad f(x)-P(x)f(x_1)+\lambda\int_0^x f(s)K(x, s)ds=Q(x)$$

et aura un sens. P, Q, K sont des fonctions données et la solution de M. PICARD (en changeant $a^n x$ en x_n) si elle reste convergente; autant que les miennes (en changeant $a^{\pm n}x$ en $x_{\pm n}$) et qui peuvent être rendues convergentes, conviennent à l'équation proposée.

En effet, en apliquant le méthode de M. PICARD, on peut satisfaire à l'équation (II) per une fonction holomorphe en λ:

$$\text{(3)} \qquad f(x)=f_0(x)+\lambda f_1(x)+\ldots.\ \lambda^n f_n(x)+\ldots.,$$

les f_n étant des solutions de l'équation fonctionnelle de même forme:

$$f_n(x) - P(x) f_n(x_1) = Q_n(x) \tag{4}$$

avec

$$Q_0(x) = Q(x); \qquad Q_n(x) = -\int_0^x f_{n-1}(x) K(x, s)\, ds. \tag{4'}$$

Or remarquons que l'équation (4) peut s'écrire:

$$f_n(x) = f_n(x_p) \Pi_{p-1}(x) + \sum_{k=0}^{p} \Pi_k(x)\, Q_n(x_k) \tag{5}$$

$$\Pi_k(x) = P(x),\ P(x_1),\ldots,\ P(x_{k-1}); \qquad \Pi_0(x) = 1.$$

On aura l'intégrale cherchée en prenant

$$f_0(x) = a\Pi(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k(x)\, Q(x_k); \qquad \Pi = \lim_{k=\infty} \Pi_k \tag{5'}$$

et dans les autres $f_n(0) = 0$, $p = \infty$.

4. - Cette solution sera en général divergente parce qu'autant la série (3) que même chaque terme à part de cette série, les f_n (5), peuvent être divergentes. Je vais montrer:

1°) Lorsque la solution (3) est convergente, on peut former une infinité de solutions prenant une valeur donnée pour $x = x_0$.

2°) Lorsque la solution (3) est divergente, on peut aussi construire une infinité d'autres solutions convergentes.

Cela résulte immédiatement de mes notes. En effet on peut ajouter à une solution (3) formelle (divergente) ou non (convergente) une infinité de solutions, en remplaçant f_n chaque fois qu'on le calcule par la formule:

$$\varphi_n = f_n + V_n \tag{6}$$

où

$$V_n(x) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} R_n(x_q) \Pi_q(x) \tag{7}$$

les R_n étant des fonctions arbitraires et uniformes.

On aura ensuite la précaution de remplacer dans Q_{n+1} (4') les f_n par φ_n (6). La série $\sum \varphi_n$ sera aussi une solution de notre équation.

Si la série $\sum f_n$ est divergente on dispose des fonctions arbitraires R_n (avec la précaution du parag. 3 de ma Note Circolo), pour que la solution $\sum \varphi_n$ soit convergente. On pourra s'arranger d'une infinité de manières d'après les modèles donnés dans mes notes et on aura une infinité de solutions. C'est le même artifice que celui de Weierstrass pour les facteurs primaires ou de Mittag-Leffler pour construire des fonctions à singularités données.

Si la série $\sum f_n$ est convergente, alors nécessairement les V_n doivent être choisies convergentes. J'ai montré pour le cas $x_1 = ax$ comme on peut avoir des solutions convergentes; montrons-le aussi pour le cas général. Cela peut se démontrer en principe ainsi: quelque soient les courbes de référence $x_{\pm n}(x)$ ces courbes définissent à leur tour n comme fonction de $x_{\pm n}(x)$ et avec ces fonctions $n = u_n(x)$ on peut former d'une infinité de manières des fonctions R tel que (6) $\sum_{q=-\infty}^{+\infty} R(u_q)\Pi_q(x)$ soient convergentes. (Ex, lorsque $P(x)=1$ on peut prendre $R=\frac{1}{n^2}$, etc.). Je vais donner un exemple: l'équation $\varphi(ax)-\varphi(x)=Q(x)$ n'admet pas de solution, d'après M. GOURSAT si $\sum Q(a^n x)$ est divergente; ex

$$Q(x)=\frac{1}{Lx+i\theta}.$$

Pourtant cette équation admet la solution:

$$\sum_{1}^{n=\infty} \frac{1}{nLa+Lx+i\theta} - \frac{1}{nLa}$$

et aussi

$$\sum_{1}^{n=-\infty} \frac{1}{nLa+Lx+i\theta} - \frac{1}{nLa}$$

à ces solutions particulières on peut ajouter p. ex.:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a^{np}x^p}{1+ca^{nq}x^q}$$

(convergentes si c constante arbitraire).

On a ainsi une infinité de solutions uniformément convergentes pour toute valeur finie et non identiquement nulle (1) de x, malgré que $\sum Q_n(x)$ est divergent.

5. - Revenons au cas général, à nos courbes de référence:

Les fonctions $V_n(x)$, formes (7) nous les appellerons *fonctionnelles* P (périodiques); parce-qu'elles ne changent pas si l'on remplace $V(x_k)$ par $V(x_{k+1})P(x_k)$ ex:

$$V=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x_n^p}{1+cx_n^q}, \quad p<q \text{ satisfait à } V(x_{k+1})=V(x_k)$$

et est convergente toutes les fois que $x_{\pm n}$ tend soit vers zéro soit vers l'infini pourvu que l'on trouve p et q tel que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^q$ et $\sum_{n=1}^{\infty} x_{-n}^{p-q}$ soient convergentes.

Pour avoir des fonctionnelles P convergentes, nous ferons sur les courbes de référence $x_{\pm n}$ différentes hypothèses:

---

(1) Il s'agit de valeurs réelles de x; a étant supposé réel on prendra c et θ positifs.

Cas 1°) $x_{n+1}-x_n$ tend vers zéro et aussi $x_{-n-1}-x_{-n}$. Prenons le cas $P=1$. On trouve toujours une fonction φ tel que $\Phi(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi(x_{n+1}-x_n)$ soit convergente, alors Φ est la fonctionnelle P cherchée.

Cas 2°) $x_{n+1}-x_n$ tend vers l'infini, alors on aura des fonctions P convergentes de la forme

$$\Phi(x)=\sum\varphi\left(\frac{1}{x_{n+1}-x_n}\right).$$

Cas 3°) $x_{n+1}-x_n$ tend vers zéro pour $n=+\infty$ et vers infini pour $n=-\infty$ (ou inversement). Alors soit $p<q$ et $R_n=\frac{(x_{n+1}-x_n)^p}{1+c(x_{n+1}-x_n)^q}$ tendra *vers zéro* pour $n=+\infty$ comme $(x_{n+1}-x_n)^p$ et pour $n=-\infty$ comme $(x_{n+1}-x_n)^{p-q}$. Alors on peut trouver p et q telles que les fonctionnelles P: ex.: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R_n$ soient convergentes et si les nombres p et q n'existent pas, il existe φ tel que

$$\Phi=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi(R_n)$$

soit convergente.

Cas 4°) $x_{n+1}-x_n$ tend vers un limite a différente de zéro ou infini; alors on raisonne sur $x_{n+1}-x_n-a$ comme sur $x_{n+1}-x_n$ (al 1°).

Cas 5°) $x_{n+1}-x_n$ reste fini sans tendre vers une limite. Ce cas est impossible parceque si les $\varepsilon_n=x_{n+1}-x_n$ restent finis, alors ils doivent avoir au moins un point limite. Lorsqu'il y a *plusieurs points limite*, nous étudierons ce qui se passe au chapitre des fonctionnelles périodiques *revenantes*.

Cas 6°) $x_{n+1}-x_n$ ne reste pas fini, mais ne tend non plus vers l'infini; dans ce cas on ne peut donner des règles générales, il faut connaître la marche des courbes de référence pour chercher des solutions.

Les cas $P(x)+1$ s'étudient de la même manière, comme j'ai montré dans mes notes.

6. - *Il est intéressant de voir quand les fonctionnelles P sont continues au point limite même*, ex.: problème de M. GOURSAT [1].

Pour cela nous remarquons que:

$$V(x_{n+1})-V(x_n)=\frac{V(x_1)-V(x)}{P(x),\ P(x_1),\ldots,\ P(x_{n-1})}$$

(formule analogue à la formule (14) de ma note [2]). On voit que même si $\lim P(x_n)=1$, $V(x_n)$ sera continu si le produit $P(x)\ P(x_1)\ldots\ P(x_n),\ldots$ est divergent et non nul.

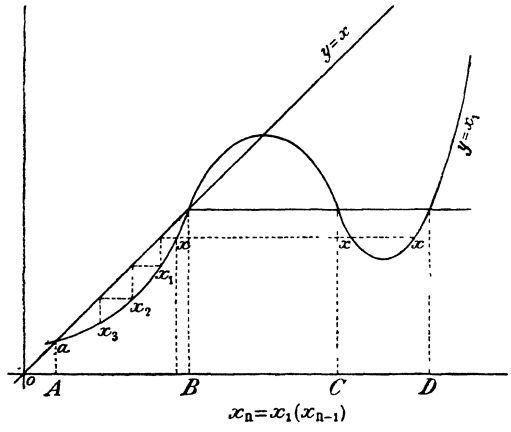
---

[1] Annales Toulouse, 1903-04.

[2] Circolo Palermo, 1915.

Dans les autres cas on peut construire des fonctionnelles P qui *prennent une valeur donnée* au point limite; mais elles n'y seront pas *uniformément convergentes.* On voit bien l'intérêt des singularités de ces solutions (autre que les solutions didactiques, regulières, etc.) parceque *chaque équation fonctionnelle donne des singularités spécifiques.* On a une infinité de solutions et les solutions d'après l'ancienne méthode (que l'on obtient avec des approximations successives) en ressortent comme des cas particuliers.

7. - Lorsque x_k est connu dès qu'on se donne une fonction de la suite ex.: x_1; $[x_k = x_1(x_{k-1})]$ comme, p. ex., le problème de M. GOURSAT (1), alors les points limite $x_{\pm n}$ sont à l'intersection de la droite $y=x$ avec $y=x_1(x)$. En général les points limite pour $n=+\infty$ ont le caractère de points d'équilibre stable pour $n=+\infty$ et instable pour $n=-\infty$ et réciproquement. Il y a évidemment plusieurs points limite qui correspondent à différentes régions de l'axe des x. Un point limite peut correspondre à plusieurs régions séparées. Je propose d'appeller *métropole* la région qui contient son point limite d'attraction et *colonies* les régions qui ne contiennent pas leur points limites d'attraction.



Aux trois points d'abscisses différentes, notés par la même lettre x correspond la même suite $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ qui admet comme point limite a. La région AB qui contient son point limite a sera la *metropole* et la région CD qui ne contient pas son point limite d'attraction a sera une *colonie.* Toutes les régions AB, CD,.... qui correspondent au même point limite a constituent ensemble l'*empire* du a. On crée par cette nomenclature suggestive une sorte de souveraineté mathématique.

8. - Lorsqu'on passe de x_{-k} à x_{-k-1} il arrive qu'on ait plusieurs branchements. On est libre de prendre à chaque passage le branchement d'après n'importe quel choix convenu pourvu que la solution soit convergente.

9. - En ce qui regarde les singularités aussi il faut faire attention; car il se peut qu'un pôle éloigné de $y=x_1(x)$ devienne pour $x_n(x)$ un pôle très près

(1) Ann. Toulouse, 1903-04.

du point limite qui sera dans ce cas un point singulier des solutions. Ex.: les deux courbes tangentes à l'origine $y=x$, $y=\frac{x}{1+cx}$ on voit que $y=x_1$ est holomorphe tant que $|x|<\frac{1}{c}$ mais $x_n=\frac{x}{1+ncx}$; l'origine sera ainsi un point singulier essentiel pour les solutions de $P(x)f(x_1)-f(x)=Q(x)$ même si P, x et Q sont holomorphes et même pour celles des solutions qui s'annullent pour $x=0$.

10. - On peut généraliser ces resultats pour les équations fonctionnelles intégro-différentielles de dégré supérieur autant de la forme de Volterra que de Fredholm. On aura une infinité de solutions; ainsi il n'est pas lieu de chercher, comme j'ai vu dans certains mémoires, pour une équation différentielle de dégré n et fonctionnelle la solution qui prenne, elle, autant que ses $n-1$ dérivées des valeurs données pour $x=x_0$, vu qu'il y a une infinité de ces solutions dépendant de fonctions arbitraires.

CHAPITRE II.

Solutions pour les équations incompatibles.

Nous avons vu comment on trouve une infinité de solutions, fait qui nous a permis d'aborder le cas de la *divergence*; c'est-à-dire lorsque la solution d'après la méthode classique est divergente, on peut la rendre convergente.

Nous allons maintenant aborder le cas d'*incompatibilité*. Prenons pour fixer les idées $P(x)=1$ et soit à résoudre:

$$u(x_1)-u(x)=\Phi(x). \tag{1}$$

La solution classique serait

$$u(x)=u(a)+\Phi(x)+\Phi(x_1)+\ldots.+\Phi(x_n)+\ldots. \tag{2}$$

On peut prendre $u(a)$ arbitraire, a étant la limite de x_n.

Si $\sum_{n=0}^{\infty}\Phi(x_n)$ est convergente on a une solution particulière; mais pour que la convergence puisse exister il faut que $\lim \Phi(x_n)=\varepsilon_n=0$; c'est-à-dire $\Phi(a)=0$.

I). Quelle est la solution si $\Phi(a)\neq 0$?

II). Quelle est la solution si même $\Phi(a)=0$, on a $\sum\Phi(x_n)$ divergente, ou même nettement infinie, *incompatibilité*?

On peut écrire

$$u(x_1)-u(x)=\Phi(x)-\Phi(a)+\Phi(a) \tag{3}$$

$u=V+Z$ et on doit résoudre les deux équations:

$$V(x_1)-V(x)=\Phi(x)-\Phi(a) \tag{V}$$

$$Z(x_1)-Z(x)=\Phi(a). \tag{Z}$$

Solution de l'équation (V):

$$V(x)=V(a)+\sum_{n=0}^{\infty}[\Phi(x_n)-\Phi(a)]. \tag{4}$$

Si $\sum[\Phi(x_n)-\Phi(a)]$ est convergente, la solution est trouvée pour (V).

Si $\sum[\Phi(x_n)-\Phi(a)]$ est divergente, on trouve *quand même une infinité de solutions.*

En effet soit:

$$\Phi(x_k)=\Phi(a)+(x_k-a)\Phi'(a)+\ldots.+\frac{\Phi^r(a)}{r!}(x_k-a)^r. \tag{5}$$

Donc

$$V(x)=V(a)+\Phi'(a)\sum_{p=0}^{\infty}(x_p-a)+\ldots.+\frac{\Phi^r(a)}{r!}\sum_{p=0}^{+\infty}(x_p-a)^r+\ldots. \tag{6}$$

Comme par hypothèse $\lim x_n=a$; il existe en général un nombre r tel que $\sum(x_p-a)^k$ soit convergent si $k\geqslant r$; mais il peut arriver même que $\sum(x_p-a)^k$ avec $k<r$ soit convergent et $\sum(x_p-a)^r$ soit nettement infini; p. ex., si les (x_p-a) contiennent un facteur β racine r ième de l'unité; alors il y a plus que divergence, on a *incompatibilité*, tout de même nous essayerons de réduire ce terme.

Pour les termes (6) pour lesquels $\sum(x_p-a)^q$ est convergente, on a la solution *holomorphe par rapport à la transformation* x_1, notion nouvelle; parce que la solution pourrait être holomorphe par rapport à x_1 et ne l'être pas par rapport à x et inversement. Il va de soi que si x_n est holomorphe par rapport à x alors $V(x)$ holomorphe en x_1 le sera en x; mais il faut prendre garde, car un pôle éloigné de x_1 peut s'approcher de a dans les x_n quoique $\lim x_n=a$; alors a sera un point singulier essentiel pour V. Supposons que a est une limite régulière.

Solution pour les termes incompatibles.

Ainsi donc supposons que le coefficient de $\frac{\Phi^r(a)}{r!}$ dans le développement de V est infini, ex.: tous les $(x_p-a)^r$ sont égaux. Il s'agit de résoudre quand même l'équation

$$V(x_1)-V(x)=\frac{\Phi^r(a)}{r!}(x_1-a)^r.$$

Commençons par le cas $r=0$ c'est-à-dire $\Phi(a)=k\neq 0$. Pour ce cas particulier nous aurons le solution de l'équation

$$Z(x_1)-Z(x)=h. \tag{Z}$$

Prenons $Z=\psi L\varrho$ tel que ψ soit une fonctionnelle P de l'équation

$$\psi(x_1)-\psi(x)=0.$$

L'équation (Z) se transforme alors dans une équation

$$\varrho(x_1)-e^{\frac{k}{\psi}}\varrho(x)=0$$

qui étant *moins particulière*, ne sera plus incompatible et on pourra la résoudre.

Le plus simple est de prendre pour ψ une constante arbitraire A.

Application: soit $x_1 = ax$. Prenons $Z(x) = \psi(x) Lx + x$. On aura

$$Z(x_1) = \psi_1 L_1 x + \chi_1 + \psi La.$$

Si $\psi = \frac{k}{La}$ et $\chi_1 - \chi = 0$ $\left(\text{ex } \chi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a^n x}{1 + ca^{2n}x^2}\right)$. On a une infinité de solutions.

Le même procédé doit être suivi lorsque $r \neq 0$. Dans tous les cas on trouve une infinité de solutions.

En resumé. La solution de l'équation proposée se compose:

a) De termes holomorphes par rapport à la substitution x_1.

b) De termes fonctionnels P pour réduire la divergence.

c) De termes non uniformes (fonctions logarithmiques ou modulaires) pour identifier les termes incompatibles.

Donc *ni la divergence ni l'incompatibilité* ne nous arrête pas, et en plus.

d) En ajoutant des fonctionnelles P *on a une infinité de solutions.*

Autres cas d'incompatibilité.

Fonctionnelles périodiques revenantes.

1. - J'ai dit que $x_n(x)$ peut avoir plusieurs points limite pour une valeur donnée de x. Cela arrive lorsque les courbes de référence sont telles que $x_{n+p} = x_n$. Le nombre des courbes est alors limité. Les *fonctionnelles* P qui interviennent dans ce cas nous les appellerons *revenantes.*

Le point de départ de ces questions m'est suggeré par la question suivante: M. GOURSAT se propose de déterminer la surface Z, intégrale de $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = 0$ qui prend des valeurs données sur les droites $y = \lambda x$, $y = -\lambda x$. On arrive à une équation fonctionnelle de la forme:

$$\varphi(-x) - \varphi(x) = g(x).$$

Si, p. ex., $g(x) = Cx^{2p}$; φ n'existe pas; parce que en changeant x en $-x$ on arrive à un système *incompatible.*

Pourtant nous pouvons donner une infinité de solutions:

$$\varphi(x) = u(x) + Kx^{2p} LV(x).$$

Avec deux fonctions arbitraires et uniformes u et V, dont u est paire et V impaire, L logarithme népérien, K une constante à déterminer.

Parmi ces solutions, on a *une infinité continues et s'annulant jusqu'aux dérivées d'ordre* $2p-1$ *pour* $x=0$. (Il suffit de prendre $u=0$). *La surface intégrale* Z *sera continue et admettra en chaque point un plan tangent déterminé,* malgré que d'après M. GOURSAT on ne devrait pas s'y attendre

parce que le rapport anharmonique des droites $y=\pm\lambda x$ et des caractéristiques (ici les axes) est égal à l'unité.

2. - Remarquons que cela tient à un fait plus général. Il n'y a pas seulement la substitution $x_1=-x$ qui donne $x_2=x$; mais aussi $x_1=\frac{x}{cx-1}$ donne $x_2=x$ et plus généralement $\lambda(x_1)=\frac{\lambda(x)}{c\lambda(x)-1}$, c constante arbitraire, λ étant une fonction arbitraire et uniforme, donne $\lambda(x_2)=\lambda(x)$ (et si l'on convient que les racines se correspondent) $x_2=x$.

L'équation: $\varphi(x_1)-\varphi(x)=g(x)$ est incompatible si $g(x)+g(x_1)\neq 0$, même si $g(0)=0$. Pourtant on peut la résoudre. Disons pour généraliser:

$\varphi(x_1)+\varphi(x)$ fonction paire par rapport à la transformation x_1;

$\varphi(x_1)-\varphi(x)$ fonction impaire par rapport à la transformation x.

Quelque soit $g(x)$ uniforme, on a une infinité de solutions:

$$\varphi(x)=\frac{g(x_1)-g(x)}{2}+K[g(x_1)+g(x)]L[V(x_1)-V(x)]+u(x_1)+u(x)$$

avec deux fonctions arbitraires et uniformes u et V, L log. et K constante à déterminer.

Une fonction paire par rapport à x ne l'est pas nécessairement par rapport à x_1.

Si $g(x)$ contient en facteur x^p, alors $g(x_1)\pm g(x)$; $\left(x_1=\frac{x}{cx-1}\right)$ s'annule ainsi que ses $p-1$ dérivées pour $x=0$.

3. - Le cas du rapport anharmonique se généralise encore davantage. Supposons tracées p courbes de référence, avec ou sans expressions analytiques assujeties à la condition $y=x_{n+p}=x_n$.

Pour que l'équation $\varphi(x_1)-\varphi(x)=g(x)$ admette une solution, il faudrait que

$$G(x)=g(x)+g(x_1)+\ldots.+g(x_{p-1})=0.$$

Dans ce cas, et *même lorsque* $G(x)\neq 0$ nous pouvons donner une *infinité de solutions.*

Ici la généralisation de fonction paire et impaire par rapport à la transformation x_1 est plus compliquée; mais elle va résulter de la suite (ex.: $G(x)$ est une fonction paire).

Si $G(x)=0$ on a la solution:

$$\varphi(x)=\frac{g+2g_1+3g_2+\ldots.+pg_{p-1}}{p}+\sum_{k=1}^{p}V_k.$$

On désigne toujours par g_k le $g(x_k)$ par V_k le $V(x_k)$; V sera une fonction arbitraire et uniforme.

Lorsque $G(x)\neq 0$, la solution sera

$$\varphi=\frac{g+2g_1+3g_2+\ldots.+pg_{p-1}}{p}+KGLZ+\sum_{k=1}^{p}V_k$$

V fonction arbitraire et uniforme, K une constante à déterminer, L log. népérien, et

$$Z=\varrho\varepsilon+\varrho_1\varepsilon_1+\ldots.+\varrho_{p-3}\varepsilon_{p-3}+\varepsilon_{p-2}$$

$\varepsilon_k=\psi_{k-1}-\psi$ fonction arbitraire et uniforme et les ϱ déterminés par les équations

$$-\varrho=\frac{\varrho_1}{\varrho-1}=\frac{\varrho_2}{\varrho_1-1}=\ldots.=\frac{1}{\varrho_{p-3}-1}$$

ce qui donne $(-\varrho)^p+1=0$. On a (exceptant $\varrho=1$) $p-1$ *systêmes des solutions.* On aura $p-1$ formes: Z généralisent la notion de fonction impaire.

4. - Prenons les équations plus générales

$$Pf_1-f+\lambda\int_0^x K(x,s)f(s)ds=Q.$$

On doit résoudre des fonctionnelles telles que

$$Pf_1-f=g.$$

Donc:

$$PP_1f_2-f_1=g_1$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\overline{PP_1,\ldots.,P_{n-1}}f_n-f=g+Pg_1+PP_1g_2+\ldots.+PP_1,\ldots.,P_{n-2}g_{n-2}.$$

Maintenant si $x_n=x$ et $f_n=f$. On a une infinité de solutions

$$f=\frac{g+Pg_1+PP_1g_2+\ldots.+PP_1,\ldots.,P_{n-2}g_{n-2}}{PP_1,\ldots.,P_{n-1}-1}+u+Pu_1+PP_1u_2+\ldots.+P,\ldots.,P_{n-2}u_{n-1}$$

avec u fonct. arbitraire.

Si le discriminant $PP_1,\ldots.,P_{n-1}-1$ des P est différent de zéro on a f; mais si ce *discriminant est nul* ex. $p=e^{u_1-u}$, u étant une fonction arbitraire et uniforme, alors f devra être infini (*incompatibilité*) ou indéterminé:

Il y aura quand même *dans les deux cas une infinité de solutions.*

Ainsi si le numérateur de f est aussi nul, on a une solution qui représente une grande analogie avec le rapport des dérivées de la fraction indetérminée $\frac{0}{0}$, cette solution est

$$f=\frac{g+2Pg_1+3PP_1g_2+\ldots.+(n-1)PP_1,\ldots.,P_{n-2}g_{n-1}}{n}+V$$
$$V=v+Pv_1+PP_1v_2+\ldots.+PP_1,\ldots.,P_{n-2}v_{n-1};$$

v étant une fonction arbitraire et uniforme (V généralise la notion de fonction paire).

5. - Lorsque le discriminant est nul et $G\neq 0$ alors $f=\infty$, *incompatibilité.* Pourtant on a:

$$f=\frac{g+2Pg_1+3PP_1g_2+\ldots.+(n-1)PP_1,\ldots.,P_{n-2}g_{n-1}}{n}++KGLZ+V$$

avec deux fonctions arbitraires et uniformes v et ψ, cette dernière rentre dans Z qui a la même composition qu'au parag. 4.

On a donc, dans tous les cas, une infinité de solutions.

6. - Toutes ces considérations se généralisent pour une équation

$$E=\sum_i P_{ik}f_k - Q=0, \qquad x_{n+p}=x_n$$

et même pour des équations fonctionnelles non linéaires par rapport aux f. Lorsque le discriminant des f est nul, il faut que l'un des f se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ pour avoir une solution uniforme. Dans tous les autres cas d'incompatibilité il faut faire usage des *fonctionnelles* P non uniformes (avec des logarithmes ou fonctions modulaires, etc.), comme nous l'avons fait au chapitre précédent.

En généralisant les résultats trouvés pour les équations du dégré 1 par rapport à une transformation x_1, on voit de suite que les solutions d'une équation du dégré p (ex.: l'équation E) dépendent de p fonctions arbitraires et de leurs transformées successives en x_1 et x_{-1}.

L. POMEY (Paris - Francia)

RESUMÉ D'UNE THÉORIE SYNTHÉTIQUE DES ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE FINI OU INFINI, À UN NOMBRE FINI OU INFINI DE VARIABLES, ET DE LEURS APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES OU AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

1. - Introduction. Objet de la présente Communication. Les nouvelles équations fonctionnelles que M. VITO VOLTERRA a, le premier, considérées et qu'il a dénommées *équations intégro-différentielles aux dérivées partielles* (1), sont susceptibles de jouer un rôle de la plus haute importance, ainsi que l'a fait voir l'illustre géomètre, en Mécanique et en Physique Mathématique.

En Analyse pure, elles présentent un intérêt tout spécial en raison de leur grand degré de généralité: elles contiennent en effet, comme l'on sait, sous des signes d'intégration (simple ou multiple) non seulement la fonction inconnue — comme cela a lieu pour les équations intégrales — mais encore certaines de ses dérivées partielles de divers ordres par rapport aux variables indépendantes.

De ce fait elles renferment, à titre de cas particuliers, les équations intégrales à une ou plusieurs variables ainsi que les équations différentielles ordinaires — ou aux dérivées partielles — sans d'ailleurs leur être réductibles en général (2).

Par suite, tout résultat les concernant s'applique automatiquement et directement à ces derniere types d'équations.

Or une équation différentielle, par exemple, se montre parfois plus maniable après qu'elle a été transformée par des intégrations convenables et mise sous forme d'une équation intégrale ou intégro-différentielle, comme si l'intégration était en quelque sorte — suivant une remarque de M. HADAMARD — un instrument de calcul plus puissant et plus commode que la différentiation.

On voit donc qu'il y aura souvent tout avantage à traiter du premier coup le Cas général des équations intégro-différentielles anx dérivées partielles.

On est ainsi conduit tout d'abord à reprendre à propos de ces dernières, certains problèmes fondamentaux envisagés depuis longtemps pour les équations différentielles.

---

(1) Voir: V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes.* Gauthier-Villars, 1913, p. 53.

(2) Voir: V. VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles.* Gauthier-Villars, 1913, p. 146.

Celles-ci d'ailleurs, par choc en retour, pourront en tirer à l'occasion un réel bénéfice.

C'est en suivant la voie ainsi tracée que j'ai cherché à constituer les éléments d'une théorie de ces équations intégro-différentielles aux dérivées partielles, à limites supérieures d'intégration *variables*, théorie que je me propose d'esquisser ici dans ses grandes lignes, en exposant succinctement les résultats obtenus — dont la plupart ont été publiés aux « Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences » de 1923 à 1928 ainsi que dans le « Journal de l'Ecole Polytechnique » (1924) et au « Giornale di Matematiche » (1925) — et en indiquant d'un mot les méthodes employées ainsi que diverses applications aux équations différentielles.

2. - Résumé des principaux résultats obtenus relativement aux équations integro-différentielles (à une ou plusieurs variables).

A) La première question qui se pose au sujet des équations en question, est d'établir les *théorèmes d'existence* et *les conditions d'unicité* de leurs solutions.

Pour répondre à cette question, je me suis placé d'abord principalement au point de vue des fonctions analytiques, les variables indépendantes étant supposées complexes.

Je suis ainsi arrivé à cette conclusion — extension de celle de CAUCHY pour les systèmes différentiels — savoir: qu'il existe en général une solution et une seule qui est holomorphe dans une portion *suffisamment restreinte* du domaine d'holomorphie des coefficients et fonctions donnés, sous réserve parfois de conditions accessoires simples.

B) Un second problème, qui dérive immédiatement du précédent, consiste à rechercher un domaine d'existence des solutions aussi étendu que possible — ce qui constitue proprement l'étude de leurs singularités.

A cet égard, je me suis spécialement attaché au cas remarquable où l'on peut être assuré a priori que les solutions existent dans *tout* le domaine d'holomorphie des coefficients, ou, tout au moins dans un domaine intérieur à ce dernier et n'en différant *qu'infiniment peu* (c'est-à-dire de telle sorte que les deux frontières restent à une distance arbitrairement petite ε l'une de l'autre).

J'appelle *normale* — ou encore *pantéténienne* ($\pi\alpha\nu\tau\eta$ partout; $\tau\varepsilon\iota\nu\omega$: je prolonge, j'étends) — toute équation dont la solution jouit de cette propriété. Le prototype classique de la famille des équations *normales* est l'équation différentielle ordinaire *linéaire.*

Remarquons en passant que ce second problème relatif à la recherche de pareilles équations normales (à singularités fixes) s'apparente à celui qu'ont traité principalement FUCHS, POINCARÉ, M. PICARD et M. PAINLEVÉ, et qui consiste à déterminer les équations différentielles algébriques dont l'intégrale générale est uniforme.

Or voici le fait curieux, et de nature tout-à-fait générale, qui se dégage comme conclusion de l'ensemble de mes recherches sur ce sujet. C'est que les *ordres des dérivées* figurant sous les intégrales et les *ordres de multiplicité de ces intégrales* — que j'appelle respectivement *ordres différentiels et ordres intégraux* de l'équation — peuvent jouer un rôle important dans la question; il est en effet permis de dire, au moins grosso modo, que: *plus les ordres intégraux sont grands par rapport aux ordres différentiels* (toutes les autres données restant les mêmes), *plus le domaine d'existence des solutions peut s'élargir,* et cela *jusqu'à arriver à coincider* (*ou presque*) *avec celui des coefficients,* l'équation devenant alors certainement *normale.*

J'ai dit: *grosso modo,* car en réalité dans le cas général, les ordres intégraux doivent être également grands par rapport aux dimensions des domaines, ainsi que par rapport à $\frac{1}{\varepsilon}$ et par rapport aux modules maxima des coefficients.

Ainsi se trouve mis en évidence le fait général de l'existence d'une vaste catégorie d'équations intégro-différentielles (et par suite aussi différentielles) qui sont *normales.*

Observons que, dans cette circonstance, tout se passe comme si l'intégration suffisamment réitérée arrivait à dissoudre les singularités qui feraient obstacle au prolongement analytique.

3. - Formation des développements en série représentant les solutions. Revenons sur ces divers points pour les préciser en indiquant le principe de la méthode de démonstration adoptée. Cette méthode fait découler naturellement tous les résultats mentionnés d'une source unique: un développement en série, à termes récurrents, de la solution.

Ce développement à lui seul renferme en germe tout le reste de la théorie, qui mérite bien ainsi l'épithète de *synthétique.* Il condense les propriétés de la solution et les révèle par sa structure même. Il suffit d'ailleurs, si l'équation est *normale,* à représenter la solution dans *tout* son domaine d'existence.

Pour plus de clarté, commençons par un exemple simple et en nous bornant à deux variables complexes indépendantes x, y (les raisonnements étant les mêmes pour un nombre *quelconque* de variables). Soit donc l'équation intégro-différentielle non linéaire aux dérivées partielles [1]

$$(1) \qquad \varphi(x,y)=f(x,y)+\lambda\int_m\int_p K(x,y,t,v)\varphi(t,v)\,\frac{\partial^{q+r}\varphi(t,v)}{\partial t^q\partial v^r}\,dt^m dv^p,$$

où $\varphi(x,y)$ est la fonction inconnue; les coefficients $f(x,y)$ et $K(x,y,t,v)$ sont supposés holomorphes tant que la variable indépendante x et la variable d'inté-

[1] Voir Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, 5 septembre 1927.

gration t ne sortent pas d'un certain domaine D_x (borné, complet et simplement connexe), et qu'en même temps y et v ne sortent pas d'un domaine analogue D_y. Les intégrales m-uple et p-uple, $\int_m$ et $\int_p$, sont prises le long de deux lignes rectifiables L_x et L_y, qui seront les plus courts chemins joignant, dans D_x et D_y respectivement, deux origines fixes x_0 et y_0 aux points variables x et y (ceux-ci jouant le rôle de limites supérieures d'intégration); $\int_m F(t)dt^m$ désigne donc

$$\int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2, \ldots, \int_{x_0}^{t_{m-1}} F(t_m)dt_m$$

(t_1, t_2,...., t_m étant des variables d'intégration).

Enfin λ désigne un paramètre numérique.

Il est évident que l'équation (1) est *formellement* satisfaite par la série

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \varphi_n(x, y),$$

dont le premier terme est $\varphi_0(x, y) = f(x, y)$ et dont ensuite un terme quelconque $\varphi_n(x, y)$ se déduit des précédents par la formule de récurrence

$$\varphi_n(x, y) = \lambda \int_m \int_p K(x, y, t, v)\omega_{n-1}(t, v)dt^m dv^p$$

en posant (suivant la règle de CAUCHY pour la multiplication des séries)

$$\omega_{n-1}(t, v) = \sum_{i=0}^{i=n-1} \varphi_i(t, v) \frac{\partial^{q+r}\varphi_{n-1-i}(t, v)}{\partial t^q \partial v^r}.$$

Alors, il est manifeste que la série considérée sera *effectivement* solution de l'équation (1), si elle est *absolument* et *uniformément* convergente.

4. - Méthode employée pour établir la convergence du développement en série. Pour trouver une telle condition de convergence, cherchons une limite supérieure du module $|\varphi_n(x, y)|$. Cela nécessite qu'on en trouve une pour le module de $\frac{\partial^{q+r}\varphi_{n-1-i}(t, v)}{\partial t^q \partial v^r}$. Pour y parvenir — et c'est là que réside la difficulté essentielle de la démonstration, qui est très longue — j'exprime cette dérivée par la formule *classique de Cauchy.*

$$\frac{\partial^{q+r}\varphi_{n-1}(t, v)}{\partial t^q \partial v^r} = \frac{q!\, r!}{(2\pi i)^2} \int_{C_n^t} dz_n \int_{\Gamma_n^v} \frac{\varphi_{n-1}(z_n, \xi_n)d\zeta_n}{(z_n - t)^{r+1}(\zeta_n - v)^{q+1}},$$

mais en prenant des contours C_n^t et Γ_n^v *variables à la fois l'un avec n* et t, *l'autre avec n* et v dans les conditions suivantes: le contour C_n^t, par exemple,

entourera toujours le point t, quand celui-ci se déplace dans D_x, de telle sorte que la plus courte distance du point t à ce contour reste alors constamment égale à une quantité δ_n, fonction de n; cette fonction étant telle que δ_n soit le terme général d'une série *convergente*, qui ait pour somme une constante ε positive, choisie aussi petite qu'on veut. (Et de même pour le contour Γ_n^v).

Ces conditions sont réalisées 1°) en posant $\delta_n = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot \frac{1}{n^\alpha}$, où α est une constante arbitraire >1 et ω la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha}$; 2°) en choisissant pour C_n^t et Γ_n^v deux cercles de centre x_0 et y_0 et de rayons respectifs $R_n^t = |t - x_0| + \delta_n$, $R_n^v = |v - y_0| + \delta_n$; ou encore deux cercles de centres t, v respectivement et ayant tous deux pour rayon δ_n (1).

Après des raisonnements et calculs assez longs et sous réserve qu'on ait $\alpha < \frac{m+p-1}{q+r}$, on trouve pour limite supérieure de $|\varphi_n(x, y)|$

$$M_0 \left[\frac{|\lambda| MM_0 q!\, r!\, \omega^{q+r} (l+\varepsilon)^m (l'+\varepsilon)^p}{m!\, p!\, \varepsilon^{q+r}} \right]^n,$$

en désignant par M_0 et M les bornes supérieures de $|f(x, y)|$ et de $|K(x, y, t, v)|$ dans le domaine (D_x, D_y); par l et l' deux longueurs fixes supérieures à toutes les valeurs que peuvent prendre, dans D_x et D_y, les longueurs (finies) des lignes d'intégration L_x et L_y.

Enfin ceci suppose en outre que x et y restent dans deux domaines Δ_x, Δ_y, intérieurs respectivement à D_x et D_y, et dont tous les points soient à une distance au moins égale à ε des frontières de D_x et D_y.

On est donc assuré que, x et y restant Δ_x et Δ_y, la série $\sum \varphi_n(x, y)$ sera absolument et uniformément convergente si l'on a

$$1 < \frac{m+p-1}{q+r} \quad \text{et} \quad |\lambda| MM_0 \left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^{q+r} (l+\varepsilon)^m (l'+\varepsilon)^p < \frac{m!\, p!}{q!\, r!}.$$

5. - Théorémes d'existence résultant de ces conditions de convergence. Or ces *conditions sont remplies si* m+p *est* $>$(q+r+1), *et si en même temps les quantités* ε, l *et* l' *sont choisies suffisamment petites.*

C'est l'extension annoncée du théorème d'existence de CAUCHY, avec la condition complémentaire $m+p > q+r+1$.

Mais on voit d'autre part que la convergence est aussi toujours réalisée, même si l, l' *sont quelconques, pourvu que l'ordre intégral* (m+p) *de l'équation soit suffisamment grand non seulement par rapport à l'ordre différentiel* (q+r), *mais encore par rapport à* M, M_0, $\frac{1}{\varepsilon}$, *et par rapport à* l *et* l', *c'est-à-dire par rapport aux dimensions des domaines* D_x, D_y.

---

(1) Voir *Journal de l'École Polytechnique*, 24ème Cahier (pages 27 et 37).

Autrement dit, si l'ordre intégral $(m+p)$ est suffisamment grand, l'équation est bien *normale*. C'est le second théorème d'existence annoncé. (D'ailleurs comme dans ce cas la valeur de ε intervient dans le théorème d'existence, nous dirons que l'équation est *quasi-normale*).

Une conclusion analogue s'appliquera à l'équation générale

$$(2)\quad \varphi(x,y)=f(x,y)+\lambda\int_m\int_p P[x,y,t,v,\varphi(t,v),\ \varphi_{q_1,r_1}(t,v),\ldots,\ \varphi_{qr}(t,v)]dt^m dv^p$$

où P désigne un polynome entier par rapport à φ et aux dérivées

$$\varphi_{q_i r_i}(t,v)=\frac{\partial^{q_i+r_i}\varphi(t,v)}{\partial t^{q_i}\partial v^{r_i}}.$$

6. - Équations intégrales. Si (2) ne contient aucune dérivée, ε n'interviendra plus dans le théoreme d'existence. On a alors une *équation intégrale*, qui est *normale* dès que son ordre intégral $(m+p)$ est suffisamment grand par rapport aux modules maxima des coefficients et par rapport aux dimensions des domaines. Pour cette raison, nous dirons que l'équation est alors *relativement normale* (1).

Ce sont encore deux théorèmes d'existence analogues qu'on obtient *pour un système général de ν équations intégrales à ν inconnues* $\varphi_i(x,y)$ $(i=1,2,\ldots,\nu)$, *les variables indépendantes étant cette fois réelles,*

$$(A)\qquad \varphi_i(x,y)=f_i(x,y)+\int_{m_i}\int_{p_i} F_i[x,y,t,v,\varphi_1(t,v),\ldots,\varphi_\nu(t,v)]dt^{m_i}dv^{p_i}$$

et cela sous des hypothèses très larges (condition de LIPSCHITZ etc.) (2).

Ces conclusions subsisteront encore évidemment pour tout système *intégro-différentiel*, qu'on pourra ramener à la forme d'un système intégral (A) en prenant certaines dérivées partielles comme nouvelles fonctions auxiliaires.

7. - Équations linéaires. Enfin si l'équation intégro-différentielle (2) est linéaire par rapport à la fonction φ et ses dérivées, il suffit simplement pour qu'elle soit *normale* que *l'ordre intégral* (m+p) *soit supérieur au plus grand des ordres* différentiels $(r+q)$, (sans qu'interviennent les dimensions des domaines, ni les modules M, M_0) (3).

Pour cette raison, nous dirons alors que l'équation est *absolument normale.*

---

(1) *Comptes-Rendus*: 22 août et 27 décembre 1927.

(2) *Comptes-Rendus*: 18 juin 1928.

(3) *Comptes-Rendus*: 26 novembre 1923; *Journ. École Polytechn.* (loc. cit.); *Giornale di Matematiche* (Naples, 1925).

8. - Ce résultat s'étend aux *équations intégro-différentielles linéaires aux dérivées partielles d'ordre infini*; j'entends par là celles qui appartiennent au type transcendant suivant

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + \lambda \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} F_\nu(\varphi),$$

en posant

$$F_\nu(\varphi) = \int_{m_\nu} \int_{p_\nu} \sum_{r+q=0}^{r+q=\varrho_\nu} K_{r,q}^{\nu}(x, y, t, v) \frac{\partial^{r+q}\varphi(t, v)}{\partial t^r \partial v^q} dt^{m_\nu} dv^{p_\nu}.$$

Une telle équation sera *normale si l'ordre intégral* $(m_\nu + p_\nu)$ *du terme général de rang* ν *croît suffisamment vite avec* ν *par rapport à l'ordre différentiel maximum correspondant* $r+q=\varrho_\nu$. Cette condition est réalisée, par exemple, si ϱ_ν et $(m_\nu + p_\nu)$ croissent respectivement à la manière de progressions arithmétique (de raison entière $\beta > 1$) et géométrique (de raison $b > \beta$ avec $bLb > \beta$) (1).

Notons que dans le cas des équations *linéaires*, le développement à termes récurrents, employé pour l'équation non linéaire (2), (et que je me suis contenté d'indiquer pour le cas particulier de l'équation (1)) se réduit au développement que fournirait directement la puissante méthode des approximations successives de M. PICARD.

Ce développement peut d'ailleurs être transformé au moyen de la formule fondamentale de CAUCHY et conduire alors à une formule de résolution avec un noyau résolvant (C. R. 13 juin 1927, p. 1402).

9. - **Etude des solutions au voisinage des singularités.** Le même développement révèle en outre très simplement, par sa structure même, le mode de croissance des solutions au voisinage des singularités *polaires*, et même plus généralement des singularités que j'ai appelées: *pôles critiques*. Cette étude conduit ainsi tout naturellement (dans le cas où l'ordre intégral de chaque terme l'emporte suffisamment sur l'ordre d'infinitude des singularités figurant dans les coefficients) à la notion de *solutions régulières* d'une équation intégro-différentielle aux dériveés partielles et à une généralisation considérable des théorèmes de FUCHS et de THOMAE (2) (qu'on rétrouve d'ailleurs comme cas très particuliers lorsque l'équation peut se réduire à une *équation différentielle* et qu'elle contient *une seule* variable indépendante). Ces résultats sont d'ailleurs susceptibles de s'étendre aux équations non *linéaires*.

10. - Si l'ordre intégral de l'équation linéaire ne dépasse pas son ordre différentiel maximum, mais lui est *égal*, l'équation ne sera plus normale en général, et l'on doit se contenter d'un domaine d'existence plus restreint (3).

---

(1) *Comptes-Rendus*: 11 avril et 13 juin 1927.

(2) *Comptes-Rendus*: 26 mai 1924; *Giornale di Matematiche* (Naples, 1925).

(3) *Comptes-Rendus*: 23 février 1925.

Soit, par exemple, l'équation linéaire (à trois variables complexes x, y, z)

$$(3) \qquad \varphi(x, y, z) = f(x, y, z) + \int_m \sum_{\substack{q_i=0 \\ s_i=0}}^{\substack{s_i=s \\ q_i=q}} K_{q_i s_i}(x, y, z, t) \frac{\partial^{q_i+s_i} \varphi(t, y, z)}{\partial y^{q_i} \partial z^{s_i}} dt^m$$

où *l'ordre intégral* m est égal à *l'ordre différentiel* $(q+s)$.

Soient D_x, D_y, D_z les domaines d'holomorphie des coefficients f et K; et M la borne supérieure des modules des coefficients K. Dans ce cas, en vue d'obtenir des conditions de convergence pour la série formée au moyen des approximations successives, on peut se contenter d'utiliser une série majorante classique de CAUCHY, au lieu de la série fournie par la méthode indiquée ci-dessus (§. 4). On aboutit alors à cette conclusion:

Théorème d'existence. - *Si* y *et* z *restent dans* D_y *et* D_z *à une distance des frontières au moins égale à une certaine quantité* δ, *l'équation* (3) *aura une solution unique et holomorphe tant que* x *demeure dans la partie commune au domaine* D_x *et au cercle* $R(x_0, l)$ *ayant* x_0 *pour centre et pour rayon une quantité* l (*fonction connue de* δ *et de* M).

En particulier, si l'équation est du *premier ordre* $(m=q+s=1)$, on peut prendre $l=\frac{\delta}{M}$. Ce résultat s'applique notamment à une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial \varphi(x, y_1, y_2)}{\partial x} = K_1(x, y_1, y_2) \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + K_2(x, y_1, y_2) \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}$$

une fois qu'on l'a ramenée à la forme *intégro-différentielle.*

$$(P) \qquad \varphi(x, y_1, y_2) = f(y_1, y_2) + \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{i=2} K_i(t, y_1, y_2) \frac{\partial \varphi(t, y_1, y_2)}{\partial y_i} dt.$$

Nota. - Ces résultats s'étendent (moyennant certaines conditions complémentaires) à une équation intégro-différentielle (et par suite à une équation aux dérivées partielles) à une *infinité* de variables [1] de la forme

$$\varphi(x, y_1, y_2, \ldots) = \psi(x, y_1, y_2, \ldots) + \lambda \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{i=+\infty} f_i(t, x, y_1, y_2, \ldots) \frac{\partial \varphi(t, y_1, y_2, \ldots)}{\partial y_i} dt.$$

11. - *Application à un système d'équations différentielles ordinaires formé de* m *équations* (E) *à* m *inconnues* y_i:

$$(E) \qquad \frac{dy_i}{dx} + K_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

---

[1] *Comptes-Rendus*: 18 oct. 1926.

Afin de simplifier l'écriture, bornons-nous à $m=2$. Pour intégrer le système (E), associons-lui l'équation intégro-différentielle (P) du paragraphe précédent et considérons la solution $\varphi(x, y_1, y_2 \mid f, \xi)$ de (P) qui se réduit à la fonction *arbitraire* $f(y_1, y_2)$ en un point *arbitraire* $x=\xi$. On voit immédiatement que si (E) a un ensemble d'intégrales $y_i(x)$, se réduisant à des valeurs données b_i en un point $x=a$ (*conditions de Cauchy*), elles devront satisfaire à l'équation

$$\varphi(x, y_1, y_2 \mid f, \xi) = \text{constante} = \varphi(a, b_1, b_2 \mid f_a, \xi),$$

avec $f_a=f(b_1, b_2)$. D'où, pour $\xi=a$, $\varphi(x, y_1, y_2 \mid f, a)=f(b_1, b_2)$.

Comme on peut évidemment échanger simultanément x avec a et chaque y_i avec b_i, on a $f(y_1, y_2)=\varphi(a, b_1, b_2 \mid f_a, x)$. Une fonction *quelconque* $f(y_1, y_2)$ des intégrales y_1, y_2 (si elles existent), sera donc exprimée par ce second membre, dont nous avons obtenu plus haut une représentation par une série convergente à termes récurrents. En particulier, si on fait $f(y_1, y_2)=y_i$, une intégrale y_i devra avoir pour expression $y_i=\varphi(a, b_1, b_2 \mid b_i, x)$, série qui est *convergente tant que* x *reste dans la partie* D *de* D_x *dont les points sont à une distance de* a *inférieure à* $\frac{\delta_0}{M}$, en appelant δ_0 la plus courte distance de b_1 et b_2 aux frontières des domaines D_y et D_z.

Pour établir maintenant *l'existence dans* D *des intégrales* holomorphes y_i de (E), il suffit de montrer que réciproquement les fonctions précédentes satisfont effectivement au systeme (E), ce qu'on voit par la théorie des fonctions implicites, ou mieux, en remarquant que cela a lieu visiblement au point $x=\xi$, lequel est *arbitraire.*

Il convient d'observer que *le domaine d'existence D*, obtenu *ainsi pour les intégrales* y_i, *est en général plus étendu que celui de Cauchy et même que celui de M. Picard* (Analyse, 2, 1893, p. 309) (1).

12. - Cette théorie s'applique également (2) à l'intégration des *systèmes comprenant une infinité d'équations différentielles ordinaires à une infinité d'inconnues*, systèmes dont la considération s'impose, comme l'a montré M. HELGE von KOCH (Oe fversigt af K. Sv. Vet. AK. Förh., 56, p. 395, Stockholm, 1899) dans certains problèmes relatifs aux équations aux dérivées partielles. On voit par cette remarque que les équations intégro-différentielles à une infinité de variables que j'ai envisagées plus haut (Nota, fin du §. 10) ne sont pas des monstres mathématiques qu'il faille a priori rejeter hors de l'Analyse.

---

(1) *Comptes-Rendus*: 9 mars 1925. Dans le cas de variables réelles, une méthode commode pour intégrer le système (E) consiste à transformer chacune de ses équations en équation intégrale et à appliquer alors les conclusions indiquées ci-dessus au §. 6 (C. R. 18 juin 1928 p. 1703).

(2) *Comptes-Rendus*: 22 novembre 1926.

13. - *Intégration du système* (E) *avec des conditions initiales générales.*

De ce qui précède résulte immédiatement la possibilité d'intégrer le système (E) avec la condition que les intégrales y_i $(i=1, 2,...., m)$ prennent en p points a_ν $(\nu=1, 2,...., p)$ des valeurs b_i^ν satisfaisant à m équations de condition arbitraires (avec $p \leqslant m$).

$$(C) \qquad f_i(b_1^{\nu_i}, b_2^{\nu_i},...., b_m^{\nu_i}) = C_i \qquad (i=1, 2,...., m),$$

les C_i étant m constantes. C'est là une *extension du problème traité par M, Picard.*

On a vu en effet (en se bornant du cas de $m=2$) que les intégrales y_i doivent vérifier chacune des équations

$$\varphi(x, y_1, y_2 \,|\, f_i, a_i) = C_i, \qquad (i=1, 2)$$

et il suffit alors évidemment de prendre pour cette fonction φ la solution de l'équation intégro-différentielle (P) dans laquelle on remplace $f(y_1, y_2)$ successivement par chacune des fonctions $f_i(y_1, y_2)$. Cela étant, *si les équations* (C) *ont un système de racines communes et si le jacobien correspondant des fonctions* f_i *est* $\neq 0$, *il suffit, pour que les équations* (E) *possèdent un système (et un seul) de solutions holomorphes* y_i *satisfaisant aux conditions* (C), *que les points* a_i *soient suffisamment rapprochés les uns des autres* [1].

On peut d'ailleurs énoncer aisément d'autres théorèmes d'existence d'un genre analogue et même plus généraux encore [2].

Telle est dans son ensemble la théorie que je me proposais de résumer très brièvement ici, à l'exception de certaines applications qu'on peut encore en faire aux fonctions implicites, aux fonctions algébriques, à la résolution des équations, et des congruences, etc. et que je me contente de mentionner pour mémoire.

---

[1] *Comptes-Rendus*: 6 avril 1925.

[2] *Comptes-Rendus*: 29 juin 1925. Voir aussi une Note publiée aux *Comptes-Rendus* postérieurement au Congrès de Bologne (18 mars 1929).

F. RIESZ (Szeged - Ungheria)

SUR LA DÉCOMPOSITION DES OPÉRATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES

Le problème dont je vais vous parler ainsi que sa solution sont bien connus. Permettez-moi de vous rappeler les définitions et les faits essentiels. Envisageons l'ensemble des fonctions continues dans l'intervalle (a, b) et que je désignerai par Ω. Une opération fonctionnelle A, faisant correspondre à chaque élément f de Ω un nombre déterminé A_f, est dite linéaire lorsqu'elle est distributive et bornée, c'est-à-dire qu'on a

$$A_{f+g}=A_f+A_g, \qquad A_{cf}=cA_f$$

et

$$|A_f| \leqq M \times \max |f(x)|,$$

la constante M ne dépendant pas du choix de $f(x)$.

En 1909, en complétant un résultat de M. HADAMARD, j'ai démontré que toute opération fonctionnelle linéaire peut être mise sous la forme d'une intégrale de STIELTJES:

$$A_f=\int_a^b f(x)\,da(x),$$

formée avec une fonction à variation bornée $a(x)$, ne dépendant que de l'opération A et déterminée en substance par celle-ci [1]. Comme inversement, toute intégrale de ce genre définit une opération linéaire, l'intégrale peut être considérée comme l'expression analytique générale des opérations linéaires et par conséquent, l'analyse des fonctions à variation bornée se traduit immédiatement en une analyse des opérations linéaires. Ainsi, par exemple, le théorème classique de CAMILLE JORDAN, d'après lequel toute fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions monotones, fournit la décomposition de l'opération linéaire générale en deux opérations linéaires positives ou, d'une façon plus précise, en deux opérations linéaires non-négatives dont elle est la différence. Dans le même ordre d'idées, M. FRÉCHET a étudié la décomposition de l'opération linéaire en trois parties, correspondant à la décomposition

$$a(x)=a_1(x)+a_2(x)+a_3(x),$$

---

[1] F. RIESZ, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires.* Comptes rendus, Acad. Sc., Paris, 149 (1909), pp. 974-977.

remontant à MM. LEBESGUE, BEPPO LEVI et DE LA VALLÉE-POUSSIN et où $a_1(x)$, la partie *absolument continue* de $a(x)$, est l'intégrale indéfinie de $a'(x)$; $a_2(x)$, la *fonction des singularités*, est une fonction continue à variation bornée dont la dérivée s'annule presque partout et $a_3(x)$ est ce qu'on appelle la *fonction des sauts* (1). Ceci pour l'historique. Aujourdhui je me propose de vous dire quelques mots sur une méthode différente, on pourrait dire méthode synthétique parce qu'elle permet de caractériser et d'obtenir les diverses parties de l'opération linéaire sans avoir recours à l'expression analytique dont je viens de parler. L'avantage que présente cette méthode — les méthodes ont toujours leur avantage — est qu'elle est d'une portée toute générale, jusqu'à être applicable à l'analyse des opérations linéaires portant sur des fonctions définies dans des ensembles *abstraits* comme les a étudiées M. DANIELL en généralisant la notion d'intégrale. C'est seulement à titre d'exemple, pour fixer les idées et pour pouvoir m'en rapporter à des faits bien connus que je me borne aujourd'hui au champ des fonctions continues.

L'idée fondamentale de la méthode dont je vais vous parler, est celle de l'opération *majorante.* Convenons de dire que l'opération linéaire B est une majorante de l'opération linéaire A — et que A est une *minorante* de B — et d'écrire

$$A \leqq B, \qquad B \geqq A,$$

lorsque l'opération $B-A$ est positive, c'est-à-dire que

$$A_f \leqq B_f$$

pour toute fonction non-négative $f(x)$.

Envisageons un ensemble d'opérations linéaires, en nombre fini ou infini, dénombrable ou non. Nous dirons que l'ensemble est *majorable*, s'il existe une opération linéaire, majorante à la fois de toutes les opérations appartenant à l'ensemble. Définition analogue pour les ensembles minorables. Par exemple, tout ensemble d'opérations positives est minorable, l'opération identiquement zéro (que je désignerai par 0) en étant une minorante.

Voici maintenant notre théorème fondamental:

Parmi les majorantes d'un ensemble majorable d'opérations linéaires il y en a une qui est la plus petite, c'est-à-dire qu'il y en a une qui est minorante de toutes les autres.

Évidemment il y a un théorème correspondant pour les ensembles minorables.

Pour obtenir la valeur de la plus petite majorante A^* pour une fonction $f(x)$, supposons $f(x)$ non-négative, ce qui ne restreint pas la généralité, une opération linéaire étant complétement définie quand on l'a déterminée pour les fonctions

---

(1) M. FRÉCHET, *Sur les fonctionnelles linéaires et l'intégrale de Stieltjes.* Comptes rendus du Congrès des Sociétés savantes en 1913, Sciences.

non-négatives. Décomposons $f(x)$ d'une façon arbitraire en un nombre quelconque de fonctions du même type, c'est-à-dire continues et non-négatives:

$$f=f_1+f_2+\ldots.+f_n;$$

appliquons à chacune d'elles l'une quelconque des opérations A appartenant à notre ensemble et ajoutons les valeurs ainsi obtenues. Alors A_f^* sera définie comme la borne supérieure de toutes les sommes que l'on peut obtenir de cette manière.

On montre aisément que l'opération A^* ainsi définie est linéaire et qu'elle est la plus petite majorante de notre ensemble d'opérations. En particulier, il ressort de notre construction que *des opérations en nombre fini sont toujours majorables et minorables.* Faute de temps, je n'insiste pas sur les détails.

Voici un corollaire évident de notre théorème:

Étant donnés deux ensembles, soit $\{A\}$ *et* $\{B\}$, *d'opérations linéaires, de sorte que l'on ait toujours* $A \leqq B$, *il existe au moins une opération linéaire* C *intercalée entre les deux ensembles, c'est-à-dire telle que l'on ait* $A \leqq C \leqq B$ *pour toutes les* A *et toutes les B.*

L'analogie que présentent ces résultats avec les faits fondamentaux de l'arithmétique des nombres réels et que vous avez sans doute observée, fait prévoir que l'on pourra manier les opérations linéaires, dans un certain sens, comme s'il s'agissait tout simplement des nombres réels. Ainsi par exemple, si l'on convient de désigner par max $(A, B, C,\ldots.)$ et min $(A, B, C,\ldots.)$ respectivement la plus petite majorante et la plus grande minorante des opérations $A, B, C,\ldots.$, on aura

$$\max(A, B, C)=\max(A, \max(B, C));$$
$$\max(A, B)+\min(A, B)=A+B.$$

En posant dans cette dernière relation $B=0$, elle devient

$$A=\max(A, 0)+\min(A, 0)$$

et les deux termes du second membre *donnent les parties positive et négative de l'opération A*, parties correspondant précisément à la décomposition de JORDAN.

Pour parvenir à la décomposition moins immédiate dont j'ai parlé et qui correspond à la décomposition d'une fonction à variation bornée en partie absolument continue, fonction des singularités et fonction des sauts, il faut tout d'abord définir les trois classes d'opérations qui y interviendront. Pour plus de simplicitè, je me bornerai au cas des opérations positives, ce qui d'ailleurs ne restreindra pas la généralité, parce que l'on y peut passer par décomposition comme je viens de l'indiquer. Cependant, il y a lieu d'observer que l'on pourrait formuler les définitions tout d'un coup pour le cas général.

Convenons de dire que les opérations positives A et B sont *disjointes* lorsqu'on a

$$\min(A, B)=0,$$

c'est-à-dire que les deux opérations n'ont aucune minorante positive différente de 0. En d'autres termes, l'hypothèse faite exige que toute fonction non-négative $f(x)$ puisse être décomposée en $f_1(x)+f_2(x)$ de sorte que f_1 et f_2 soient non-négatives et que les valeurs A_{f_1} et B_{f_2} soient arbitrairement petites.

Notre hypothèse peut aussi être mise sous la forme

$$\max(A, B)=A+B.$$

Cela étant, désignons par I l'opération

$$\int_a^b f(x)dx,$$

c'est-à-dire l'intégration sur l'intervalle (a, b); sous certains rapports, I jouera le rôle d'opération unité. Alors, une opération positive sera dite *singulière* lorsqu'elle est disjointe à l'opération I. Elle sera dite *régulière* lorsqu'elle est disjointe à toutes les opérations singulières. De plus, une opèration singulière sera dite *continue* lorsqu'elle est disjointe à toutes les opérations du type

$$A_f=f(x_0),$$

x_0 désignant un point quelconque de l'intervalle fermé (a, b). Une opération singulière sera dite *purement discontinue* lorsqu'elle est disjointe à toutes les opérations continues. Chacune des classes ainsi définies jouit de la propriété importante que *la plus petite majorante d'un nombre fini ou d'une infinité de ses éléments appartient à la même classe.*

Cela étant, pour décomposer une opération non-négative A en trois parties appartenant respectivement aux trois classes que nous venons d'introduire, on n'aura qu'à se servir d'un procédé presque automatique. On envisage tous ceux des éléments de la classe respective qui sont des minorantes de A, par exemple toutes les opérations régulières $\leqq A$ et l'on détermine la plus grande d'entre elles, c'est-à-dire que l'on forme leur plus petite majorante. En procédant ainsi pour chacune des trois classes, on obtiendra trois opérations; ce seront précisément les mêmes auxquelles M. FRÉCHET est parvenu en décomposant la fonction à variation bornée $\alpha(x)$ qui figure dans l'expression analytique de l'opération A.

Au lieu d'entrer dans les détails, je voudrais plutôt profiter des quelques minutes qui me restent à vous indiquer les relations qui joignent notre ordre d'idées à la théorie de l'intégration de M. LEBESGUE. Il ne s'agira que des opérations régulières; vous aurez sans doute observé que ce sont précisément celles dont l'expression analytique peut être mise sous la forme

$$A_f=\int_a^b \varphi(x)f(x)dx$$

où $\varphi(x)$ est une fonction sommable, d'ailleurs non-négative tant qu'il s'agit d'une opération positive, mais toute générale quand on se sera passé de cette restriction

sur l'opération A (1). Donc si l'on convient de ne pas considérer comme distinctes deux fonctions sommables qui ne diffèrent entre elles que dans un ensemble de mesure nulle, on aura une *correspondance biunivoque* entre les fonctions sommables et les opérations régulières. Ce qui nous intéresse à ce moment, c'est que, en partant de l'idée d'opération linéaire portant sur l'ensemble des fonctions continues et en particulier de celle d'opération *régulière*, donc sans quitter le bois sacré de l'Analyse classique, on parvient, en substance, aux fonctions sommables de M. LEBESGUE. Bien entendu, on n'aura pas encore défini ces fonctions sous forme explicite, mais alors, tout en restant dans notre ordre d'idées, on n'aura aucune difficulté à reconstruire, à l'arrangement près, tous les détails de la théorie de M. LEBESGUE. Ainsi, entre autres, en ce qui concerne les ensembles mesurables dont vous connaissez le rôle prédominant dans cette derniére théorie, il leur correspondra, dans notre ordre d'idées, une classe bien déterminée d'opérations linéaires. À chaque ensemble mesurable E nous faisons correspondre l'opération

$$E_f = \int_E f(x)dx;$$

seulement, nous caractérisons l'ensemble de ces opérations particulières sans faire intervenir leur expression analytique. Ces opérations se caractèrisent parfaitement par les relations suivantes:

$$0 \leqq E \leqq I; \qquad E \text{ est disjointe à } I-E.$$

En effet, quand on envisage l'expression analytique de E, ces relations se traduisent en

$$0 \leqq \varphi(x) \leqq 1; \qquad \varphi(x)(1-\varphi(x)) = 0,$$

au moins presque partout, c'est-à-dire que, abstraction faite d'un ensemble de mesure nulle, $\varphi(x)$ ne pourra prendre que les valeurs 0 et 1 et sera, par conséquent, la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable.

Or, étant donnée une fonction sommable $\varphi(x)$, il y aura certains ensembles qui y sont intimément liès et qui interviennent dans le calcul de l'intégrale de $\varphi(x)$ ou de celle de $\varphi(x)f(x)$; tels sont les ensembles où $\varphi(x) \leqq c$ ou $\geqq c$ etc. Donc, à notre point de vue, il s'agira du problème suivant. En désignant par A l'opération qui correspond à la fonction $\varphi(x)$, il faudra déterminer les opérations du type E — du *type « ensemble »* — qui correspondent aux ensembles dont je viens de parler et cela sans supposer la connaissance explicite de la fonction $\varphi(x)$

(1) Voici une définition directe des opérations régulières, ne faisant intervenir ni leur expression analytique, ni l'idée d'opération singulière: l'opération linéaire A est dite régulière, si l'on a $A_{f_n} \to 0$ pour toute suite bornée $\{f_n\}$ telle que

$$\int_a^b |f_n(x)|\,dx \to 0.$$

elle-même. Sans restreindre la généralité, on pourra supposer que $c=0$. Alors le premier pas sera de décomposer l'opération A en parties positive et négative, ce qui correspondra à la décomposition de $\varphi(x)$ en parties positive et nègative. Cela étant, les ensembles en question seront ceux pour lesquels l'une ou l'autre de ces deux parties s'annule et notre problème est réduit au cas particulier où $\varphi(x)$ est non-négative et l'on cherche à déterminer l'opération qui correspond à l'ensemble pour lequel $\varphi(x)=0$. En désignant toujours par A l'opération qui correspond à $\varphi(x)$ et par I l'intégration sur l'intervalle (a, b), formons l'opération

$$I-\min(\lambda A, I)$$

dépendant du paramètre positif λ et faisons aller λ à l'infini. Alors l'opération que je viens de définir, tendra en décroissant vers une opération limite qui sera justement l'opération du type E qu'il s'agissait de déterminer.

Voici encore un second procédé pour déterminer l'opération E qui correspond à l'ensemble E où $\varphi(x) \geqq c$. On considére l'opération:

$$\text{partie positive de } A+\lambda I.$$

Appliquée à une fonction non-négative $f(x)$, cette opération définit une fonction *convexe* de λ et c'est précisément la dérivée à droite de cette fonction pour $\lambda=-c$ qui donne la valeur de l'opération cherchée pour la fonction $f(x)$.

Nous voilà arrivés à l'idée d'une sorte de *décomposition approximative.* En effet, désignons par E_c l'opération du type ensemble à laquelle nous venons d'arriver et soient

$$\ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots$$

les points de division d'une échelle comme s'en était servi M. LEBESGUE pour la définition de son intégrale. Cela posé, formons les opérations

$$c_k(E_{c_k}-E_{c_{k+1}}).$$

Alors la somme de toutes ces opérations, du type ensemble à un facteur numérique près, donnera approximativement l'opération A, en ce sens que, en faisant varier l'échelle de façon de la rendre infiniment dense, notre somme tendra précisément vers l'opération A.

Mais je me suis écarté par trop de mon sujet principal et j'ai peur que, en continuant de parler de l'intégrale de LEBESGUE, j'aurais l'air de ne vouloir que bouleverser une fois de plus l'ordre des paragraphes de cette théorie dont je me flatte d'ailleurs d'avoir été l'un des premiers à reconnaître la haute importance.

L. FANTAPPIÈ (Cagliari - Italia)

SULLA TEORIA DEI FUNZIONALI ANALITICI

Esporrò i risultati che ho ottenuto negli ultimi quattro anni, in un ramo particolare del calcolo funzionale. Ispirandomi ai concetti già introdotti dal prof. VOLTERRA, e seguendo anche i consigli del prof. SEVERI, ho cercato di estendere al campo complesso la teoria dei « funzionali », o « funzioni di linee », fino allora trattata principalmente nel campo reale, se se ne eccettuino i lavori del prof. PINCHERLE sulle « operazioni distributive » (funzionali lineari).

L'introduzione dell'immaginario, come già altre volte nello sviluppo delle teorie analitiche, mi ha infatti reso possibile la completa coordinazione in un insieme armonico di tutte le principali proprietà dei funzionali che effettivamente si incontrano nell'analisi, compresa l'operazione di derivazione, che nel campo reale sembrava dovesse restare da parte (v. per esempio: *Analyse fonctionnelle* del prof. LÉVY, pag. 2).

Definizioni e proprietà fondamentali dei funzionali analitici. - Dovendo considerare funzionali $F[y(t)]$, cioè numeri che dipendono da una funzione $y(t)$, variabile indipendente, che noi supponiamo in generale sempre *analitica* (potendosi però in molti casi prolungare questi funzionali anche a classi molto più vaste di funzioni, come per esempio a tutte la funzioni *integrabili* o *derivabili*), ci conviene introdurre la nozione di *intorno* (r, σ) di una funzione analitica $y_0(t)$ come l'insieme di tutte quelle funzioni analitiche $y(t)$, che sono regolari nella regione (chiusa) $A(r)$, costituita dai punti della sfera complessa che hanno una distanza sferica $\geqslant r$ dai punti non regolari della $y_0(t)$, e che di più soddisfano, in questa regione, alla disuguaglianza $|y(t)-y_0(t)|<\sigma$. L'insieme di tutte le funzioni $y(t)$ che sono semplicemente regolari in $A(r)$ si dirà l'intorno (r, ∞) o intorno (r) della $y_0(t)$.

Un funzionale $F[y(t)]$, definito univocamente nell'intorno (r, σ) di una funzione $y_0(t)$, si dirà *regolare* in questo intorno se, scelto comunque un insieme di funzioni di t, $y=y(t, a)$, dipendenti analiticamente da un parametro a (*linea analitica* dello spazio funzionale), in modo però che, per a variabile entro una conveniente regione Γ, la corrispondente funzione (di t) $y(t, a)$ si mantenga entro l'intorno stesso, accade sempre che il valore $f=F_t[y(t, a)]=f(a)$, assunto dal funzionale F per queste funzioni, risulti una funzione $f(a)$, pure analitica e regolare in Γ.

Un funzionale F, definito in un campo funzionale H, si dice poi *analitico localmente* se è regolare nell'intorno di ogni funzione di H. In questo caso la funzione $f(\alpha)=F_t[y(t, \alpha)]$, che nasce dall'applicazione di F a una funzione $y=y(t, \alpha)$ variabile nel campo H su una linea analitica, è pure sempre analitica; cioè *ogni funzionale analitico, secondo questa definizione, conserva l'analiticità rapporto ai parametri.* È da osservare che questa proprietà caratteristica dei funzionali da noi studiati si riscontra sempre in tutte le dipendenze funzionali, che si presentano spontaneamente nei vari rami dell'analisi (integrali delle equazioni a derivate parziali che dipendono dalle funzioni iniziali, integrali delle equazioni differenziali lineari in dipendenza dai coefficienti, funzionali dati da serie di integrali ordinari (di VOLTERRA), o più generalmente da serie di integrali di Stieltjes (di FRÉCHET), ecc.).

Definita poi la *connessione* dei campi funzionali, analogamente a quanto si fa per le regioni in cui esistono delle funzioni monogene, e la nozione di *prolungamento analitico* di un funzionale F da un intorno (r, σ) in cui esso è regolare, a un intorno più ampio, diremo che un funzionale F, analitico localmente, è *analitico in senso stretto*, quando è definito in un campo funzionale connesso, non ulteriormente ampliabile con prolungamenti analitici (*campo naturale di esistenza* del funzionale). Analogamente a quanto accade per le funzioni analitiche, basta conoscere i valori di un funzionale F, analitico in senso stretto, in un intorno (r, σ) comunque piccolo di una funzione $y_0(t)$ del suo campo di esistenza (*elemento* del funzionale, di centro $y_0(t)$) perchè, con successivi prolungamenti analitici, si possa calcolare il valore del funzionale anche per ogni altra funzione del suo campo naturale di esistenza.

Naturalmente, come avviene per le funzioni analitiche, può benissimo accadere che un funzionale analitico in senso stretto risulti *polidromo*, cioè due elementi diversi diano per una stessa funzione valori diversi del funzionale.

Funzionali lineari analitici localmente. - Esaminiamo ora una classe particolarmente importante di funzionali analitici localmente, e cioè i cosidetti *funzionali lineari*, caratterizzati dal fatto di godere della proprietà distributiva rispetto alla somma $F[y_1(t)+y_2(t)]=F[y_1(t)]+F[y_2(t)]$. Lo studio di tutti i possibili funzionali lineari si esaurisce nel modo più semplice, introducendo, per ogni tale funzionale F, la funzione analitica $F_t\left[\frac{1}{t-\alpha}\right]=v(\alpha)$ che si dice la *funzione indicatrice del funzionale lineare* F, e risulta definita e regolare in una certa regione B (anche non connessa) della sfera complessa. L'insieme complementare di B sulla sfera complessa è un insieme *chiuso* A (in cui l'indicatrice non è definita) e il campo funzionale H in cui F è definito, risulta poi dato, con alcune ipotesi supplementari (campo funzionale « lineare ») da tutte le funzioni $y(t)$ olomorfe nei punti di A.

L'importanza della funzione indicatrice di un funzionale lineare F consiste principalmente in questo, che non solo, per la formola precedente, ogni tale

funzionale individua perfettamente la sua funzione indicatrice, ma anche, viceversa, *nota la funzione indicatrice $v(\alpha)$, è sempre possibile determinare il valore del funzionale lineare F, per qualunque funzione del suo campo di definizione.*

Dimostrata infatti, sotto certe ipotesi, la derivabilità rapporto a un parametro sotto il segno di funzionale lineare, cioè

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} F_t[y(t,\alpha)] = F_t\left[\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n} y(t,\alpha)\right] \tag{1}$$

e l'applicabilità, termine a termine, a una serie, cioè

$$F[\sum_1^\infty{}_n y_n(t)] = \sum_1^\infty{}_n F[y_n(t)],$$

si trova infatti che, indicando con $v(\alpha)$ l'indicatrice del funzionale lineare F, il valore di F per una qualunque funzione $y(t)$ del suo campo di definizione (olomorfa nei punti dell'insieme chiuso A) è dato dalla formola integrale

$$F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i}\int_C v(t)y(t)dt \tag{2}$$

in cui C è una curva chiusa della sfera complessa che racchiude nell'interno tutti i punti non regolari della funzione variabile indipendente $y(t)$, in cui $y(t)$ non è in generale definita (ivi compreso l'∞ se, pur essendo la $y(t)$ regolare all'∞, è però $y(\infty) \neq 0$), ma lascia all'esterno tutti i punti dell'insieme chiuso A, in cui l'indicatrice non è definita, curva che si dice *separatrice* di questi due insiemi, e che, particolarmente nel caso che la regione B non sia connessa, può anche essere costituita da più curve chiuse parziali. È appunto nella precisazione di questa curva *separatrice* come curva di integrazione, che consiste l'essenziale della formola (2). Questa formola, che io detti nell'aprile del 1925, e che è stata ritrovata per altra via dal prof. FLAMANT coi metodi dell'analisi generale del prof. FRÉCHET, ci fornisce dunque *la più generale espressione possibile di tutti i funzionali lineari analitici localmente.* Questa espressione integrale si indicherà anche col nome di *prodotto funzionale* delle due funzioni $v(t)$ e $y(t)$, e col simbolo

$$\underset{*}{v(t)}\overset{*}{y(t)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C v(t)y(t)dt \tag{3}$$

in cui l'asterisco in alto, sopra la y, serve a indicare che la curva separatrice C deve contenere nell'interno i punti in cui non è definita la y, e lasciare all'esterno quelli in cui non è definita la v, che porta l'asterisco in basso. Avremo naturalmente

$$\underset{*}{y(t)}\overset{*}{v(t)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-C} v(t)y(t)dt = -\underset{*}{v(t)}\overset{*}{y(t)} \tag{4}$$

da cui il nome più preciso di prodotto funzionale *emisimmetrico*, dato a questa espressione. Il prodotto funzionale di due funzioni deve la sua importanza al fatto, che esso costituisce l'operazione funzionale fondamentale, mediante la quale si possono costruire, come vedremo in seguito, tutti i funzionali analitici, anche non lineari.

Funzionali lineari analitici in senso stretto. - Se la regione B, in cui è definita la funzione $v(\alpha)$, indicatrice di un funzionale lineare F, analitico localmente, è *connessa*, anche il campo funzionale H, in cui F è definito, risulta connesso, e se la $v(\alpha)$, monogena in B, è prolungabile analiticamente in una funzione $\bar{v}(\alpha)$, *monodroma* su tutta la sfera complessa (cioè definita in una regione connessa $\overline{B}$, contenente B, ma non ricoprentesi più volte) anche il funzionale F, analitico localmente, è prolungabile analiticamente in un funzionale $\overline{F}$, *analitico in senso stretto*, definito univocamente dalla formola

$$\overline{F}[y(t)]=\frac{1}{2\pi i}\int_C \bar{v}(t)y(t)dt=\bar{v}(t)\overset{*}{y}(t)$$

in tutto il campo funzionale connesso $\overline{H}$ (campo naturale di esistenza) dato dalle funzioni $y(t)$, olomorfe nei punti non regolari di $\bar{v}(t)$.

Se invece la $v(\alpha)$, definita nella regione *connessa* B, è prolungabile analiticamente in una funzione *polidroma*, il funzionale lineare F, che l'ammette per indicatrice, è ancora prolungabile analiticamente in un funzionale $\overline{F}$, analitico in senso stretto, *ma questo funzionale $\overline{F}$ risulta polidromo*. A differenza di quanto accade per le funzioni analitiche, vediamo dunque che già tra i funzionali analitici *lineari* possono aversi esempi di funzionali polidromi.

Uno di questi esempi ci è dato dall'espressione

$$F[y(t)]=\int_L k(t)y(t)dt \tag{5}$$

(in cui L è un cammino *fisso* della sfera complessa) espressione che è un funzionale lineare, analitico localmente e univocamente definito per tutte le funzioni $y(t)$, olomorfe su L (linea a cui si riduce in questo caso l'insieme chiuso A). I prolungamenti analitici di questo funzionale si hanno considerando il cammino L d'integrazione, non più fisso, ma *variabile* con continuità al variare continuo della funzione $y(t)$, variabile indipendente. L'importanza di questo funzionale F, prolungabile in un funzionale *polidromo* $\overline{F}$, consiste in ciò, che la sua definizione può estendersi nel modo più naturale, con la stessa formola (5), dalle funzioni analitiche olomorfe su L, a tutte le funzioni, anche *non analitiche*, ma semplicemente *integrabili* su L.

Funzionali lineari misti. (Operazioni distributive). - Finora abbiamo considerato i funzionali analitici lineari dipendenti solo da una funzione $y(t)$, che chiameremo anche *funzionali puri*, per distinguerli da quelli che, dipendendo

contemporaneamente da *funzioni* e da *numeri*, si diranno funzionali *misti*. Il caso più semplice di funzionali misti si ha quando un numero f dipende da una sola funzione $y(t)$ e da un solo parametro z:

$$f=F[y(t);\, z].$$

Questa dipendenza tiene contemporaneamente della natura del funzionale, in quanto riguarda la funzione $y(t)$, variabile indipendente, e della natura della funzione in quanto riguarda il numero z, pure variabile indipendente. Fissata la sola funzione $y(t)$, f resterà una funzione ordinaria di z, che supporremo pure sempre *analitica*; possiamo quindi anche dire che un funzionale misto $f=F[y(t);\, z]$ fa corrispondere ad ogni *funzione* $y(t)$, variabile indipendente, un'altra *funzione* $f(z)$

$$f(z)=F[y(t);\, z]. \tag{6}$$

Se invece fissiamo il parametro z si ottiene un funzionale *puro* della $y(t)$, e nel caso che questo sia *lineare* e definito per $y(t)$ uguale a un polinomio qualunque, avremo quella vasta classe di funzionali, che il prof. PINCHERLE ha così profondamente studiato nelle sue opere, col nome di *operazioni funzionali distributive.*

La teoria dei funzionali lineari misti si può però ottenere anche fissando volta per volta il valore del parametro z, e applicando poi i risultati dei funzionali lineari puri. Così, per esempio, si dirà *funzione indicatrice* del funzionale lineare misto F, la funzione $v(z, a)$ del *parametro* z e dell'*indice* a, definita dalla formola $v(z, a)=F_t\left[\frac{1}{t-a};\, z\right]$, la quale è completamente individuata dal funzionale lineare F, e lo individua a sua volta, mediante la formola fondamentale (2), che in questo caso diventa

$$F[y(t);\, z]=v(z, \overset{*}{t})\,y(\overset{*}{t})=\frac{1}{2\pi i}\int_C v(z, t)\,y(t)\,dt=f(z). \tag{7}$$

Da questa formola integrale si ricava anzi un teorema della massima generalità sulla posizione delle singolarità della funzione $f(z)$, che viene a corrispondere alla funzione $y(t)$, variabile indipendente. Tenendo presente, infatti, la proprietà essenziale della curva C di integrazione di essere una *curva separatrice*, contenente nell'interno i punti singolari della $y(t)$ e che lascia all'esterno quelli della $v(z, t)$ (pensata come funzione della sola t) avremo infatti che questa espressione (7) perderà significato, oltre che per i valori $\bar{z}$ di z, per cui la $v(\bar{z}, t)$ stessa non è definita per nessun valore di t, *solo per quei valori di* z *per cui qualche punto* $\bar{t}$, *singolare per la* $v(z, t)$ *viene a coincidere con qualche punto singolare della* $y(t)$, nel qual caso non esiste più una curva separatrice su cui eseguire l'integrazione. Essendo la $f(z)$ regolare per ogni altro valore di z, *i suoi punti singolari potranno dunque trovarsi solo tra i valori precedenti di* z, *e cioè tra i valori singolari per le funzioni* $v(z, t_r)$ *della* z, *che si hanno dall'indicatrice quando al posto dell'indice si sostituiscano*

i valori t_r, singolari per la funzione $y(t)$ (da ciò il nome di *indicatrice dei punti singolari*, dato alla funzione $v(z, t)$ nella mia prima nota dei Lincei del 1925).

I funzionali analitici non lineari; variazione prima e funzionale derivato. - Passando dai funzionali lineari, finora considerati, ai funzionali analitici più generali, per cui dunque non si suppone più preventivamente la proprietà distributiva rispetto alla somma, il primo problema che si presenta naturale è, come per le funzioni, quello di vedere come si comporta l'incremento ΔF subìto dal funzionale $F[y(t)]$

$$\Delta F = F[y(t)+\Delta y(t)] - F[y(t)] \tag{8}$$

in corrispondenza a un incremento $\Delta y(t)$, dato alla variabile indipendente. Supponendo $\Delta y(t)$ dipendente analiticamente da un parametro ε, in modo che la funzione variata $y(t)+\Delta y(t)$ si mantenga però in un intorno (r, σ) in cui il funzionale F, analitico localmente, è regolare, avremo che anche l'incremento ΔF risulterà una funzione analitica di ε.

Se $\Delta y(t)$ è infinitesimo con ε, che prenderemo per infinitesimo principale, chiameremo allora *variazione prima della funzione $y(t)$*, variabile indipendente, e indicheremo con $\delta y(t)$, il termine di primo ordine rispetto a ε, nello sviluppo di $\Delta y(t)$ in serie di potenze di ε, cioè

$$\delta y(t) = \varepsilon \left(\frac{\partial \Delta y(t)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \tag{9}$$

mentre chiameremo *variazione prima del funzionale F*, e indicheremo con δF il termine di prim'ordine, pure rispetto ad ε, nello sviluppo dell'incremento ΔF, che risulta pure infinitesimo, cioè

$$\delta F = \varepsilon \left(\frac{\partial \Delta F}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \tag{10}$$

Si ha allora la notevole proprietà che *la variazione prima δF del funzionale F non dipende da tutto l'incremento $\Delta y(t)$ della funzione variabile indipendente, ma soltanto dal suo termine di prim'ordine, cioè dalla variazione prima $\delta y(t)$*; anzi di più risulta che *δF è semplicemente un funzionale lineare di questa variazione $\delta y(t)$*. S'intravede così l'importanza capitale dei funzionali lineari per tutta la teoria dei funzionali analitici; per la formola generale (2) avremo infatti, indicando con $v(\alpha)$ l'indicatrice di questo funzionale lineare,

$$\delta F = \int_* v(\alpha)\, \delta y(\alpha)\, d\overset{*}{\alpha}. \tag{11}$$

La variazione prima δF del funzionale F è data dunque dal prodotto funzionale di una funzione $v(\alpha)$ (indipendente dall'incremento Δy) per la variazione $\delta y(\alpha)$ della funzione variabile indipendente. La funzione $v(\alpha)$, che dipende anche dalla funzione iniziale y, compie, per il funzionale F, l'ufficio analogo a quello della *derivata* per una funzione $f(x)$ (è infatti $df = f'(x)dx$); è

quindi naturale indicare questo funzionale misto di $y(t)$ e a col nome di *funzionale derivato del funzionale F nel punto a* e col simbolo $F'[y(t); a]$. La sua formola di definizione si ha ponendo nelle (10) e (11) $\delta y(t) = \Delta y(t) = \frac{\varepsilon}{t-a}$. Si ottiene così:

$$v(a) = F'[y(t), a] = \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} F\left[y(t) + \frac{\varepsilon}{t-a}\right]\right)_{\varepsilon=0} \tag{12}$$

Derivando ancora questo funzionale F' in un altro punto β si avrà il *funzionale derivato secondo* $F''[y(t), a, \beta]$ di F nei punti a e β, e così di seguito potranno definirsi tutti i successivi funzionali derivati $F^{(n)}[y(t), a_1, a_2, \ldots, a_n]$ per n intero positivo qualunque. Il funzionale derivato n^{esimo} è sempre una funzione analitica *simmetrica* degli n indici di derivazione $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Per il calcolo dei funzionali derivati esiste poi un completo sistema di regole, che ricordano molto quelle per le derivate ordinarie, mentre per calcolare la derivata ordinaria della funzione analitica $f(u) = F_t[y(t, u)]$ si ha la formola

$$f'(u) = \frac{d}{du} F_t[y(t, u)] = F_t'[y(t, u), \overset{*}{a}] \frac{\partial \overset{*}{y}(a, u)}{\partial u} \tag{13}$$

Sviluppo di un funzionale analitico in serie di Volterra. - In particolare la formola precedente *ci permette di calcolare il valore di un funzionale analitico F, regolare in un intorno (r, σ) di una funzione $y(t)$, per ogni funzione $y(t) + \varphi(t)$ di quest'intorno (tutto l'« elemento » di F di centro y) quando se ne conoscano tutti i successivi funzionali derivati per la funzione $y(t)$*. Posto infatti $y(t, u) = y(t) + u\varphi(t)$, la funzione $f(u) = F_t[y(t) + u\varphi(t)]$ risulta olomorfa in tutto un cerchio di centro $u = 0$ e raggio > 1. La serie di MAC LAURIN $f(u) = f(0) + \sum_1^\infty {}_n \frac{u^n}{n!} f^{(n)}(0)$ è quindi assolutamente convergente per $u = 1$, e poichè, applicando successivamente la (29), si trova

$$f^{(n)}(0) = F^{(n)}[y(t), \overset{*}{a}_1, \overset{*}{a}_2, \ldots, \overset{*}{a}_n] \varphi(\overset{*}{a}_1), \varphi(\overset{*}{a}_2), \ldots, \varphi(\overset{*}{a}_n) \tag{14}$$

avremo dalla serie, per $u = 1$,

$$f(1) = F[y(t) + \varphi(t)] = F[y(t)] + \\ + \sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n!} F^{(n)}[y(t), \overset{*}{a}_1, \overset{*}{a}_2, \ldots, \overset{*}{a}_n] \varphi(\overset{*}{a}_1), \varphi(\overset{*}{a}_2), \ldots, \varphi(\overset{*}{a}_n). \tag{15}$$

Questa formola, che ci fornisce il valore del funzionale analitico F per ogni funzione di un intorno di y, in cui F è regolare, mediante una serie *assolutamente convergente*, il cui termine n^{mo} si calcola *eseguendo n prodotti funzionali successivi per l'incremento φ*, fa perfetto riscontro, nella teoria dei funzionali analitici, all'analogo sviluppo di TAYLOR nella teoria delle funzioni analitiche. In particolare, se il funzionale F è analitico in senso stretto, basterà conoscere tutti i suoi successivi derivati $F^{(n)}$ per una funzione regolare $y(t)$,

per avere, con la (15), tutto un elemento di F di centro $y(t)$, e quindi determinare (con prolungamenti analitici successivi) il valore di F per qualunque altra funzione del suo campo naturale di esistenza.

Lo sviluppo generale (15), che vale per ogni funzionale F, analitico localmente, comprende anche, come casi particolari, quello dato dal prof. VOLTERRA per i funzionali nel campo reale (serie di integrali ordinari) « regolari » secondo la sua definizione, e quello più recente del prof. FRÉCHET (1910), notevolmente più generale (serie di integrali di Stieltjes); da ciò il nome di *serie di Volterra* generalizzata, con cui indicheremo lo sviluppo (15).

L. FANTAPPIÈ (Cagliari - Italia)

LE EQUAZIONI FUNZIONALI LINEARI E IL CALCOLO DELLE MATRICI NELLA FISICA DEI QUANTI

Mi propongo ora di far vedere come la teoria dei funzionali analitici si presti particolarmente alle applicazioni nella moderna fisica dell'atomo.

Secondo le recenti ricerche di HEISENBERG, BORN, JORDAN e altri, *le grandezze fisiche* che intervengono nella fisica atomica vengono rappresentate, non più da *numeri*, ma da *matrici infinite* $\Phi = \| \varphi_{rs} \|$. Per queste matrici si definiscono in modo ovvio le operazioni di *somma*, *prodotto* (righe per colonne), *potenza*.

Presa una funzione analitica $f(z) = \sum_n b_n z^n$, si definisce poi come matrice $f(A)$ l'espressione $\sum_n b_n A^n$.

In tutte queste considerazioni non viene però esaminata la questione della *convergenza* delle serie considerate (funzioni di ∞ variabili numerabili) e quindi nemmeno quella dell'*esistenza* degli enti analitici da esse definiti. Dette considerazioni potrebbero rendersi rigorose mediante la teoria di HILBERT delle funzioni (lineari) di ∞ variabili (numerabili) introducendo la nozione di forme ∞ *limitate*.

In modo molto più generale, però, date due successioni

$$(1) \qquad \begin{matrix} a_0, & a_1, & a_2, \ldots, & a_n, \ldots \\ x_0, & x_1, & x_2, \ldots, & x_n, \ldots \end{matrix}$$

tali che le $\sqrt[n]{|a_n|}$, $\sqrt[n]{|x_n|}$ siano limitate, si possono sostituire, a queste successioni, le due *funzioni* analitiche

$$(2) \qquad \begin{cases} a(z) = \sum_0^\infty{}_n a_n z^n \\ x(z) = \sum_0^\infty{}_n x_n z^n \end{cases}$$

e sostituire poi alla *forma lineare* infinita

$$(3) \qquad \sum_n a_n x_n$$

il *prodotto funzionale simmetrico* delle due funzioni a e x, definito da

$$(4) \qquad \overset{\circ}{a}(z)\overset{\circ}{x}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C a(z) \frac{x\left(\frac{1}{z}\right)}{z} dz$$

in cui C è una curva (separatrice), che contiene nel suo interno tutti punti non regolari di $\frac{x\left(\frac{1}{z}\right)}{z}$, ma lascia all'esterno quelli di $a(z)$. Tutte le volte che la forma (3) è *limitata* secondo HILBERT, esiste sempre la funzione $a(z)$, e tutte le volte che converge la serie (3), anche l'integrale (4) ha sempre un valore ben preciso; esistono però molti casi in cui, pure non convergendo la serie (3), l'integrale conserva significato, bastando per ciò che le due funzioni $a(z)$, $x(z)$ non abbiano punti singolari reciproci.

Ciò premesso, potremo sostituire a una matrice infinita $\Phi = \| \varphi_{rs} \|$ la funzione di due *variabili complesse*

$$\varphi(z_1, z_2) = \sum_{0}^{\infty}{}_{r,s} \varphi_{rs} z_1^r z_2^s$$

che diremo ad essa *coordinata*. Alla *somma* di due matrici $\Phi + \Psi$ è coordinata la somma delle due funzioni φ e ψ, ad esse cordinate. Al *prodotto* $\Phi\Psi$ di due matrici è coordinata la funzione

$$\varphi(z_1, \overset{\circ}{t})\psi(\overset{\circ}{t}, z_2) \tag{5}$$

che si ottiene con un prodotto funzionale simmetrico dalle due funzioni coordinate e che si dirà il *prodotto di composizione simmetrica* di queste due funzioni; in particolare alla potenza Φ^n della matrice Φ sarà coordinata la cosiddetta *potenza* n^{esima} *di composizione* $\overset{\circ}{\varphi}{}^n$ della funzione φ.

Invece della matrice $f(\Phi) = \sum a_n \Phi^n$, funzione della Φ, considereremo allora la funzione ad essa coordinata

$$f(\overset{\circ}{\varphi}) = \sum_n a_n \overset{\circ}{\varphi}{}^n(z_1, z_2) \tag{6}$$

che si dirà una *serie di composizione* della φ. Più generalmente, però, potremo costruire la $f(\overset{\circ}{\varphi})$, anche quando la (6) non converge, se esiste il cosidetto *nucleo associato* $\Gamma(\lambda; z_1, z_2)$ della funzione φ, rappresentato dalla particolare serie di composizione

$$\Gamma(\lambda; z_1, z_2) = \sum_{0}^{\infty}{}_n \lambda^n \overset{\circ}{\varphi}{}^n(z_1, z_2) \tag{7}$$

bastando eseguire il prodotto funzionale simmetrico

$$f(\overset{\circ}{\lambda})\Gamma(\overset{\circ}{\lambda}; z_1, z_2) = f(\overset{\circ}{\varphi}) \tag{8}$$

che, quando la (6) converge, dà appunto la somma di detta serie.

Il problema della *costruzione di una matrice* $f(\Phi)$ *funzione di un'altra* Φ, o della funzione (8) ad essa coordinata, è dunque ridotto alla costruzione del *nucleo associato* (7) che è un particolare funzionale, evidentemente *analitico*, della funzione $\varphi(z_1, z_2)$ di due variabili. Questo funzionale è della massima impor-

tanza, poichè è anche alla base della risoluzione *della più generale equazione funzionale lineare*

$$y(z)=f(z)+\lambda\varphi(z,\overset{\circ}{t})y(\overset{\circ}{t}) \tag{9}$$

di *nucleo* φ, qualunque sia la funzione nota $f(z)$.

Ottenuto il nucleo associato (7), questa equazione, infatti, è immediatamente risoluta dalla formola

$$y(z)=\Gamma(\lambda;z,\overset{\circ}{t})f(\overset{\circ}{t}). \tag{10}$$

Viceversa, $\Gamma(\lambda;z,a)$ è la soluzione y dell'equazione (9) per $f(z)=\frac{1}{1-za}$. Vediamo così come siano intimamente legati i due problemi della *costruzione delle serie di composizione* del tipo (6), e quello della risoluzione dell'equazione funzionale lineare (9).

In tutto il calcolo delle matrici infinite, poi, ha pure molta importanza la nozione di *traccia o somma diagonale* di una matrice Φ definita dalla serie

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n\varphi_{nn}=D(\Phi)$$

dei termini principali, sia per la formulazione variazionale della meccanica quantistica (v. BORN e JORDAN, « Zeitschrift f. Physik », 34, 1925) sia per la costruzione del nucleo associato $\Gamma(\lambda;z,a)$, come quoziente di due trascendenti intere, ottenibili con un metodo analogo a quello di FREDHOLM (sostituendo il prodotto funzionale simmetrico all'integrale del prodotto di due funzioni).

Quando la traccia $D(\Phi)$ esiste, essa risulta allora evidentemente un *funzionale lineare* della funzione $\varphi(z_1,z_2)$ coordinata alla matrice Φ, funzionale la cui *indicatrice*, nel senso da me definito in alcune note dei Rend. Lincei (1° sem. 1928), è la funzione $\frac{1}{\alpha\beta-1}$, singolare su un'iperbole equilatera, che ha per assintoti gli assi. Ma se allora la funzione $\varphi(z_1,z_2)$ ha curve singolari che non si riducano a *sole rette parallele* agli assi, si presenta il fatto, che credo nuovo, della *polidromia* di questo funzionale lineare.

Nel caso di una matrice generica, e quindi anche di una funzione φ generica risulta dunque che la relativa somma diagonale $D(\Phi)$ non è *univocamente definita*, ma può avere *più valori* che si scambiano fra loro se la matrice, o la funzione coordinata $\varphi=\varphi(z_1,z_2,a)$ varia con continuità in dipendenza da un parametro a, in modo che a ruoti attorno a quei valori $\bar{a}$ (singolari) per cui $\varphi(z_1,z_2;\bar{a})$ viene ad avere qualche curva singolare tangente all'iperbole $\alpha\beta-1=0$ (v. note citate).

Resterebbe ora da studiare, se la serie $\sum\varphi_{nn}$ non converge, quale tra questi valori debba scegliersi nelle applicazioni alla fisica, e quale significato fisico possa avere detta polidromia.

J. MOLLERUP (Kopenhagen - Danimarca)

DIE METHODE DER ITERATION IM FALLE EINES BESCHRÄNKTEN KERNS

1. - Es seien (s, t) $\begin{cases} \text{positive ganze Variable oder} \\ \text{reelle Variable des Intervalls } a \leqq \overset{s}{t} \leqq b; \end{cases}$

$g(s)$, $h(s)$,.... sind Funktionen von $L^{(2)}$ d. h. es existirt immer die Zahl « Länge » $\| g \|$, wo

$$\| g \|^2 = \begin{cases} \sum_s g(s)^2 \\ \int_a^b g(s)^2 ds; \end{cases}$$

$K(s, t)$ ist ein symmetrischer, *beschränkter* Kern d. h.

$$g_1(s) = (K(s\cdot); g) = \begin{cases} \sum_t K(s, t) g(t) \\ \int_a^b K(s, t) g(t) d(t) \end{cases}$$

gehört wieder $L^{(2)}$. Im algebraischen Fall stimmt diese Definition mit der ursprünglichen Hilbertschen, nach einem Satze von Herrn TOEPLITZ, überein; im analytischen Falle ist die Definition nachgebildet und ist im Äusseren von der Weyl'schen Definition verschieden.

2. - Um nun *einen einzelnen Punkt des Punktspektrums des Kerns* zu finden, d. h. eine eigentliche Lösung $(\lambda; \varphi(s))$ der homogenen Gleichung

$$\varphi(s) - \lambda \varphi_1(s) = 0,$$

bemerken wir, dass diese Gleichung durch Iteration in

$$\varphi_n(s) - \lambda \varphi_{n+1}(s) = 0$$

übergeht, oder, indem wir die Variable s durch Längenbildung entfernen

$$\| \varphi_n \| - \lambda \| \varphi_{n+1} \| = 0.$$

Es gilt dann eine Funktion $g(s)$ zu finden, für welche $\frac{\|g_{n+1}\|}{\|g_n\|}$ wenn nicht konstant, so doch gegen einen Grenzwert strebt. Hier haben wir aber schon für eine *beliebige* Funktion $g(s)$ aus $L^{(2)}$, wenn wir iteriren:

$$g_{n+1}(s)=(K(s\cdot);\, g_n)$$
$$\frac{\|g_{n+1}\|}{\|g_n\|}\to G_1;\quad \frac{\|g_n\|}{G_1^{n}}\to V^{(1)}\geqq 0$$
$$\frac{g_{2n}(s)}{G_1^{2n}}\to\to G^{(1)}(s);\quad \frac{g_{2n+1}(s)}{G_1^{2n}}\to\to G_1^{(1)}(s) \qquad \text{(starke Konvergenz).}$$

Ist nun $V^{(1)}=\|G^{(1)}\|>0$, dann haben wir schon mindestens eine Lösung der homogenen Gleichung gefunden:

$$\lambda;\ \varphi(s)=\pm\frac{1}{G_1};\quad \pm G_1 G^{(1)}(s)+G_1^{(1)}(s).$$

Indem wir $g(s)$ reduziren:

$$g^{(2)}(s)=g(s)-G^{(1)}(s),$$

können wir das Verfahren fortsetzen; trifft der Fall $V^{(\mu)}=0$ während dieses Verfahrens nie ein, dann hat $g(s)$ *durchlaufende Iteration.*

3. - Wir nehmen jetzt an, dass der beschränkte *Kern* $K(s,t)$ *von durchlaufender Iteration ist* d. h. wenn wir t als Parameter ansehen, dann hat die Funktion $K(s,t)$ aus $L^{(2)}$ durchlaufende Iteration. Es entsteht dann ein Doppeltschema von Konstanten und karakteristischen Funktionen: $\Omega_{t,\nu}$ und $H_t^{(\nu)}(s)$, $H_{t,1}^{(\nu)}(s)$; im algebraischen Falle leuchtet dieses immittelbar ein, indem wir $t=1,2,\ldots$ setzen; im analytischem Falle folgt es aus dem SCHMIDT'schen Satze, dass jedes orthogonales Funktionensystem aus endlich vielen oder aus abzählbar vielen Funktionen besteht. Die homogene Gleichung

$$g(s)-\lambda g_1(s)=0$$

hat dann die Lösungen

$$(\pm\Omega_{t,\nu};\quad \pm\Omega_{t,\nu}H_t^{(\nu)}(s)+H_{t,1}^{(\nu)}(s)),$$

und *in dieser Formel sind sämtliche linearunabhängige Lösungen enthalten,* wenn wir diesem gebräuchlichen Wort die folgende einfache Erweiterung geben: sind $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$,.... abzählbar unendlich viele orthogonale Eigenfunktionen desselben Eigenwertes λ, dann ist auch $\sum_\nu c_\nu\varphi_\nu(s)$, wenn $\sum_\nu c_\nu^2$ konvergirt, Eigenfunktion desselben Eigenwertes λ, und diese Eigenfunktion heisst linear abhängig von den gegebenen.

Wir bilden dann leicht das vollständige Orthogonalsystem des Kerns: $\varphi^{(\nu)}(s)$, $\nu=1,2,\ldots$ und in diesem System lässt sich jede iterirte Funktion $g_1(s)$ entwickeln,

gleichgültig ob $g(s)$ durchlaufende Iteration hat oder nicht. Im algebraischen Falle ist ja schon $K(s, t)$, t Parameter, eine iterirte Funktion:

$$K(s, t) = \sum_u E_u(t) K(s, u) = \sum_u E_u(t) \sum_\nu H^{(\nu)}_{u,1}(s) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu};$$

$$E_u(s) = \begin{cases} 1, & s = u \\ 0, & s \neq u \end{cases}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass *ein Kern mit durchlaufender Iteration kein Streckenspektrum hat.*

4. - Das Ziel dieser Methode beschränkt sich aber nicht auf den Fall durchlaufender Iteration des Kerns; vielmehr beherrscht dieselbe den Fall eines beliebigen beschränkten Kerns, und zwar in folgender Weise, wo wir Leichtigkeit halber nur den algebraischen Fall erwähnen. Wir führen für jeden Wert des Parameters t das Iterationsverfahren so weit wie möglich aus d. h. entweder durch oder bis der Fall $V^{(1)} = 0$ eintrifft.

Aus den so gefundenen karakteristischen Funktionen entsteht wieder ein Orthogonalsystem, mittels dessen in obenstehender Weise ein symmetrischer beschränkter Kern $K^*(s, t)$ gebildet wird. Der reduzirte Kern $K(s, t) - K^*(s, t)$ hat alsdann eine identisch verschwindende karakteristische Funktion.

Auch die Bestimmung des Streckenspektrums ist durch die Methode der Iteration zugänglich; um ein einzelnes Intervall des Spektrums zu finden, handelt es sich darum die Gleichung

$$d_\lambda \Phi(s, \lambda) = \lambda d_\lambda \Phi_1(s, \lambda),$$

wo

$$\Phi_1(s, \lambda) = (K(s\cdot);\ \Phi(\cdot\lambda)),$$

zu lösen. Die Form dieser Gleichung ändert sich aber durch Iteration nicht:

$$d_\lambda \Phi_n(s, \lambda) = \lambda d_\lambda \Phi_{n+1}(s, \lambda).$$

Ich beschränke mich an dieser Stelle auf diese Andeutungen.

S. GOŁĄB (Kraków - Polonia)

SUR UN THÉORÈME RENTRANT DANS LE CALCUL FONCTIONNEL ET SON APPLICATION GÉOMÉTRIQUE

Considérons p fonctions de $n+m$ variables

$$f_i(x_1,\ldots,x_n;\ y_1,\ldots,y_m) \qquad i=1,2,\ldots,p. \tag{1}$$

Nous posons pour abréger

$$(x_1,\ldots,x_n)=X$$
$$(y_1,\ldots,y_m)=Y.$$

Je suppose que les fonctions (1) sont définies pour tous les points (X, Y) pour lesquels subsistent les relations suivantes:

a) X appartient à C, où C est un continu rectifiable (conformement à la définition de PEANO, GROSS, JANZEN ou CARATHEODORY);

b) Y appartient à D, où D est un domaine situé dans l'espace à m dimensions.

Nous supposons que pour chaque X fixe les fonctions (1) sont fonctions continues de la variable Y.

Nous supposons en plus que par rapport à X est remplie la condition de LIPSCHITZ c'est-à-dire qui il existe un nombre k fixe, indépendant des variables X, Y, tel que

$$|f_i(X, Y)-f_i(X', Y)|\leqslant k\cdot\varrho(X, X'). \tag{2}$$

Soit A une partie rectifiable de C. Nous désignons par

$$f(A, Y) \tag{3}$$

l'ensemble de points

$$(f_1(X, Y),\ldots, f_p(X, Y))$$

où X varie dans A.

L'ensemble (3) dépend donc du point Y.

Nous affirmons que:

I) l'ensemble $f(A, Y)$ est rectifiable;

II) la fonction longueur $f(A, Y)$ est semicontinue inférieurement dans le domaine D, elle est par conséquent mésurable au sens de LEBESGUE ce qui est surtout important (1).

(1) La démonstration détaillée sera publiée dans les « Annales de la Soc. Pol. de Math. ».

Nous avons comme conséquences de ce théorème les deux résultats suivants.

Considérons dans l'espace cartésien à n dimensions un continu rectifiable C et une partie rectifiable A de C. Soit π un hyperplan mobile plongé dans cet espace et soit $P(\pi)$ la projection de A sur π.

I. Nous affirmons que la longueur de $P(\pi)$ est une fonction semicontinue inférieurement de la position du plan variable π. (On suppose naturellement que la position du plan mobile dépend d'un certain nombre de paramètres).

II. Dans le cas particulier où l'hyperplan π se réduit à une droite, la fonction longueur $P(\pi)$ est une fonction *continue* de la position de cette droite.

C'est M. WAŻEWSKI qui m'a encouragé à l'étude de ce problème.

S. PINCHERLE (Bologna - Italia)

OSSERVAZIONE SOPRA UNA CLASSE DI OPERAZIONI LINEARI

Indicando al solito con D il simbolo di derivazione, una delle operazioni funzionali lineari più semplici è senza dubbio quella rappresentata da xD, che, da un punto di vista formale, è stata frequentemente presa in considerazione, anche per il passato [1].

Il fatto che essa è permutabile colla operazione che consiste nel sostituire kx ad x in un elemento funzionale $\varphi(x)$, (come la operazione D è permutabile colla sostituzione di $x+k$ ad x) basta a giustificarne l'interesse.

Risulta dalla teoria delle operazioni lineari [2], che un'operazione lineare A commutabile con xD è rappresentabile, di norma, con uno sviluppo in serie della forma

$$A=\sum_{n=0}^{\infty} b_n \overline{xD}^n. \tag{1}$$

Uno sviluppo di questa forma ammette sempre un campo funzionale di convergenza; in particolare, lo sviluppo si riduce ad un polinomio se si assume, come elemento funzionale al quale si applica la A, una radice di $\overline{xD}^m$ per un valore intero positivo qualsiasi di m; precisamente, è radice di $\overline{xD}^m$ la funzione $\log^n x$, per ogni valore $n<m$. L'anzidetta sostituzione di kx ad x ammetterà uno sviluppo della forma (1); ed infatti si trova senza difficoltà che è

$$\varphi(kx)=\varphi(x)+\log k\cdot xD(\varphi)+\frac{\log^2 k}{1\cdot 2}\overline{xD}^2(\varphi)+\ldots.+\frac{\log^n k}{n!}\overline{xD}^n(\varphi).$$

Ma la medesima sostituzione ammette pure, sotto ovvie condizioni di convergenza, lo sviluppo:

$$\varphi(kx)=\varphi(x)+(k-1)xD\varphi+\frac{(k-1)^2}{2!}x^2D^2\varphi+\ldots.+\frac{(k-1)^n}{n!}x^nD^n\varphi+\ldots.;$$

si presenta perciò naturalmente la domanda se, come per questa speciale sostituzione, anche per le altre operazioni permutabili con xD si abbia una duplice

---

[1] V. ad es. BOOLE in *Philos. Transactions* del 1844.

[2] V. PINCHERLE e AMALDI: *Le operazioni distributive*, p. 45. (Bologna, 1901).

forma di sviluppo, e quale sia la relazione fra i due sviluppi, cioè come avvenga il passaggio dall'uno all'altro.

Volendo rispondere a tale domanda, consideriamo un'operazione funzionale lineare A permutabile con xD, per la quale valga in un campo funzionale (il quale conterrà per lo meno le combinazioni lineari degli elementi $\log x$, $\log^2 x$, $\log^3 x$,....) uno sviluppo della forma (1). Esso è individuato dalla successione delle costanti b_0, b_1,...., b_n,.... Per la ammessa permutabilità, risulta

$$A(xD)(x^n)=xDA(x^n),$$

da cui

$$nA(x^n)=xDA(x^n);$$

ne viene che, posto $A(x^n)=a_n(x)$, la $a_n(x)$ è soluzione dell'equazione

$$x\frac{da_n(x)}{dx}=na_n(x),$$

onde

$$A(x^n)=a_n(x)=p_nx^n \tag{2}$$

essendo p_1, p_2,...., p_n,.... una successione arbitraria di costanti. Ma dall'espressione così trovata per $A(x^n)$ risulta, dalla teoria generale delle operazioni funzionali distributive (1), che la A è sviluppabile in serie della forma

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^nD^n \tag{3}$$

dove è

$$a_n=p_n-np_{n-1}+\binom{n}{2}p_{n-2}-\ldots.+(-1)^np_0,$$

cioè

$$a_n=\Delta^n p_0, \qquad \text{onde} \qquad p_n=\nabla^n a_0.$$

In altri termini, la A è una di quelle operazioni cui in altro lavoro (2), ho dato il nome di « operazioni normali di ordine nullo ».

Se ora gli sviluppi (1) e (3) si applicano entrambi ad x^m, per m intero e positivo, e si divide per x^m, si ottengono le relazioni

$$b_0+b_1m+b_2m^2+\ldots.+b_nm^n+\ldots.=p_m \qquad (m=0, 1, 2,....). \tag{4}$$

Ma la (3) ha significato per valori di m arbitrariamente grandi, poichè per m intero positivo essa si riduce ad un polinomio; onde la coesistenza dei due sviluppi (1) e (3) per una stessa operazione A non può avere luogo se la successione b_0, b_1,...., b_n,.... non è *ologene*. Sotto questa condizione, data la A sotto la forma (1), le (4) ne determinano la successione p_n, quindi le a_n, e per conseguenza l'espressione (3).

---

(1) V. PINCHERLE e AMALDI, op. cit., pp. 87 e seg.

(2) Annali di Matematica, S. III, T. IV, p. 239. (1900).

Inversamente, sia data la A da uno sviluppo della forma (3), e se ne voglia dedurre un'espressione (1). All'uopo, si applichino entrambe le forme all'elemento funzionale x^s; ne verrà l'identità

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{s}{n}. \tag{5}$$

La determinazione delle costanti b_n coincide dunque col problema dello sviluppo in serie di potenze di una serie di fattoriali. L'espressione delle b_n in funzione delle a_n si può avere come segue. Si osservi dapprima che se il secondo membro di (5) si intende ordinato per le potenze crescenti di s, non compariranno nel termine in s^m le a_0, a_1,...., a_{m-1} che moltiplicano solo potenze di esponente inferiore; perciò l'espressione delle b_n in funzione delle a_n avrà la forma

$$b_n = q_{n\cdot n} a_n + q_{n\cdot n+1} a_{n+1} + q_{n\cdot n+2} a_{n+2} + ... \tag{6}$$

Poi, si noti che le $q_{n\cdot\nu}$ essendo indipendenti dalle a_n, queste si potranno scegliere nel modo che si riterrà più opportuno; in particolare, si può fare $a_n = t^n$, con $|t|<1$; con ciò si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{s}{n} = (1+t)^s,$$

e qui, sviluppando in serie di potenze di s la $(1+t)^s = e^{s \log(1+t)}$, si ha

$$(1+t)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log^n (1+t)}{n!} s^n;$$

ora le a_n sono date da t^n, le b_n da $\frac{\log^n (1+t)}{n!}$, onde le $q_{n\cdot\nu}$ si avranno, come coefficienti di t^ν, sviluppando $\frac{\log^n (1+t)}{n!}$ in serie di potenza di t. Il coefficiente $q_{n\cdot\nu}$ sarà dunque il coefficiente di t^ν in questo sviluppo.

Però, affinchè lo sviluppo (1) di un'operazione A possa essere applicato ad elementi dello spazio funzionale avente per base $(1, x, x^2, ...)$, è necessario, come è noto, che la successione delle b_n sia ologena; per questo motivo, l'operazione data in quello spazio dalle relazioni (2) o, ciò che è equivalente, dallo sviluppo (3), non ammetterà uno sviluppo (1) valido nel detto spazio se non quando il secondo membro della (5) sarà una funzione intera. La condizione necessaria e sufficiente perchè ciò sia è, come è noto, che $\frac{\log |a_n|}{\log n}$ tende a $-\infty$ per $n \to \infty$; ciò accade, in particolare, quando il massimo limite di $\sqrt[n]{|a_n|}$ è minore dell'unità. Sotto questa condizione, l'operazione definita dalle (2) o (3) nello spazio $(1, x, x^2, ...)$ ammette l'espressione (1) almeno in una parte di questo spazio, ed il passaggio dall'una all'altra espressione si farà mediante le formule (6).

P. FLAMANT (Clermont-Ferrand - Francia)

LA NOTION DE TRANSMUTATION DÉRIVÉE DANS L'ÉTUDE DES TRANSMUTATIONS LINÉAIRES

Dans l'étude des transmutations linéaires, on rencontre des développements en séries de puissances de la forme

$$T = M_{a_1} + M_{a_2} L + \ldots + M_{a_n} L^n + \ldots, \tag{1}$$

L étant une transmutation linéaire donnée, dite principale, M_a désignant la multiplication par la fonction a et T étant une transmutation linéaire choisie arbitrairement dans une certaine classe.

Lorsqu'on prend pour transmutation principale la *dérivation* D, on connait depuis longtemps la possibilité et l'unicité de ce développement pour toute transmutation linéaire T. J'ai montré la possibilité d'un développement (1) toutes les fois que L est dégénérée du premier genre c'est-à-dire donne un résultat identiquement nul pour certains objets non identiquement nuls (1). Même si la transmutation principale L n'est pas dégénérée, on peut concevoir un développement (1) pour des transmutations T convenablement choisies.

Dans tous les cas où ce développement (1) existe, il est naturel d'appeler *transmutation dérivée* de T par rapport à L celle qui est représentée par le développement

$$\partial T/\partial L = M_{a_1} + 2M_{a_2} L + \ldots + nM_{a_n} L^{n-1} + \ldots \tag{2}$$

Dans le cas où la transmutation principale est la dérivation M. S. PINCHERLE a établi, dès ses premiers travaux, que:

$$\partial T/\partial D = TM_x - M_x T.$$

Je me propose de voir si l'on peut, au point de vue formel, donner une interprétation analogue de $\partial T/\partial L$ indépendante du développement en série.

---

(1) P. FLAMANT: *Le développement d'une transmutation linéaire en série de puissances de la différentiation finie.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 185, p. 1432, Paris, 1927.

Écart de permutabilité.

L'écart de permutabilité de deux transmutations T et U est la transmutation

$$T\wedge U=TU-UT.$$

C'est une combinaison *alternée* des deux transmutations :

$$U\wedge T=-T\wedge U.$$

La transmutation U étant fixée, l'écart de permutabilité regardé comme dépendant de T a des propriétés formelles analogues à celles de la dérivée d'une fonction [1] :

$$(3)\qquad \begin{cases} (T_1+T_2+T_3)\wedge U=T_1\wedge U+T_2\wedge U+T_3\wedge U \\ (aT)\wedge U=a(T\wedge U) \\ (T_1T_2)\wedge U=(T_1\wedge U)T_2+T_1(T_2\wedge U). \end{cases}$$

De là résulte, pour tout nombre naturel n, la formule

$$T^n\wedge U=(T\wedge U)T^{n-1}+T(T\wedge U)T^{n-2}+\ldots.+T^{n-1}(T\wedge U),$$

qui attire l'attention sur le cas où $T\wedge U$ et T sont permutables.

Nous dirons qu'une transmutation linéaire A est *associée* à T si d'une part elle n'est pas permutable avec T et si d'autre part leur écart de permutabilité est permutable avec T; ce qui s'écrit

$$T\wedge A\neq 0,\qquad T\wedge(T\wedge A)=0;$$

ou

$$TA-AT\neq 0,\qquad T^2A-2TAT+AT^2=0.$$

A, B désignant des transmutations associées à T et P une transmutation permutable avec T, on constate immédiatement que $A+P$, AP et PA sont associées à T et que $A+B$ est associée à T ou permutable avec T.

Dérivation d'une série à coefficients constants.

Soit L la transmutation principale et A une transmutation associée à L. On a :

$$L^n\wedge A=nL^{n-1}(L\wedge A)=(L\wedge A)\cdot nL^{n-1}$$

et

$$a_nL^n\wedge A=na_nL^{n-1}(L\wedge A)=(L\wedge A)\cdot na_nL^{n-1}$$

En additionnant des relations de même forme, on voit que si

$$K=a_0I+a_1L+\ldots.+a_nL^n+\ldots.$$

$$(4)\qquad K\wedge A=(\partial K/\partial L)(L\wedge A)=(L\wedge A)(\partial K/\partial L).$$

---

[1] Pour cette raison, M. S. PINCHERLE (*Sulle operazioni funzionali lineari*, Congrès de Toronto, p. 131) l'avait noté T_U'. J'ai renoncé à ce symbole pour éviter ici toute confusion avec la transmutation dérivée $\partial T/\partial U$.

Remarques. 1°) Les transmutations développables en séries de puissances de L à coefficients constants sont permutables avec $L \wedge A$ et permutables entre elles.

2°) *Toute transmutation* K *à coefficients constants en* L *admet* A *pour associée.*

En effet, d'après le résultat obtenu et la 1re remarque, on a successivement:

$$K(K \wedge A) = K(\partial K/\partial L)(L \wedge A) = (\partial K/\partial L)K(L \wedge A)$$
$$= (\partial K/\partial L)(L \wedge A)K = (K \wedge A)K.$$

Dans le cas où on peut définir une inverse de $L \wedge A$ (c'est-à-dire si un même résultat peut provenir de plusieurs objets, dans le cas où on peut trouver un caractère appartenant à un seul de ces objets), on a pour cette inverse (ou pour chaque inverse):

$$(L \wedge A)(L \wedge A)^{-1} = I$$

et par conséquent en multipliant (4) à droite par cette inverse, on obtient

$$\partial K/\partial L = (K \wedge A)(L \wedge A)^{-1}$$

valable dans le champ des résultats de $L \wedge A$.

Par suite des propriétés (3) de l'écart de permutabilité, on a les règles de dérivation suivantes:

$$\partial(K_1 + K_2 + K_3)/\partial L = \partial K_1/\partial L + \partial K_2/\partial L + \partial K_3/\partial L$$
$$\partial(aK)/\partial L = a(\partial K/\partial L)$$
$$\partial(K_2 K_1)/\partial L = (\partial K_2/\partial L)K_1 + K_2(\partial K_1/\partial L).$$

Enfin si J est à coefficients constants en K, elle est aussi à coefficients constants en L, et on a:

$$J \wedge A = (\partial J/\partial K)(K \wedge A) = (\partial J/\partial L)(L \wedge A)$$

d'où

$$(\partial J/\partial L)(L \wedge A) = (\partial J/\partial K)(\partial K/\partial L)(L \wedge A)$$

Il en résulte que, toujours dans le champ des résultats de $L \wedge A$, on a une règle analogue à celle de la dérivée d'une fonction de fonction

$$\partial J/\partial L = (\partial J/\partial K)(\partial K/\partial L).$$

Dérivation d'une série dont les coefficients sont des multiplications quelconques.

Essayons d'appliquer un calcul analogue au précédent:

$$(M_{\alpha_n} L^n) \wedge A = (M_{\alpha_n} \wedge A)L^n + M_{\alpha_n}(L^n \wedge A) = (M_{\alpha_n} \wedge A)L^n + nM_{\alpha_n} L^{n-1}(L \wedge A).$$

La formule sera aussi simple que la précédente si le premier terme du second membre disparait, c'est-à-dire si A est permutable avec les multiplications, ce qui a lieu si A est une multiplication.

Supposons donc que *la transmutation principale* L *admette pour associée une multiplication* M_λ. On a alors

$$(M_{\alpha_n} L^n) \wedge M_\lambda = n M_{\alpha_n} L^{n-1} (L \wedge M_\lambda)$$

d'où par addition, T étant développable en L:

$$T \wedge M_\lambda = (\partial T / \partial L)(L \wedge M_\lambda) \tag{5}$$

et comme dans le cas précédent

$$\partial T / \partial L = (T \wedge M_\lambda)(L \wedge M_\lambda)^{-1}$$

dans le champ des résultats de $L \wedge M_\lambda$. De même, on a les propriétés, d'ailleurs évidentes *a priori*, relatives à la dérivée d'une somme, ou du produit d'une transmutation par un nombre. La relation (3):

se traduit ici:
$$(T_2 T_1) \wedge M_\lambda = (T_2 \wedge M_\lambda) T_1 + T_2 (T_1 \wedge M_\lambda)$$

$$[\partial (T_2 T_1)/\partial L](L \wedge M_\lambda) = (\partial T_2 / \partial L)(L \wedge M_\lambda) T_1 + T_2 (\partial T_1 / \partial L)(L \wedge M_\lambda).$$

C'est donc *dans le cas où* T_1 *est permutable avec* $L \wedge M_\lambda$ *que l'on peut en tirer la règle de dérivation d'un produit*

$$\partial (T_2 T_1)/\partial L = (\partial T_2 / \partial L) T_1 + T_2 (\partial T_1 / \partial L)$$

valable toujours dans le champ des résultats de $L \wedge M_\lambda$.

Supposons maintenant que K admette pour associée la même multiplication que L; on aura alors si T est développable en K et en L

$$T \wedge M_\lambda = (\partial T / \partial K)(K \wedge M_\lambda) = (\partial T / \partial L)(L \wedge M_\lambda)$$

d'où
$$(\partial T / \partial K)(\partial K / \partial L)(L \wedge M_\lambda) = (\partial T / \partial L)(L \wedge M_\lambda)$$

et par conséquent
$$\partial T / \partial L = (\partial T / \partial K)(\partial K / \partial L)$$

dans le domaine des résultats de $L \wedge M_\lambda$.

Cas de la dérivation.

La dérivation admet pour associée la multiplication par x, car

$$D \wedge M_x = D M_x - M_x D = I.$$

Cet écart étant la transmutation identique est permutable avec toute autre transmutation.

Il résulte alors de ce qui précéde que l'on a:

$$\partial T / \partial D = T \wedge M_x = T M_x - M_x T$$
$$\partial (T_2 T_1)/\partial D = (\partial T_2 / \partial D) T_1 + T_2 (\partial T_1 / \partial D);$$

et, en désignant par X une transmutation admettant pour associée la multiplication par x:

$$\partial T/\partial D=(\partial T/\partial X)(\partial X/\partial D)$$

d'où

$$\partial T/\partial X=(\partial T/\partial D)(\partial X/\partial D)^{-1}$$

ou

$$\partial T/\partial X=(TM_x-M_xT)(XM_x-M_xX)^{-1}$$

Transmutations admettant pour associée la multiplication par x.

Il y a d'abord les transmutations s'exprimant par une série à coefficients constants en D, en particulier la substitution linéaire et la différentiation finie

$$S_{x+h}=I+\frac{h}{1}D+\frac{h^2}{2!}D^2+\ldots.+\frac{h^n}{n!}D^n+\ldots.$$

$$\Delta_h=S_{x+h}-I=\frac{h}{1}D+\frac{h^2}{2!}D^2+\ldots.+\frac{h^n}{n!}D^n+\ldots.$$

pour lesquelles on a:

$$\partial S_{x+h}/\partial D=\partial\Delta_h/\partial D=hS_{x+h}=h(\Delta_h+I),$$

et, par suite,

$$\partial T/\partial S_{x+h}=\partial T/\partial\Delta_h=\frac{1}{h}(TM_x-M_xT)S_{x-h}.$$

Ces transmutations ne sont pas les seules comme le montrent les exemples suivants:

1°) La transmutation S_{x+h} se reproduit par dérivation comme la fonction exponentielle, mais la même propriété appartient aussi à la transmutation plus générale

(6) $$E^h_{\mu(x)}=M_{\mu(x)}S_{x+h}$$

qui admet pour développement:

$$E^h_{\mu(x)}=M_{\mu(x)}+\frac{h}{1}M_{\mu(x)}D+\ldots.+\frac{h^n}{n!}M_{\mu(x)}D^n+\ldots.$$

sur lequel on constate que $\partial E^h_{\mu(x)}/\partial D=hE^h_{\mu(x)}$;

on voit aussi facilement en partant de (6) que:

$$E^h_{\mu(x)}\wedge M_x=hE^h_{\mu(x)}.$$

2°) Considérons l'intégration, définie par:

$$D_a^{-1}\varphi(x)=\int_a^x\varphi(u)du$$

et ses puissances que nous noterons $D_a^{-p}=(D_a^{-1})^p$; p et q étant des nombres naturels, D_a^{-p} et D_a^{-q} sont permutables. Les deux expressions

$$D_a^{-p}=\frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{1}{p}M_{(x-a)^p}+\frac{-1}{1(p+1)}M_{(x-a)^{p+1}}+\ldots.+\frac{(-1)^n}{n!\,(p+n)}M_{(x-a)^{p+n}}D^n+\ldots.\right]$$

et

$$D_a^{-p}\varphi(x)=\frac{1}{(p-1)!}\int_a^x(x-u)^{p-1}\varphi(u)du$$

permettent d'établir respectivement

$$\partial D_a^{-p}/\partial D=-pD_a^{-p-1} \qquad \text{et} \qquad D_a^{-p}\wedge M_x=-pD_a^{-p-1}.$$

Remarque. Soit une transmutation linéaire L admettant pour associée A; transformons L et A par une même trasmutation U ayant une inverse univoque: ULU^{-1} a pour associée UAU^{-1}.

Les transmutations ayant pour associée la multiplication par $\lambda(x)$ sont donc les transformées par la substitution $S_{\lambda(x)}$ des transmutations ayant pour associée la multiplication par x.

Développement avec multiplication à droite.

On peut concevoir, bien qu'ils soint moins usuels, des développements de la forme:

$$T=M_{\omega_0}+LM_{\omega_1}+\ldots.+L^nM_{\omega_n}+\ldots.$$

qui conduiraient à définir une autre dérivée que je noterai:

$$\partial T:\partial X=M_{\omega_1}+2LM_{\omega_2}+\ldots.+nL^{n-1}M_{\omega_n}+\ldots.$$

et qui s'interpréterait d'une manière analogue. Soit M_λ une multiplication associée à L. On a:

$$(L^nM_{\omega_n})\wedge M_\lambda=(L\wedge M_\lambda)nL^{n-1}M_{\omega_n}$$

d'où par addition:

$$T\wedge M_\lambda=(L\wedge M_\lambda)(\partial T:\partial L).$$

En comparant avec la relation (5), on voit que:

$$(\partial T/\partial L)(L\wedge M_\lambda)=(L\wedge M_\lambda)(\partial T:\partial L).$$

En multipliant à droite par une inverse de $L\wedge M_\lambda$, on obtient

$$\partial T/\partial L=(L\wedge M_\lambda)(\partial T:\partial L)(L\wedge M_\lambda)^{-1}.$$

La nouvelle dérivée admet donc l'ancienne pour transformée par $L\wedge M_\lambda$. Dans le cas de la dérivation, on a vu que

$$D\wedge M_x=I,$$

par conséquent

$$\partial T/\partial D=\partial T:\partial D,$$

ce qu'on peut d'ailleurs constater en évaluant les ω_n à l'aide des a_n et de leurs dérivées ou réciproquement.

R. WAVRE (Genève - Svizzera)

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONNELLES AUTOMORPHES

Les fonctions elliptiques, les fuchsiennes et, en général, les fonctions automorphes jouissent de cette double propriété: d'être analytiques et de prendre la même valeur en un point et en tous ses transformés par un groupe de substitutions. Une extension naturelle consisterait à former des fonctions analytiques d'une infinité de variables complexes jouissant de la même propriété d'automorphisme. Ce n'est pas dans cette voie que je me suis engagé et, renonçant à l'analyticité, c'est un problème à la fois plus général et plus simple que je me suis proposé. Le voici:

Soit G un ensemble de substitutions appliquées aux différents points de l'espace fonctionnel. Chacune de ces substitutions fait passer d'une fonction $f(x)$ à une autre $\varphi(x)$. Je suppose que ces substitutions forment un groupe.

Soit D un domaine complètement invariant pour les substitutions du groupe G.

On demande de construire des fonctionnelles $A|f(x)|$, définies dans le domaine D et qui prennent la même valeur en un point de D et en tous ses transformés par les substitutions du groupe G, telles donc que l'on ait:

$$A|f(x)|=A|\varphi(x)|.$$

Voilà le problème. Donnons maintenant quelques explications plus concrètes. Le groupe G sera supposé contenir l'inverse de chacune de ses substitutions et par conséquent la substitution identique. J'appellerai domaine P une partie du domaine D jouissant des propriétés suivantes:

1) Les transformés d'un point de P, par les substitutions du groupe, abstraction faite de la substitution identique, ne font pas partie de P.

2) Les différentes images de P par les substitutions du groupe recouvrent par leur réunion le domaine D.

Il est donc bien entendu qu'un transformé par une substitution du groupe doit se trouver dans D si le point initial s'y trouve et tout point de D peut être ramené en P par une substitution de G. La fonctionnelle automorphe reprendra donc la même succession de valeur dans P et dans toutes ses images. Pour les fonctions doublement périodiques, le domaine D est le plan complexe, le domaine P le parallélogramme des périodes. La différence essentielle entre les

fonctionnelles automorphes ainsi définies est que ces dernières pourront être choisies arbitrairement sur le domaine P: de sorte que l'on pourra leur imposer des conditions supplémentaires: d'être analytiques, par exemple.

Enfin, nous appellerons quasi-automorphe une fonctionnelle qui prend les mêmes valeurs, à une constante près, dans un domaine et dans son image par une substitution donnée.

Les substitutions envisagées dans la suite sont de la forme suivante, que nous appellerons linéaire simple:

$$\varphi(x) = \int_0^1 N(x, y) f(y)\, dy \tag{1}$$

et les fonctionnelles quasi-automorphes envisagées seront supposées dérivables au sens de M VOLTERRA.

Lorsque l'on fait sur la fonction argument la substitution linéraire simple (1), la dérivée fonctionnelle d'une fonctionnelle quaisi-automorphe Φ subit la substitution inverse

$$\Phi' \,|\, f(t), x \,| = \int_0^1 N(y, x)\, \Phi' \,|\, \varphi(t), y \,|\, dy \tag{2}$$

et réciproquement, si pour la substitution linéaire simple (1) la dérivée fonctionnelle subit la substitution inverse, la fonctionnelle envisagée est quasi-automorphe.

La démonstration repose sur le fait que les variations $\delta\Phi$ qui résultent de la correspondance $f \to \varphi$, $\delta f \to \delta\varphi$ coincident toujours.

Il est clair que si fonctions arguments et dérivées fonctionnelles subissent des substitutions inverses pour chaque substitution d'un groupe G et cela en tout point du domaine D, la fonctionnelle sera automorphe à des constantes près.

Approfondissons le cas d'un noyau $N(x, y)$ symétrique et fermé et envisageons le procédé itératif classique

$$f_n(x) = \int_0^1 N(x, y) f_{n-1}(y)\, dy. \tag{3}$$

La théorie des équations intégrales enseigne que la fonction $f_n(x)$ peut s'écrire

$$f_n(x) = \int_0^1 N_n(x, y) f_0(y)\, dy$$

où $N_n(x, y)$ représente le $n^{\text{ième}}$ noyau itéré développable en série de fonctions orthogonales et normales $\psi_i(x)$ formant un système complet

$$N_n(x, y) = \sum \lambda_i^{-n} \psi_i(x) \psi_i(y) \qquad n \geqq 2.$$

Et si c_i représente le coefficient de Fourier de $f_0(x)$, relatif à $\psi_i(x)$, $c_i \lambda_i^{-n}$ représentera le coefficient de la fonction $f_n(x)$. Nous voulons que la substitution inverse de (3), ainsi que toutes ses puissances, fassent aussi partie de notre groupe, il faut donc que l'équation de première espèce soit résoluble une infinité successive de fois. Cette substitution inverse et ses puissances donnent des fonctions $f_{-n}(x)$

aux coefficientes de Fourier $c_i\lambda_i^{+n}$. Dès lors *le domaine* D *est entièrement déterminé*, c'est le lieu des points c_i telle que la série

$$\gamma(c_i, m) = \sum c_i^2 \lambda_i^{2m}$$

converge si grand que soit le nombre réel m.

Un point quelconque c_i de D a tous ses conséquents $c_i\lambda_i^{-n}$ dans D, ainsi que tous ses antécédents $c_i\lambda_i^{+n}$. Ces derniers existent, en vertu du théorème de M. PICARD, puisque la convergence de la série γ, quel que soit m, assure la résolution récurrente de l'équation de première espèce.

Les substitutions inverses $c_i \to c_i\lambda_i^{+n}$ se font au moyen du noyau

$$N(x, y) \sim \sum \lambda_i^{+n} \psi_i(x) \psi_i(y).$$

Quoique la série du second membre diverge, il suffit d'écrire

$$f_{-n} = \lim_{p \to +\infty} f_{-n,p} \qquad f_{-n,p} = \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{+n} \psi_i(x) \psi_i(y) \right] f_0(y) dy$$

pour définir $f_{-n}(x)$ sans difficulté à partir de tout point de D.

La définition du domaine D permet de supposer que les valeurs λ_i sont quelconques, simplement différentes de 0, 1 et -1; mais pour simplifier, je supposerai qu'elles soient en valeur absolue supérieures à l'unitè.

Il est clair que l'on peut donner à l'indice d'itération n des valeurs réelles quelconques. Si l'on envisage l'espace fonctionnel Ω des points c_i tels que la série $\sum c_i^2$ soit convergente, les fonctions $\psi_i(x)$ établissent une correspondance univoque et réciproque (à des fonctions définies sur des ensembles de mesure nulle près) entre les fonctions $f(x)$ de carré sommable et les points de Ω. Aussi parlerons-nous indifféremment de fonction et de point de Ω. Ceci dit, nous considérerons les deux groupes suivants qui transforment le domaine D en lui-même:

1) G_1 $c_i \to c_i\lambda_i^{\nu}$, ν étant un nombre réel quelconque

2) G_2 $c_i \to c_i\lambda_i^{\nu}$, ν étant un entier positif, négatif, ou nul.

Ce sont deux groupes à un paramètre, le premier est continu, le second discontinu. Chaque groupe contient la substitution identique et l'inverse de chacune de ses substitutions.

La norme de $f_n(x)$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment et tend vers $+\infty$ lorsque $n \to -\infty$. *Le domaine* P sera l'intersection de D avec la sphère fonctionnelle $S: \sum c_i^2 = 1$, pour G_1; et l'intersection de D avec l'espace compris entre cette sphère S et l'hyperellipsoide $\sum c_i^2 \lambda_i^2 = 1$ pour G_2.

Construction de fonctionnelles A. Soit F, une fonctionnelle définie dans le domaine D et telle que l'intégrale

$$A\,|f(x)| = \int_{-\infty}^{+\infty} F\,|f_m(x)|\,dm = \int_{-\infty}^{+\infty} F(c_i\lambda_i^m)\,dm$$

ait un sens en chaque point $f(x)$ ou c_i de D. Il est clair que cette fonctionnelle est invariante relativement à toute substitution $f_0 \to f_\nu$ ou $c_i \to c_i \lambda_i^\nu$. La fonctionnelle A est automorphe pour le groupe G_1. Pour le groupe G_2 on formerait la série où m ne prend que des valeurs entières

$$A|f(x)| = \sum_{-\infty}^{+\infty} F|f_m(x)|.$$

L'intégrale précédente peut être utile à la critique de la convergence de la série, aussi est-ce sur le groupe G_1 que je vais insister. Il existe une infinité de manières de construire des intégrales convergentes.

La fonction γ introduite plus haut qui peut aussi s'écrire

$$\gamma(c_i, m) = \int_0^1 f^2_{-m}(x)\,dx$$

varie de zéro à $+\infty$ lorsque m varie de $-\infty$ à $+\infty$, sa dérivée par rapport à m tend vers zéro comme λ_1^{+m} lorsque $m \to -\infty$. Si $H|f_m(x)|$ est une fonction continue de m en chaque point de D et en valeur absolue moins rapidement croissante que $\gamma^{-1-\varepsilon}e^\gamma$ lorsque $m \to +\infty$ et moins rapidement croissante que λ'^{-m} lorsque m tend vers $-\infty$, ε étant un nombre positif et λ' un nombre tel que $1 < \lambda' < |\lambda_1|$, les fonctionnelles automorphes

$$A|f(x)| = \int_{-\infty}^{+\infty} H|f_m(x)|\, e^{-\gamma} \frac{d\gamma}{dm}\, dm$$

seront bien définies dans tout le domaine D. Avec une fonction H analogue à la précédente on pourra former les fonctionnelles

$$A_k|f(x)| = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H|f_m(x)|\, e^{-k^2(\varrho-\gamma)^2} \frac{d\gamma}{dm}\, dm$$

où k et ϱ sont deux paramètres positifs. Si l'on fait augmenter k au dela de toute limite ces fonctionnelles A_k qui sont automorphes convergent vers la fonctionnelle

$$A|f(x)| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{k \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H|f_m(x)|\, e^{-k^2(\varrho-\gamma)^2} \frac{d\gamma}{dm}\, dm$$

et le caractère d'automorphisme se conserve à la limite. Cette dernière fonctionnelle définie et même construite dans tout le domaine D prend sur l'hypersphère $\sum c_i^2 = \varrho$ les mêmes valeurs que H. Si $\varrho = 1$, A prend sur le domaine P les mêmes valeurs que la fonctionnelle arbitraire H.

Le groupe G_1, est en rapport avec une équation linéaire aux dérivées partielles. En effet, lorsque m varie le point $c_i \lambda_i^m$ décrit dans l'espace Ω une courbe Γ. La tangente à Γ au point c_i a la direction $c_i L\lambda_i$ ou L désigne le logarithme

népérien. La fonctionnelle A ne varie pas le long d'une même ligne Γ et satisfait à l'équation

$$\sum \frac{\partial A}{\partial c_i} c_i L\lambda_i = 0$$

dont les courbes Γ sont les caractéristiques. Sur la sphère S on a $A = H$ et comme on le voit géométriquement

$$\frac{\partial A}{\partial c_i} = \frac{\partial H}{\partial c_i} - c_i \frac{\sum \frac{\partial H}{\partial c_\iota} c_i L\lambda_i}{\sum c_\iota^2 L\lambda_\iota}.$$

Si les dérivées de H existent sur S et satisfont à l'inégalité très peu restrictive

$$\left|\frac{\partial H}{\partial c_i}\right| < M |c_i| |\lambda_i|^p$$

en chaque point c_i, M et p étant deux entiers indépendants de i, la dérivée fonctionnelle

$$A' | f(x), t | = \sum \frac{\partial A}{\partial c_\iota} \psi_i(t)$$

existera en chaque point du domaine D. Pour la transformation infinitésimale $d\nu$, f et A' satisfont aux équations intégro-différentielles

$$\frac{\partial f_\nu(x)}{\partial \nu} = \int_0^1 l(x, y) f_\nu(y) dy$$

$$\frac{\partial A' | f_\nu(t), x |}{\partial \nu} = -\int_0^1 l(x, y) A' | f_\nu(t), y | dy$$

ou $l(x, y)$ est le noyau de la substitution infinitésimale

$$l(x, y) \sim \sum (L\lambda_i) \psi_i(x) \psi_i(y)$$

et ces deux équations définissent entièrement le groupe G_1 et les fonctionnelles automorphes A relatives à ce groupe.

Remarque. - En effectuant une normalisation préalable, c'est à dire en ramenant par homothétie les fonctions $f_n(x)$ sur la sphère S, les fonctions fondamentales $\psi_i(x)$ sont les seuls points doubles pour les groupes G_1 et G_2 qui soient intérieurs au domaine D projeté sur S.

H. STEINHAUS (Lwów - Polonia)

QUELQUES APPLICATIONS DE L'ANALYSE FONCTIONNELLE À LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE (1)

On trouve dans une Note assez récente de M. BANACH ce résultat bien curieux: on peut déduire l'existence de *fonctions* continues *sans dérivée* de propriétés générales des opérations fonctionnelles linéaires (2). Quand on n'insiste pas sur la rigueur des énoncés et des démonstrations, la méthode est la suivante:

$$\nu\left[x\left(\tau+\frac{1}{\nu}\right)-x(\tau)\right]=F_\nu(x)$$

est une *opération linéaire* qui attribue a toute fonction (continue) $x(\tau)$ une « valeur » $F_\nu(x)$ qui est elle-même une fonction de τ, ν étant un nombre naturel. Évidemment la limite

$$F_\infty(x)=\lim_{\nu\to\infty}F_\nu(x)=x'(\tau)\left(=\frac{dx}{d\tau}\right)$$

existe pour les $x(\tau)$ différentiables. $x'(\tau)$ apparaît donc comme une limite de fonctionnelles linéaires $F_\nu(x)$ qui existent à elles pour tout x continu. Or, on a

$$F_\infty\left(\frac{\sin q\tau}{q}\right)=\cos q\tau,$$

et on reconnait que $F_\infty(x)$ est essentiellement discontinue, car $\frac{\sin q\tau}{q}$ tend (uniformément) vers $\equiv 0$ pour $q\to\infty$, tandis que la « valeur » $\cos q\tau$ n'approche pas $F_\infty(0)=0$ et même elle ne tend vers aucune limite (quelque peu exigeante que soit la notion de convergence adoptée). Or, les *propriétés générales* des opérations linéaires enseignent que la limite des opérations continues est continue quand elle existe dans tout le champ. $F_\infty(x)$ ne saurait donc exister dans tout le champ et on voit par là l'existence des $x(\tau)$ continues pour lesquelles l'opération $F_\infty(x)\equiv\frac{dx}{d\tau}$ est *impossible.*

Nous voulons montrer la généralité de cette méthode en choisissant à tître d'exemple un problème du calcul intégral. Pour préciser le sens trop vague de

---

(1) Les détails et les autres applications paraîtront dans le 1er tome des « Studia Mathematica », une revue consacrée à l'analyse fonctionnelle.

(2) *Sur la convergence presque partout de fonctionnelles linéaires.* Bulletin des Sciences Mathématiques, 2e serie, t. L, (1926).

l'expression *propriétés générales des opérations linéaires*, nous allons donner les définitions de la Note citée et formuler un *lemme* dû à M. SAKS (1) qui résume les propriétés que nous aurons à employer.

Nous aurons à faire à l'espace des fonctions continues. C'est un espace *vectoriel, métrique* et *complet.* Il est *vectoriel* car on peut executer l'addition de deux éléments quelconques $x(\tau)+y(\tau)$ et l'on peut les multiplier par des nombres λ réels: $\lambda \cdot x(\tau)$, tout en observant les règles de l'algèbre ordinaire.

Il est *métrique* car on peût y définir une « norme » $\|x\|$ — à savoir le maximum de $|x(\tau)|$ dans l'intervalle $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$ dans lequel x est définie — et cette *norme* sera un nombre nonnégatif jouissant des propriétés suivantes:

$$\|x\|=0 \text{ équivaut à } x=\theta,$$

θ étant le « zéro » de notre algèbre

$$\|\lambda \cdot x\|=|\lambda| \cdot \|x\|,$$
$$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|.$$

L'adjectif *complet* signifie que si

$$\lim_{p>q\to\infty} \|x_p-x_q\|=0,$$

alors on aura pour un certain x_∞

$$\lim_{p\to\infty} \|x_\infty-x_p\|=0,$$

ce que nous écrirons aussi

$$\lim_{p\to\infty} x_p=x_\infty \qquad (\text{« postulat de Cauchy »}).$$

Nous aurons à considérer des opérations $F(x)$ *linéaires* définies dans un *champ*, cela veut dire dans un espace vectoriel, métrique et complet. [Dans notre cas le champ sera celui de fonctions continues]. « Linéaire » signifie: *additive, homogène* et *continue*;

additive signifie: $F(x+y)=F(x)+F(y)$;

homogène signifie: $F(\lambda x)=\lambda F(x)$.

Pour comprendre la *continuité*, il faut remarquer que les « valeurs » $F(x)$ sont elles-mêmes des fonctions; on dira que $F(x)$ est une fonctionnelle continue si

(1) $$\lim_{n\to\infty} x_n=x_\infty$$

implique

(2) $$\text{as } \lim_{n\to\infty} F(x_n)=F(x_\infty).$$

Le sens de la relation (1) a été expliqué tout à l'heure; la relation (2) emploie une autre notion de la limite, la *limite asymptotique.*

---

(1) *Sur les fonctionnelles de M. Banach et leur application aux développements des fonctions.* Fundamenta Mathematica, X, (1927), pp. 186-196; p. 192, théorème 6.

[EXPLICATION: une suite $\{y_n(\tau)\}$ converge vers $y_\infty(\tau)$ *asymptotiquement* sur un ensemble T si il existe une fonction $n(\varepsilon)$ telle que $n>n(\varepsilon)$ implique $|y_n(\tau)-y_\infty(\tau)|<\varepsilon$ pour tous les τ de T, excepté un ensemble $\{\tau\}$ de mesure $<\varepsilon$].

Le lemme de M. Saks. - $\{F_n(x)\}$ soit une suite des opérations linéaires, définies pour les x d'un champ X. Les valeurs $y_n(\tau)=F_n(x)$ sont des fonctions d'une variable réelle τ définies dans un certain ensemble Λ.

On suppose que X contient un sousensemble partout dense X^* tel que pour les x^* de X^* la limite

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x^*)=F_\infty(x^*) \tag{3}$$

existe *au sens ordinaire* (donc différent de (1) et de (2)) presque partout sur Λ.

THÈSE:

$$\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2, \qquad \Lambda_1\Lambda_2=0$$
$$X=X_1+X_2, \qquad X_1X_2=0$$

(les Λ étant des ensembles ponctuels mesurables et les X des ensembles abstraits); X_1 est de la prémière, X_2 de la deuxième catégorie (donc non vide) et

$$\lim F_n(x)=F_\infty(x)$$

existe *au sens ordinaire* pour tous les x de X presque partout sur Λ_1 et définit une opération *continue* [les « valeurs » sont des fonctions définies seulement sur $\tau\varepsilon\Lambda_1$]; d'autre part, on a pour tous les x de X_2

$$\limsup_{n\to\infty} |F_n(x)|=\infty$$

presque partout sur Λ_2.

Pour faire comprendre la portée de ce lemme, nous allons donner une application qui n'a pas été envisagée par les deux auteurs cités.

Soit $\omega(\tau)$ une fonction $\geqslant 0$ définie pour $0\leqslant\tau\leqslant 1$ telle que $\int_\varepsilon^1 \omega(\tau)d\tau$ soit finie ($\varepsilon>0$), mais $\int_0^1 \omega(\tau)d\tau=\infty$. Nous allons démontrer, qu'il existe des fonctions continues $x(\xi)$ telles que

$$\int_0^1 |x(\xi+\tau)-x(\xi)|\,\omega(\tau)d\tau=\infty$$

pour presque tous les ξ. (Le cas particulier $\omega(\tau)=\frac{1}{\tau}$ aide à saisir le point saillant de la question).

Or, on peut supposer $\int_0^1 \tau\omega(\tau)d\tau=$finie, car autrement $f(\xi)=\xi$ résout le problème.

Définissons l'opération

$$F_n(x)=\int_{\varepsilon_n}^1 [x(\xi+\tau)-x(\xi)]\omega(\tau)d\tau \qquad \left(\begin{matrix}1>\varepsilon_n>\varepsilon_{n+1}>0\\ \varepsilon_n\to 0\end{matrix}\right).$$

On voit aisément la linéarité de cette opération.

Pour appliquer le lemme, remarquons que les

$$x^* = \sum_{q=1}^{q=k} a_q \sin q\pi\tau$$

forment un ensemble X^* partout dense dans X, et que

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x^*) = F_\infty(x^*)$$

existe; calculons cette limite pour le cas particulier $x^* = \sin q\pi\tau$:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\sin q\pi\tau) = \int_0^1 [\sin q\pi(\tau+\xi) - \sin q\pi\xi]\omega(\tau)d\tau =$$

$$= \cos q\pi\xi \int_0^1 \omega(\tau) \sin q\pi\tau \cdot d\tau - 2 \sin q\pi\tau \int_0^1 \omega(\tau) \sin^2 \frac{q\pi\tau}{2}\, d\tau.$$

En posant

$$\beta_q = \int_0^1 \omega(\tau) \sin^2 \frac{q\pi\tau}{2}\, d\tau,$$

on obtient

$$\lim_{q\to\infty} \beta_q = \infty, \text{ car } \int_\varepsilon^1 \omega(\tau) \sin^2 \frac{q\pi\tau}{2}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 \omega(\tau)[1 - \cos q\pi\tau]d\tau \to \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 \omega(\tau)d\tau \text{ et } \int_0^1 \omega(\tau)d\tau = \infty.$$

Définissons

$$x_q(\tau) = \frac{\sin q\pi\tau}{\beta_q};$$

on aura

$$\lim_{q\to\infty} x_q(\tau) = \theta.$$

D'après le lemme, l'opération

$$F_\infty(x) = \int_0^1 [x(\xi+\tau) - x(\xi)]\omega(\tau)d\tau$$

est continue pour tous les x, ses « valeurs » $y(\tau)$ étant considérées sur Λ_1. Cette propriété nous permettra de déterminer Λ_1. En effet, comme $\lim x_q = \theta$, la continuité exige que l'on ait

$$\text{as } \lim_{q\to\infty} F_\infty(x_q) = F_\infty(\theta) = \theta$$

relativement à Λ_1. Or

$$F_\infty(x_q) = \frac{\cos q\pi\xi}{\beta_q} \int_0^1 \omega(\tau) \sin q\pi\tau \cdot d\tau - 2 \sin q\pi\xi = \gamma_q \cos q\pi\xi - 2 \sin q\pi\xi,$$

ce qui doit tendre asymptotiquement vers 0 sur Λ_1 quand $q \to \infty$. Il s'ensuit que Λ_1 est un ensemble de mesure nulle. Λ_2 est donc l'intervalle $<01>$ presque entier. On voit donc que, pour certains $x(\tau)$ continues, formant un ensemble X_2

de deuxième catégorie (qui est l'ensemble de toutes les fonctions continues moins un ensemble de première catégorie), on aura

$$\text{(R)} \qquad \limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\varepsilon_n}^{1} [x(\xi+\tau)-x(\xi)]\omega(\tau)d\tau \right| = \infty$$

presque partout dans $<01>$.

Nous avons démontré ainsi plus que ce qui a été annoncé. En même temps nous avons prouvé que les fonctions continues, pour lesquelles la relation (R) n'a pas lieu presque partout, constituent en quelque sorte un ensemble exceptionnel.

S. KACZMARZ (Lwów - Polonia)

ÜBER EINE ANWENDUNG DER FUNKTIONALEN AN DIE ORTHOGONALREIHEN

Unter den verschiedenen Gebieten der Mathematik, an welche die Funktionalentheorie angewandt wird, nimmt die Theorie der Orthogonalreihen einen wichtigen Platz ein. Ich will eine neue Anwendung an diese Theorie angeben; es werden gewisse neue Sätze mit Hilfe des folgenden Satzes von S. BANACH erhalten.

Satz von Banach (1). - Es sei X eine beliebige, sammt Quadrat integrierbare Funktion im Intervall $[0, 1]$. Es sei weiter eine Folge $U_n(X)$ von Funktionalen gegeben, welche für jedes X quadratisch integrierbare Funktionen sind.

Unter den Voraussetzungen:

1) $U_n(X)$ *sind linear und asymptotisch stetig*;

2) $\limsup U_n(X)$ *ist fast überall endlich*;

3) *es existiert fast überall* $\lim U_n(Y)$ *für jede Funktion* Y *einer im Felde der* X *überall dichten Menge* B;

existiert fast überall die Grenze

$$\lim_{n\to\infty} U_n(X).$$

Es sei also ein Orthogonalsystem $\{\varphi_n(x)\}$, definiert im Intervall $[0, 1]$, gegeben. Wir betrachten eine Orthogonalreihe

$$\sum_1^\infty a_n\varphi_n(x), \tag{1}$$

welche die Bedingung

$$\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$$

erfüllt. Dann weiss man, dass die Bedingung

$$\sum_1^\infty a_n^2(\lambda gn)^2 < \infty$$

(1) S. BANACH, Bull. Sc. M., L (1926), Th. III.

zur fast ausnahmslosen Konvergenz der Reihe (1) genügt; diese Bedingung aber kann nicht verschärft werden. Trotzdem gibt es spezielle Systeme, welche viel schärfere Konvergenzbedingungen zulassen, z. B. genügt bei dem trigonometrischen System die Voraussetzung $\sum_1^\infty a_n^2 \lambda gn < \infty$. Es entsteht also die Frage, welche Eigenschaften des Systems erlauben die oberwähnte Konvergenzbedingung zu verschärfen.

Zu diesem Zwecke ziehen wir die LEBESGUE'schen Funktionen des Orthogonalsystems, d. h. die Funktionen

$$\varrho_n(x) = \int_0^1 \left| \sum_1^n \varphi_k(x)\varphi_k(t) \right| dt$$

in Betracht.

H. RADEMACHER hat bewiesen, dass fast überall

$$\varrho_n(x) = 0\left(\sqrt{n\lambda gn}^{3+\varepsilon}\right) \qquad \varepsilon > 0.$$

Wie ich schon ([1]) gezeigt habe, gilt fast überall

$$\varrho_n(x) = 0\left(\sqrt{n\lambda gn}^{1+\varepsilon}\right)$$

Es zeigt sich nun, dass der Rang des Wachstums der LEBESGUE'schen Funktionen auf die Konvergenz einen Einfluss besitzt; man kann nämlich mit Hilfe des obgenannten Satzes von BANACH folgendes beweisen:

Satz I. - *Wenn fast überall*

$$\varrho_n(x) \leqslant A,$$

dann konvergiert die Reihe (1) *fast überall.*

Satz II. - *Wenn* $\{f_n\}$ *eine monotone Folge von reellen Zahlen bezeichnet und*

1) $\varrho_n(x) = 0(f_n)$ *fast überall;*

2) $\sum_1^\infty a_n^2 f_n < \infty$ *dann konvergiert die Reihe* (1) *fast überall.*

Entsprechende Sätze gelten auch für die Summierbarkeit der Reihe (1) mit CÉSARO'schen Mitteln ganzzahliger Ordnung. Der Einfacheit halber formuliere ich die Sätze nur für die $(C, 1)$ Summierbarkeit. Statt $\varrho_n(x)$ betrachten wir die Mittelfunktion

$$\varrho_n(x) = \int_0^1 \left| \sum_1^n \varphi_k(x)\varphi_k(t)\left(1 - \frac{k}{n}\right) \right| dt.$$

Satz III. - *Wenn fast überall*

$$\varrho_n(x) \leqslant A,$$

dann ist die Reihe (1) *fast überall* $(C, 1)$ *summierbar.*

([1]) Am I. Polnischen Mathematischen Kongress in Lwów, September 1927.

Satz IV. - *Wenn*

1) $\varrho_n(x)=0(f_n)$;

2) $\Delta\frac{1}{\sqrt{f_n}}=0\left(\frac{1}{n\sqrt{f_n}}\right)$

3) $\sum_1^\infty k\left|\Delta^2\frac{1}{\sqrt{f_n}}\right|<\infty$;

4) $\sum a_n^2 f_n<\infty$, *dann ist die Reihe* (1) *fast überall* $(C,1)$ *summierbar.*

Sezione Prima D

P. KOEBE (Leipzig - Germania)

METHODEN DER KONFORMEN ABBILDUNG UND UNIFORMISIERUNG

Bei der Entwicklung der allgemeinen Methoden der konformen Abbildung und Uniformisierung (1) war das Hauptaugenmerk zunächst auf den geforderten Existenzbeweis als solchen gerichtet. Die Frage, inwieweit diese Methoden geeignet erscheinen, die gesuchten Grössen effektiv zu gewinnen, d. h. sie mit einem beliebig vorgegebenen Genauigkeitsgrade zu errechnen, wurde dabei, namentlich in den früheren Entwicklungsstadien, ausser Betracht gelassen. Wir finden bei den Existenzbeweisen Schlussweisen angewandt, die als solche offenbar keinen Anhaltspunkt bieten, um die Anzahl der für eine numerische Durchführung erforderlichen Rechnungsschritte abzuschätzen, wenn ein gewünschter Annäherungsgrad an die gesuchte Grösse erreicht werden soll. Eine solche Schlussweise ist z. B. die folgende: « Eine Folge monoton wachsender Grössen ist konvergent, wenn man eine Majorante für alle diese Grössen hat »; oder diese Schlussweise: « Eine unendliche Folge von Grössen liegt zwischen zwei endlichen Schranken; dann gibt es einen Häufungswert derselben ».

Offenbar rollen wir hiermit eine prinzipielle Frage auf. Es ist nicht meine Absicht, an dieser Stelle die Frage bis ins Detail zu verfolgen. Vielmehr will ich an Hand einiger mir besonders instruktiv erscheinender Beispiele zeigen, wie sich die gestellte Frage angreifen lässt. Dabei wird namentlich die Bedeutung des Verzerrungssatzes für den genannten Zweck hervortreten. Wir werden ferner dazu geführt, eine wichtige Unterscheidung zu machen. Es kann nämlich erstens sein, dass wir in der Lage sind, die gewünschte Abschätzung für ein anzuwendendes Verfahren *a priori* zu geben, in der Weise, dass auf Grund dieser Abschätzung selbst der betreffende Existenzbeweis erbracht wird; oder es kann zweitens sein, dass wir die gewünschte Abschätzung erst *a posteriori* angeben können, nämlich unter Voraussetzung der Existenz der gesuchten Grösse, wobei

(1) Wegen umfassender literatischer Nachweisungen sei verwiesen auf die *Preisschrift* des Verfassers in Acta math. Bd. 50 (1927) sowie auf des Verfassers: *Referat über automorphe Funktionen und Uniformisierung*, im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 21 (1912).

es dann gleichgültig ist, wie diese Existenz sichergestellt worden ist. Im letzteren Falle ist dann wesentlich zu fordern, dass die Abschätzung a posteriori die gesuchte Grösse selbst oder erst durch sie bekannt werdende Grössen nicht enthalten darf. Die gesuchte Grösse soll ja durchaus als Unbekannte betrachtet werden, die durch das Näherungsverfahren mit beliebig gewünschtem Genauigkeitsgrade gefunden werden soll.

1. - *Uniformisierung hyperelliptischer Kurven durch automorphe Funktionen des Schottkyschen Typus mittels eines Iterationsverfahrens.* In der Arbeit « Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. VI ». (Math. Zeitschr. Bd. 7, 1920) habe ich u. a. ein Iterationsverfahren dargelegt, das die Uniformisierung hyperelliptischer Riemannscher Flächen durch automorphe Funktionen des Schottkyschen Typus leistet. Die $2p+2$ Windungsstellen der schlichten z-Ebene werden durch $p+1$ getrennte Linien (Verzweigungsschnitte) paarweise miteinander verbunden, und es wird die Aufgabe gestellt, den so gewonnenen $(p+1)$-fach zusammenhängenden schlichten z-Bereich auf einen anderen schlichten Bereich eineindeutig konform abzubilden in der Weise, dass die erwähnten Schnittlinien zu geschlossenen Linien aufgeweitet erscheinen, die durch elliptische Substitutionen der Periode 2 einzeln auf sich selbst bezogen sind.

Zur Lösung dieser Aufgabe wird eine unbeschränkte Folge von Fundamentaltransformationen (geeignet normierte Quadratwurzel-Transformationen) angewendet, wobei der ursprüngliche Bereich mit jedem weiteren Schritte im Bilde mehr schlicht nebengelagerte Bereiche zulässt, die durch die entstandenen Bezugssubstitutionen und deren Zusammensetzung aus dem Grundbilde entstehen. Grösse und Gestalt aller dieser Bilder werden nun mit Hilfe des Verzerrungssatzes so weit beherrscht, dass ein voller Konvergenzbeweis zustandekommt, der eine Abschätzung *a priori* der mit dem n-ten Schritte erreichten Annäherung an die unbekannte Grenzfunktion gestattet (1).

2. - *Konforme Abbildung eines symmetrischen Bereichs auf einen Kreisbereich durch ein analoges Iterationsverfahren.* Einen speziellen Fall hat man, wenn man die schlichte z-Ebene längs endlichvielen getrennten, auf dem Einheitskreis liegenden Schlitzen aufgeschnitten denkt und nun die konforme Abbildung der aufgeschlitzten z-Ebene (Bereich B_0) auf einen symmetrischen

---

(1) Vgl. zu Nr. 1 ausser meiner genannten Abhandlung (Math. Zeitschr. Bd. 7, 1920) auch P. I. MYRBERG: « Über die numerische Ausführung der Uniformisierung » (Acta Soc. Fenn. t. 48 Nr. 7 (1920). Die Grundidee der Abschätzungsmethode (Verzerrungssatz) findet sich zuerst in zwei Gött. Nachr. Noten (1908, S. 112-116 und 1909, S. 68-76) des Verfassers, expliziter in der Abhandlung Math. Ann. Bd. 69, S. 1-81 (1910) des Verfassers.

Kreisbereich verlangt, dessen begrenzende Kreise die Peripherie des Einheitskreises orthogonal schneiden. Dabei wird man die Normierung der gesuchten Grösse und der einzelnen Fundamentaltransformationen des Iterationsverfahrens zweckmässig dadurch vornehmen, dass man den Nullpunkt und den Unendlichpunkt sich immer selbst entsprechen lässt, ferner darauf achtet, dass bei jedem Schritte die Bilder der dem Einheitskreise angehörenden Komplementärintervalle der gegebenen Schlitze auch ganz dem Einheitskreise angehören. Das Verfahren liefert in der n-ten Stufe einen zum Einheitskreis symmetrischen Bildbereich $B_0^{(n)}$ des ursprünglichen Bereiches B_0; und zwar ist $B_0^{(n)}$ bei genügend hohem Index n ein von lauter regulären geschlossenen analytischen Linien begrenzter Bereich, der einen schlicht nebenlagernden beschränkten analytischen Spiegelungsprozess zulässt, wobei endlichviele Bilder von $B_0^{(n)}$ gowonnen werden, die die ganze Ebene schlicht ausfüllen und zusammen einen Bereich ausmachen, der von einer grösseren, mit dem Index n unbegrenzt wachsenden Anzahl von Schlitzen auf dem Einheitskreis begrenzt wird. In der Grenze entsteht ein Bereich $B_0^{(\infty)}$ von allseitig unbeschränkter analytischer Spiegelungsfähigkeit, der dann ein Kreisbereich sein muss.

Ebenso wie das unter Nr. 1 besprochene allgemeinere Iterationsverfahren gestattet auch dieses speziellere Verfahren eine Abschätzung *a priori*, die zugleich den Konvergenzbeweis vermittelt.

3. - *Uniformisierung algebraischer Funktionen (geschlossener Riemannscher Flächen) durch automorphe Funktionen des Schottkyschen Typus* (1). Die Aufgabe der Uniformisierung beliebiger algebraischer Gebilde vom Geschlecht p gemäss dem SCHOTTKYschen Typus kann auf die Aufgabe der schlichten Abbildung einer gewissen unendlich-vielfach zusammenhängenden schlichtartigen Überlagerungsfläche $F^{(\infty)}$ der Riemannschen Fläche F der betreffenden algebraischen Funktion zurückgeführt werden. Diese Überlagerungsfläche entsteht durch relationenfreie Zusammenfügung unendlichvieler Exemplare F_0, d. i. die längs p nichtzerfällenden Rückkehrschnitten aufgeschnitten zu denkende Fläche F. Die Uniformisierende ist die Grenzfunktion einer Abbildungsfunktion

$$f_n(z) = \frac{1}{z - z_0} + ((0))_n,$$

die einen nur aus endlichvielen Exemplaren F_0 gebildeten, endlichvielblättrigen berandeten Teil $F^{(n)}$ der vollständigen Überlagerungsfläche $F^{(\infty)}$ schlicht abbildet. $F^{(n+1)}$ entstehe allgemein aus $F^{(n)}$ durch Anfügung je eines weiteren Exemplares

(1) Vgl. hierzu meine Abhandlung in Math. Ann. Bd. 69, S. 1-81 (1910) und anlehnende numerische Entwicklungen in *Fricke-Klein*, Aut. Funkt. Bd. II.

F_0 an jede Randlinie von F_n. Indem man vom Verzerrungssatz in analoger Weise, wie oben, Gebrauch macht, gelangt man zu einer Abschätzung *a priori* des konvergenten Prozesses in der Weise, dass man in der Tat von vornherein sagen kann, wie hoch man den Index n zu nehmen hat, um sicher zu sein, mit der Grösse $f_n(z)$ die gesuchte Uniformisierende mit einem vorgeschriebenen Genauigkeitsgrade zu erreichen. Die Frage, wie die Grösse $f_n(z)$ ihrerseits mit dem gewünschten Genauigkeitsgrade gefunden werden kann, bleibt dabei eine weitere Frage. Ihre Beantwortung hängt von der angewandten Methode ab (Alternierendes Verfahren, Dirichletsches Prinzip usw.).

4. - *Spitzenpolygonaufgabe, erstes Iterationsverfahren.* Auf dem Einheitskreis der z-Ebene seien n Punkte gegeben (randsignierte Kreisscheibe). Verlangt wird die Abbildung der Fläche $|z| \leqq 1$ auf die Fläche eines Spitzenpolygons, das von n Orthogonalkreisbögen innerhalb eines ζ-Einheitskreises gebildet wird; und zwar sollen bei der Abbildung die Eckpunkte des Polygons den markierten Punkten des Einheitskreises entsprechen. Zur Lösung dieser Aufgabe kann man ein dem Iterationsverfahren der Nummer 2 ganz analoges Iterationsverfahren zur Anwendung bringen, wobei im Grundzweige dem Nullpunkt immer der Nullpunkt entspricht, und die Bilder der Eckpunkte, die sich während des Prozesses unter Anwendung von Spiegelungen häufen, immer wieder auf den Einheitskreis zu liegen kommen. Im vorliegenden Falle versagt die Anwendung des Verzerrungssatzes nach Analogie der Nummer 2, weil die « Komplementärintervalle », die dort gewissermassen eine Stützbasis für die erfolgreiche Anwendung des Verzerrungssatzes bieten, hier zu Punkten zusammengeschrumpft sind.

Nehmen wir jedoch unter Verzicht auf eine a priori Schätzung nunmehr an, dass die Existenz der gesuchten Grösse $\zeta(z)$ irgendwie bewiesen sei, was in der Tat gelingt. Wir wissen dann um die Existenz eines die Aufgabe lösenden Spitzenpolygons S, das den Nullpunkt in seinem Inneren enthält und von welchem wir einen Eckpunkt mit dem Einheitspunkte zusammenfallend denken können. Die n-te Näherungsfunktion unseres zu untersuchenden Verfahrens wird in der ζ-Ebene wesentlich dargestellt durch die Grösse $g_n(\zeta)$, d. i. die Greensche Funktion eines Spitzenpolygons $S^{(n)}$, dessen Fläche durch einen endlichen übersichtlichen Spiegelungsprozess aus S entsteht. Man spiegelt nämlich das Spitzenpolygon S an einer seiner Seiten, das so erweiterte Spitzenpolygon $S^{(1)}$ wieder an einer seiner Seiten usf. n-mal. Hierbei kommt es in geometrisch leicht abzuschätzender Weise zu einer allmählichen Ausschöpfung der Fläche des ζ-Einheitskreises und damit zu einer abschätzbaren Annäherung der offenbar monoton wachsenden Grössen $g_n(\zeta)$ an die Greensche Funktion des vollen Einheitskreises. Diese Abschätzung würde das von uns Gewünschte bereits leisten, wenn wir das Spitzenpolygon selbst als bekannt voraussetzen könnten. Das ist jedoch nicht erlaubt, da die Grösse ζ ja erst gefunden werden soll. Andererseits sind wir aber

jedenfalls in der Lage, durch Anwendung des Verzerrungssatzes die Abstände je zweier im Zyklus der Ecken benachbarter Ecken des unbekannten Spitzenpolygons S nach unten abzuschätzen. Das genügt, um die erwähnte Schätzung betreffend die Ausschöpfung des Einheitskreises durch Spiegelung auch für dieses unbekannte Spitzenpolygon gültig zu gestalten. Wir gewinnen so eine Abschätzung *a posteriori* unseres Iterationsverfahrens (1).

5. - *Spitzenpolygonaufgabe, zweites Iterationsverfahren.* Man kann zunächst drei der n auf dem z-Einheitskreise markierten Punkte auswählen und für diese durch Vermittlung der auch numerisch als bekannt anzusehenden Modulfunktion die Spitzenpolygonaufgabe lösen (Funktion $z'(z)$). Dadurch gewinnt man ein Spitzendreieck, auf dessen Seiten markierte Punkte auftreten, nämlich die Bilder der vorhin nicht ausgewählten $n-3$ Punkte (Nebenpunkte). Spiegelt man dieses Spitzendreieck in bekannter Weise sukzessive unbeschränkt, so kommt es zu einer Ausfüllung des z'-Einheitskreises. Auf den unendlichvielen so entstehenden Orthogonalkreisbögen hat man sich die Bilder der Nebenpunkte ebenfalls markiert zu denken. Die Aufgabe ist jetzt darauf zurückgeführt, die mit unendlichvielen markierten Punkten im Innern ausgestattete Fläche des z'-Einheitskreises derjenigen Fundamentalabbildung zu unterwerfen, für welche die erwähnten unendlichvielen markierten Punkte Punktierungsstellen (Verzweigungsstellen unendlich hoher Ordnung) werden. Diese Abbildung gelingt unter Anwendung eines Iterationsverfahrens, bestehend aus unendlichvielen logarithmischen Fundamentaltransformationen, deren einzelne immer eine Punktierungsstelle bezw. eine während des Prozesses daraus hervorgegangene neue Punktierungsstelle nebst ihrem Spiegelpunkte bezüglich des Einheitskreises als logarithmische Verzweigungspunkte (Fundamentalpunkte) hat, während sie den Einheitskreis auf sich abbildet. Das Paar der jeweiligen Fundamentalpunkte wird bei der Fundamentaltransformation in einen Punkt der Peripherie des Einheitskreises übergeführt. Denken wir uns bei diesem Verfahren etwa immer die dem Nullpunkt nächst vorhandene Punktierungsstelle als Fundamentalpunkt gewählt, so gestattet dieses Verfahren die Anzahl der Schritte *a priori* abzuschätzen, die erforderlich sind, um eine Fläche vom Radius $1-\varepsilon$ (ε beliebig klein) von Punktierungen freizumachen, und dadurch zu einer vollständigen Abschätzung *a priori* zu gelangen. Übrigens kann die Auswahl der Fundamentalpunkte statt nach dem Prinzip des nächsten Punktes auch nach gruppentheoretisch topologischen Gesichtspunkten erfolgen, ohne dass dadurch wesentliche Schwierigkeiten für die Durchführung der a priori Abschätzung entstehen (2).

---

(1) Vgl. zu Nr. 4 die Nummer 5 meiner Abhandlung in Acta math. Bd. 50.

(2) Vgl. zu Nr. 5 die §§ 5 und 7 meiner Abhandlung in Acta math. Bd. 40.

6. - *Hauptuniformisierende einer beliebigen algebraischen Funktion.* Die Bestimmung der Hauptuniformisierenden einer beliebigen algebraischen Funktion nach der Methode der Überlagerungsfläche kommt darauf hinaus, die zu einer Riemannschen Fläche F vom Geschlecht p ($p \geqq 2$) gehörende unendlichvielblättrige einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche $F^{(\infty)}$ ohne relative Windungspunkte auf die Fläche des Einheitskreises eineindeutig abzubilden. Die Überlagerungsfläche denken wir uns als Grenze von endlichvielblättrigen Näherungsflächen $F^{(n)}$ konstruiert, deren jede aus der vorhergehenden durch Anfügung eines Kranzes von Exemplaren F_0 entsteht, wobei F_0 die von einem Punkte 0 der Fläche F durch p Rückkehrschnittpaare in bekannter Weise einfach zusammenhängend gemachte Fläche F ist.

Das der Fläche F_0 entsprechende Fundamentalpolygon Φ_0 ist unbekannt. Doch können wir seine Existenz als bewiesen annehmen. Alsdann bemerkt man wieder (vgl. Nr. 4), dass die Grösse $\log \frac{1}{|\zeta|}$ die Grenze der Funktionen $g_n(\zeta)$ ist, nämlich der Greenschen Funktionen derjenigen immer grösser werdenden Bereiche $\Phi^{(n)}$, die durch die kranzförmige Erweiterung aus dem ursprünglichen Fundamentalbereich Φ_0 nach und nach entstehen. Entsprechend denken wir uns die Greensche Funktion der Überlagerungsfläche $F^{(\infty)}$ als Grenze der Greenschen Funktionen der Flächen $F^{(n)}$ aufgefasst. Unsere Frage lautet jetzt: *Wieviel Kränze müssen dem ersten Exemplar* F_0 *angefügt werden, um einen vorgeschriebenen Annäherungsgrad* ε *der zu* $F^{(n)}$ *gehörenden Greenschen Funktion an die unbekannte Greensche Funktion der Fläche* $F^{(\infty)}$ *zu erreichen?*

Wir bemerken nach Analogie der Ausführungen der Nummer 4 folgendes. Der unbekannte, jedoch als existierend vorausgesetzte Fundamentalbereich Φ_0, der das gesuchte ζ-Bild der Fläche F_0 ist, ist hinsichtlich seiner gestaltlichen Verhältnisse durch den Verzerrungssatz angebbaren Schranken unterworfen. Andererseits ist aber auch über seine Grösse etwas bekannt, nämlich dass er den festen nichteuklidischen Inhalt $4(p-1)\pi$ haben muss. Aus diesen beiden bekannten Unterlagen errechnet sich insbesondere eine untere Schranke für den nichteuklidischen Mindestabstand irgend zweier nichtbenachbarter Begrenzungsseiten von Φ_0. Damit wird zugleich eine untere von n unabhängige Schranke für den nichteuklidischen Abstand der beiden Konturen irgend eines der Kränze gewonnen, die sich nach und nach entsprechend dem Übergang von F_0 zu $F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots$ an den unbekannten Fundamentalbereich Φ_0 ansetzen, von welch letzterem wir annehmen können, dass er den Nullpunkt enthalte. Damit wird auch ein Index N bekannt, derart, dass für alle $n \geqq N$ der $F^{(n)}$ entsprechende unbekannte Bereich $\Phi^{(n)}$ eine um den Nullpunkt beschriebene Kreisfläche von beliebig gross vorgebbaren nichteuklidischen Radius ganz im Innern enthält. Dementsprechend ergibt sich ein beliebig vorgebbarer Annäherungsgrad der Greenschen Funktion von $F^{(n)}$ an die gesuchte Greensche Funktion von $F^{(\infty)}$,

die mit der Grösse $\log \frac{1}{|\zeta|}$ identisch ist. Es ist uns also gelungen, eine Abschätzung *a posteriori* zu leisten. Die Näherungsbestimmung der Grösse $\log \frac{1}{|\zeta|}$ mit vorgeschriebenem Genauigkeitsgrad erscheint zurückgeführt auf die Bestimmung der Greenschen Funktion einer tatsächlich angebbaren endlichvielblättrigen Fläche $F^{(N)}$.

7. - *Rein funktionentheoretische Bestimmung der Hauptuniformisierenden einer algebraischen Funktion.* In meiner Preisschrift im 50. Bande der Acta math. habe ich (zweiter Teil der Abhandlung) ein besonderes funktionentheoretisches Verfahren zur Gewinnung der Hauptuniformisierenden einer beliebig gegebenen algebraischen Funktion entwickelt. Die betreffende endlichvielblättrige Riemannsche Fläche F der algebraischen Funktion wird zunächst einer Fundamentalabbildung $\zeta_1(z)$ mit Relativverzweigung unterworfen, nämlich derjenigen, welche man erhält, indem man die schlichte z-Ebene an den Stellen punktiert, über denen die Windungspunkte der Riemannschen Fläche liegen, und die so punktierte Ebene der gewöhnlichen Fundamentalabbildung unterwirft, wodurch in den Punktierungsstellen lauter Verzweigungsstellen unendlich hoher Ordnung der Grösse $\zeta_1(z)$ entstehen. Die eigentlich zu bestimmende Grösse $\zeta = \zeta(\zeta_1)$ wird darauf in der Form eines unendlichen Produktes aus ζ_1 gewonnen, das über die Elemente einer gewissen unendlichen Substitutionsgruppe zu erstrecken ist, die ihrerseits von einem gewissen unendlichvielseitigen Polygon erzeugt wird.

Bei der Durchführung der Beweisführung wird die erwähnte Gruppe einem Ausschöpfungsprozess unterworfen, in dem sie nämlich als Grenze solcher Untergruppen von sich selbst betrachtet wird, die nur von endlichvielen der Erzeugenden gebildet werden. Die entsprechenden Teilprodukte liefern Abbildungen der betreffenden Näherungsfundamentalpolygone auf die Fläche eines Kreises. Betrachtet man diese Näherungsfunktionen relativ zu $F^{(\infty)}$, so bemerkt man, dass es sich hier um Funktionen handelt, die gewisse einfach zusammenhängende Überlagerungsflächen von $F^{(\infty)}$ auf den Einheitskreis abbilden. Diese Überlagerungsflächen sind indes nicht, wie in Nr. 6 angenommen wurde, Teilbereiche der Überlagerungsfläche $F^{(\infty)}$. Wohl aber sind es Bereiche, die bei fortschreitender Gruppenausschöpfung immer umfassendere Teilbereiche der $F^{(\infty)}$ im gewöhnlichen Sinne als Teile enthalten. Sie konvergieren somit gegen $F^{(\infty)}$ als « Kern ». Trotzdem können die Abschätzungen der Nummer 6 auch jetzt verwendet werden, weil die Greensche Funktion eines veränderlich gedachten, der Fläche des ζ-Einheitskreises übergelagerten Bereiches auch dann gegen die Greensche Funktion des Einheitskreises konvergiert, wenn dieser Bereich mehrblättrig oder, was hier in Betracht kommt, unendlich-vielblättrig ist, sofern er nur im Grundblatte eine schlichte Kreisfläche mit gegen 1 konvergierendem Radius ϱ als Teilbereich enthält. In der Tat liegt nämlich die Greensche Funktion eines solchen Bereiches

zwischen der Greenschen Funktion des Einheitskreises und der Greenschen Funktion des Kreises vom Radius ϱ.

8. - *Anpassung der letztbesprochenen rein funktionentheoretischen Methode an die gewöhnliche Methode der Überlagerungsfläche.* Mit der Grösse $\zeta_1(z)$ der vorigen Nummer, die durch Iteration gewonnen wurde, wird zugleich eine solche Aufschneidung der Fläche F zu einer einfach zusammenhängenden Fläche F_0 bekannt, deren Bild in der ζ_1-Ebene die Form eines endlichvielseitigen, von lauter Orthogonalkreisbögen gebildeten Spitzenpolygons mit teils unbezogenen, teils bezogenen Randseiten hat. Indem wir nach dem Prinzip der kranzförmigen Erweiterung endlichviele solcher F_0 zusammenfügen, entstehen gewöhnliche einfach zusammenhängende Teilbereiche $F^{(n)}$ der Überlagerungsfläche $F^{(\infty)}$, die durch die Grösse $\zeta_1(z)$ ebenfalls auf endlichvielseitige Spitzenpolygone mit teils bezogenen, teils unbezogenen Seiten eineindeutig übertragen werden. Die Methode der unendlichen Produktbildung gestattet dann die Übertragung jedes dieser Polygone auf die schlichte Kreisfläche in der Weise, dass bezogene Punkte der Begrenzung stets ein und denselben inneren Punkt der Kreisfläche liefern. Damit ist aber eine Grundlage zur nunmehrigen Anwendung der Methode der Nummer 6 gewonnen und man kann folglich auch eine Schätzung *a posteriori* geben, d. h. eine effektiv brauchbare Angabe darüber machen, bis zu welchem Index n man zu gehen hat, um mit der Abbildung der $F^{(n)}$ gemäss dem funktionentheoretischen Verfahren der gegenwärtigen Nummer die gesuchte Hauptuniformisierende mit vorgeschriebenem Näherungsgrade zu erreichen.

9. - *Kontinuitätsmethode.* Auch für die sogenannte Kontinuitätsmethode liefern unsere prinzipiellen Überlegungen ein Resultat. Denken wir zur Fixierung der Ideen etwa an die unter Nummer 2 behandelte *Spitzenpolygonaufgabe.* Wir setzen jetzt, dem Sinn der Kontinuitätsmethode entsprechend, voraus, dass die Aufgabe der Abbildung eines Spitzenpolygons auf den Einheitskreis gelöst sei und in unserem Sinne auch numerisch beherrscht werde. Die Abbildungsfunktion ändert sich mit dem Spitzenpolygon stetig, und wir finden, dass wir diese stetige Änderung für jeden abgeschlossenen Teilraum T des Parameterraumes der Spitzenpolygone durch gleichmässige Abschätzungen beherrschen. Nehmen wir weiter hinsichtlich der jetzt gestellt zu denkenden Umkehraufgabe den *a posteriori*-Standpunkt ein, setzen also voraus, dass die Existenz der Lösung der Spitzenpolygonaufgabe bereits gesichert sei. Alsdann lehrt der Verzerrungssatz, wie oben bereits bemerkt wurde, dass die Parameterwerte des gesuchten Spitzenpolygons in einem gewissen angebbaren abgeschlossenen Parameterteilraum T zu suchen sind. Indem wir diesen Teilraum T nunmehr einer netzartigen Graduierung unterwerfen, sind wir in der Lage, diese Graduierung so fein vorzunehmen, dass

für mindestens einen der endlichvielen Teilpunkte der Graduierung das zugehörende Spitzenpolygon eine Abbildung auf eine Kreisscheibe liefert, deren Randsignatur sich von der jetzt gegeben zu denkenden Randsignatur so wenig unterscheidet, als verlangt wird (1).

---

(1) Auf die Kontinuitätsmethode beziehen sich folgende Veröffentlichungen des Verfassers: Abhandlung Math. Ann. Bd. 75, S. 42-129; Anzeigen in Gött. Nachr. 1912; Leipz. Ber. Bd. 64, 1912; Gött. Nachr. 1916 und 1918.

G. GIORGI (Roma - Italia)

FONDAMENTI PER UNA TEORIA INTRINSECA DELLE FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA

Nel Congresso internazionale di matematica tenuto a Roma nel 1908, LAURA PISATI aveva annunciato un *Saggio di teoria sintetica delle funzioni di variabile complessa*, nel quale prometteva esporre un'impostazione della teoria delle funzioni, resa indipendente, in contrapposto alla teoria weierstrassiana, dalla nozione di numero intero. La fine prematura dell'Autrice fece restare questa comunicazione allo stato di programma. Ho cercato di ricostruire le finalità a cui arditamente Ella tendeva, e come omaggio alla Sua memoria espongo qui il risultato del mio lavoro.

1. - Una prima direttiva può essere così tracciata. Anzichè seguire uno dei tre metodi fondamentali di CAUCHY, di RIEMANN e di WEIERSTRASS, impostare lo studio su un metodo sintetico che metta in evidenza le proprietà caratteristiche di ogni singolo tipo di funzione. La funzione algebrica (razionale o no) può essere definita anche nel campo complesso, in modo diretto coi procedimenti stessi che valgono nel campo reale: quella analitica di carattere generale si può indi definire come limite, sotto condizioni opportune, di funzione algebrica; e sorge allora naturale il criterio di classificazione secondo le peculiarità insite nella funzione algebrica e quelle a cui dà luogo il passaggio al limite.

Ma il punto di vista più importante da considerare è quest'altro. Lo studioso che si inizia nelle discipline matematiche osserva la differenza rimarchevole con con cui viene trattato l'infinito dai geometri e dagli analisti. Pei geometri, un punto all'infinito è un punto che bisogna abituarsi a considerare alla stessa stregua degli altri. L'analista invece insegna che bisogna distinguere accuratamente i valori infiniti come entità eccezionali, a tal punto che una funzione deve considerarsi discontinua quando attraversa il valore infinito anche nel modo più semplice e regolare. Questo punto di vista risale a CAUCHY, il quale subiva l'influenza di speciali sue teorie filosofiche, fino al punto da non voler introdurre la parola « infinito » in matematica, e diceva che una funzione diventa priva di senso quando noi diciamo che diviene infinita; e fu caratteristico il suo procedimento di isolare i punti singolari mediante cerchietti. Più tardi fu riconosciuto quanto vi era in ciò di esagerazione, e si è trovato vantaggio a

trattare i poli di una funzione, sotto molti riguardi, alla stregua dei punti ordinari. Nondimeno vi sono teoremi e definizioni che rispetto alla presentazione usuale della teoria valgono diversamente e devono diversamente enunciarsi pei valori finiti e per quelli infiniti.

Si può liberarsi da questa dissimmetria? Evidentemente, anche nelle trattazioni moderne molto è artificiale; e certe classificazioni in categorie fatte dipendere dalla distribuzione degli zeri, non sono invarianti di fronte alle trasformazioni più elementari, p. es. di fronte all'aggiunta di una costante.

Il campo di tutti i valori di una variabile complessa z equivale alla retta della geometria projettiva, considerata nell'insieme di tutti i suoi punti reali e immaginari. La sfera di NEUMANN lo rappresenta nel miglior modo. Siano due sfere siffatte (a uno o più fogli), una per rappresentare i valori di w, una per quelli di z. Le due sfere siano in corrispondenza conforme diretta (univoca o multivoca, parziale o totale). Questa corrispondenza è una funzione analitica. Ora, supponiamo di non conoscere sull'una e sull'altra sfera quali siano i punti che corrispondono ai valori particolari 0, 1, ∞, ma di avere solamente un criterio per riconoscere, sulle sfere, i cerchi dalle altre linee, e quindi poter riconoscere quando la corrispondenza è conforme. Allora ogni sfera è conosciuta, a meno di un'arbitraria trasformazione omografica del tipo

$$z' = \lambda(z) \equiv \frac{az + b}{cz + d}$$

e con lo stesso grado di arbitrarietà rimane conosciuta la corrispondenza tra w e z.

In questo caso, non si possono individuare i poli, gli zeri, etc.; ma vi sono molte proprietà della relazione tra w e z che rimangono ugualmente in evidenza: sono quelle proprietà che hanno carattere invariantivo rispetto al gruppo delle trasformazioni λ, cioè quelle che i geometri chiamano projettive. Noi le chiameremo *intrinseche* per distinguerle da quelle *metriche*. Uno studio sintetico della teoria delle funzioni può impostarsi sulla esposizione di queste proprietà, con l'intendimento di discutere quelle metriche solamente come sottocasi particolari.

2. - Le operazioni metriche dipendono dalle quattro fondamentali dell'aritmetica: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione. Queste sono operazioni particolari nel gruppo delle λ, e hanno relazioni speciali coi valori 0, 1, ∞. Per esempio il gruppo delle addizioni (operazioni del tipo $z' = z + h$) è un sottogruppo parabolico di omografie, che ha come punto unito doppio il punto $z = \infty$; quello delle moltiplicazioni (operazioni del tipo $z' = kz$), è un altro sottogruppo iperbolico e ha come punti uniti $z = 0$ e $z = \infty$; e così via. Questo spiega perchè l'infinito nello svolgimento consueto dell'Analisi, che è impostato sulle quattro operazioni aritmetiche, viene considerato come un valore eccezionale. Le operazioni comuni dell'Analisi sono metriche, cioè hanno relazioni particolari coi punti 0, 1, ∞. Servendosi di esse, accade di enunciare sotto forma metrica anche le proprietà che hanno carattere intrinseco.

Allora, la traccia da seguire è questa: in luogo delle comuni operazioni metriche, considerare come fondamentale il gruppo delle λ senza altre distinzioni; e valersi delle λ per costruire le operazioni di carattere più elevato. È interessante vedere come seguendo questo concetto si presentano diversamente i criteri di classificazione delle funzioni, e sopratutto come si modifica la nozione di punti singolari.

3. - Anzitutto, la definizione di funzione di variabile complessa si ottiene dicendo che: $w(z)$ è *isomorfa* in un punto z se in un intorno infinitesimo di quel punto la relazione tra le due variabili è del tipo $w=\lambda(z)$, cioè se fra le due sfere la corrispondenza in quel punto è conforme; $w(z)$ è *analitica* in una area (connessa) della sfera z se lo è in tutti i suoi punti salvo eccezioni che non ne interrompano la connessione. Se due funzioni analitiche risultanti da due costruzioni diverse, hanno una regione comune in cui coincidono, si dicono essere il prolungamento analitico l'una dell'altra: questa definizione è equivalente a quella di WEIERSTRASS, ma è indipendente da qualunque nozione di somma, o di numero intero. In quanto segue, una funzione si considererà sempre completata con tutti i suoi prolungamenti analitici, fino a coprire tutto il suo campo di naturale esistenza, il quale può coprire una parte della sfera, o tutta la sfera, una o più volte, o infinite volte.

I punti che sono frontiere del campo d'isomorfismo si definiranno come *punti assoluti*; essi hanno carattere invariantivo di fronte al gruppo delle λ.

Vi ha differenza fra questi punti assoluti e i punti singolari che considera la teoria metrica. I poli semplici sono punti singolari e non assoluti. I punti di diramazione e i punti essenziali sono singolari e assoluti nel tempo stesso. Ma esiste una categoria di punti assoluti che non vengono considerati nella teoria ordinaria, e che occorre mettere in evidenza: sono i punti della sfera z che corrispondono a punti di diramazione della sfera w; così p. es. il punto $z=0$ per la funzione $w=z^n$. Li chiameremo *punti stazionari*; essi non presentano singolarità aritmetiche, ma vi manca la corrispondenza conforme. In quanto ai poli multipli, essi rientrano fra i punti assoluti, perchè sono stazionari, e non perchè sono poli.

Nella teoria intrinseca, conviene inoltre considerare simultaneamente w come funzione di z, e z come funzione di w, cioè considerare ogni funzione come una legge di corrispondenza tra due sfere (sempre di una o più fogli) non subordinate l'una all'altra. Questa dualità, e l'aver messo in rilievo i punti stazionari anzichè i poli, sono concetti dominanti per la trattazione successiva.

4. - FUNZIONI LINEO-LINEARI (omografiche). La funzione più semplice, dal punto di vista della teoria intrinseca, è quella lineo-lineare

$$w=\lambda(z)$$

cioè, con le notazioni metriche

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

la quale conduce, considerando z come dipendente da w, a una funzione del medesimo tipo. Può essere definita come l'unica funzione che non ha punti assoluti, cioè come una completa corrispondenza conforme tra le due sfere z, w, senza eccezioni locali.

Tutte le funzioni lineo-lineari sono equivalenti tra loro, dal punto di vista intrinseco, perchè con una trasformazione omografica possono venire ricondotte l'una all'altra; anche la funzione identica $w=z$ non ha privilegi rispetto alle altre del gruppo. Ripetendo su una variabile z, una dopo l'altra, più operazioni del tipo λ, si ottiene sempre un'operazione dello stesso tipo.

5. - FUNZIONI ALGEBRICHE. Quando si assume come fondamentale l'operazione λ, senza fare intervenire quelle metriche, si può passare a operazioni quadratiche e di grado più elevato, definendo prima sulla sfera z, l'involuzione semplice o di grado superiore, e quindi considerando la relazione che fa corrispondere, in modo conforme, un punto di una sfera w ad una n=pla di punti associati fra loro in involuzione, sopra la sfera z; oppure scegliendo arbitrariamente tre punti e operando su di essi come si opererebbe, in forma metrica, sui punti 0, 1, ∞ per definire operazioni generalizzate rispetto a quelle metriche elementari. Ma per brevità e in via transitoria, serviamoci di queste ultime. Se P è un polinomio, di grado m rispetto a w, e di grado n rispetto a z, la posizione

$$P(w, z)=0$$

definisce la funzione algebrica di tipo più generale. Questa definizione ha proprietà invariantiva rispetto a tutte le trasformazioni $\lambda(w)$, $\lambda(z)$; così pure sono invariantivi i numeri m, n. Si ha una sfera con m fogli i cui punti corrispondono biunivocamente e in modo conforme a quelli di una sfera con n fogli. Come punti assoluti, si hanno su ognuna di queste due superficie di RIEMANN, i punti di diramazione e i punti stazionari i quali rispettivamente corrispondono a punti stazionari e di diramazione dell'altra superficie; e in quei punti la rappresentazione conforme è sostituita da altra in cui gli angoli si moltiplicano. Anche quando, unilateralmente, si considera w come funzione di z, conviene, a differenza di quanto si fa abitualmente, mettere in evidenza entrambi i numeri m, n. Si dirà che $w(z)$ è di grado (m, n) per significare che in ogni punto z la w possiede m valori, e che ognuno di questi valori viene assunto in n punti, generalmente diversi, sul campo di variazione di z.

Per la classificazione, formiamo il quadro

Gradi	$m=1$	$m=m$
$n=1$	funzione lineo-lineare	funzione algebrica di primo tipo
$n=n$	funzione razionale	funzione algebrica generale

Nella prima categoria ($m=1$, $n=1$) trovano posto le funzioni omografiche, già considerate.

Nella categoria ($m=1$, $n=n$) si hanno le funzioni razionali, che aritmeticamente sono espresse da

$$w=\frac{a_0+a_1z+....+a_pz^p}{b_0+b_1z+....+b_qz^q}=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

dove il più elevato dei numeri p, q, è uguale ad n.

In queste funzioni la sfera z è di un solo foglio, e la sua superficie può essere divisa (in infiniti modi) in n campi, in ciascuno dei quali la w assume ogni possibile valore una volta e una sola, cioè ciascuno dei quali corrisponde a un intero foglio della multisfera w. Queste regioni saranno dette *campi primitivi* (da non confondere coi campi *fondamentali*, che si studiano nelle funzioni periodiche, e che sono multipli dei campi primitivi). Per trovarli si separeranno fra loro gli m fogli delle sfere w mediante tagli di RIEMANN, e si segneranno sulla sfera z le linee che corrispondono a questi tagli. Gli n punti z che corrispondono a un singolo punto w sono situati ognuno in uno dei campi primitivi. La condizione che due di essi coincidano conduce a individuare $n(n-1)$ punti stazionari sulla sfera z; essi sono, sulla sfera medesima, gli unici punti assoluti; ciascuno, essendo punto doppio, deve appartenere a due campi primitivi contigui; quindi le linee di divisione comunque tracciate, passano pei punti stazionari. Le proprietà di essi punti, e l'equazione che li determina, cioè

$$PQ'-P'Q=0$$

(con ovvie modificazioni pel caso di valori infiniti) hanno carattere invariantivo rispetto al gruppo delle trasformazioni λ.

Per definire la funzione razionale $w(z)$ completamente, si deve dare il suo valore in $p+q+1$ punti; ma per definirla solo dal punto di vista intrinseco (in geometria si direbbe projettivo) bastano $p+q-2$ condizioni. L'insieme dei punti stazionari determina sempre la funzione, a meno di una trasformazione λ, e basta per intraprenderne lo studio; ma non può essere scelto arbitrariamente, salvo il caso $n=2$. Funzioni di tipo degenere, o particolare, si hanno quando più punti stazionari coincidono fra loro.

Venendo, reciprocamente, alla categoria ($m=m$, $n=1$), si ha la stessa dipendenza funzionale già studiata, ma con lo scambio di w in z. Il campo di esistenza è una sfera z avente m fogli, con $m(m-1)$ punti di diramazione, tutti distinti o no, e nessun altro punto assoluto. Lo studio della funzione s'imposta sulla conoscenza di quei punti di diramazione.

Nella categoria più generale di tutte (m qualunque, n qualunque), si hanno le due sfere multiple, e ciascun foglio dell'una corrisponde a un campo primitivo dell'altra. Così la superficie composta di m sfere che costituisce il campo di variazione della z si suddivide in n campi in ciascuno dei quali la funzione w

prende ogni possibile valore una volta sola; nell'interno di questi campi si trovano i punti di diramazione, e le linee di separazione passano pei punti stazionari. Il reciproco avviene sulla sfera n=pla della variabile w. Continua a valere l'enunciato che, conosciuta la superficie di RIEMANN relativa a una delle variabili, e la distribuzione dei punti di diramazione e di quelli stazionari, le proprietà della funzione restano tutte individuate a meno di una trasformazione omografica.

6. - TRASCENDENTI UNIFORMI. Dalle funzioni algebriche si passa alle trascendenti quando uno dei gradi m, n diventa infinito. Il caso delle trascendenti uniformi si ha quando $m=1$, $n=\infty$. Intendo qui parlare di quelle trascendenti uniformi che in mancanza di miglior vocabolo chiamerò « complete », cioè di quelle il cui campo d'esistenza non è limitato da spazi lacunari nè da linee singolari, nè da altre distribuzioni di punti assoluti che formino insiemi non riducibili. Sarebbe appropriato dire « trascendenti razionali » se la dicitura di « razionali » non fosse per abuso diventata sinonimo di « razionali algebriche ».

Si ha una sfera z di un solo foglio, in corrispondenza biunivoca conforme (salvo punti d'eccezione) con la superficie su cui varia w, composta di un'infinità numerabile di fogli sferici sovrapposti; e ad ogni foglio della multisfera w corrisponde un campo primitivo della sfera z. A questa corrispondenza si riduce ogni trascendente uniforme completa. Segue che per ogni tale funzione, la sfera su cui varia z, si lascia suddividere in un'infinità numerabile di campi, in ciascuno dei quali la w assume ogni possibile valore una sola volta. Il numero dei campi essendo infinito, vi è almeno un punto intorno a cui si accumulano o vanno a confinare infiniti di essi. Questo è il punto singolare essenziale, che resta così definito per mezzo di proprietà intrinseche; e la definizione equivale a quella ordinaria, fondata su considerazioni metriche. Vi può essere un punto essenziale unico, o un numero finito di essi, o un numero infinito aventi come punto limite un unico punto essenziale di secondo ordine, e così via fino a definire trascendenti uniformi sempre più complicate.

Lo studio delle trascendenti uniformi di prima categoria, cioè aventi un unico punto essenziale, equivale praticamente a quello di un punto essenziale semplice, cioè isolato da altri punti essenziali. Il teorema di PICARD tradotto in linguaggio intrinseco, conduce a classificare queste funzioni di prima categoria in tre gruppi:

a) funzioni con singolarità essenziale doppiamente degenere, cioè nel cui intorno la funzione è priva di due valori. Ciò può avvenire solo quando i singoli campi primitivi hanno forma di lunetta a due cuspidi, coincidenti nel punto essenziale, di guisa che i valori w che dovrebbero raggiungersi in quei punti di cuspide si raggiungono solo come limiti. Il caso tipico estremo è quello in cui la funzione è totalmente priva di quei due valori. Queste funzioni, a diffe-

renza di quelle algebriche, possono riuscire prive di punti stazionari. Indicando con $G(z)$ quelle che nella trattazione metrica si chiamano trascendenti intere, le funzioni appartenenti a questo caso estremo si deducono tutte dalla formula

$$w = e^{G(z)}$$

mediante trasformazioni λ eseguite su z o su w; e le altre risultano da combinazioni opportune con simboli di funzioni razionali algebriche.

b) funzioni con singolarità essenziali semplicemente degeneri, cioè nel cui intorno la funzione è priva di un solo valore. Campi primitivi che hanno una sola cuspide coincidente col punto essenziale. Caso estremo: funzione totalmente priva di quel singolo valore: si ricava dal tipo

$$w = G(z)$$

mediante trasformazioni λ su entrambe le variabili.

c) funzioni con singolarità essenziale non degenere, cioè nel cui intorno w assume tutti i valori possibili. I campi primitivi hanno forma regolare, e non raggiungono il punto essenziale, e nell'accumularsi intorno ad esso formano figura analoga alla tela di un ragno.

Dunque, la considerazione dei campi primitivi illustra il teorema di PICARD e ne mostra la ragione d'essere geometrica.

Con estensione di questi metodi, si classificano e si studiano le funzioni che hanno distribuzioni di punti essenziali, di categoria sempre più elevata; e fino a che l'insieme di questi punti è riducibile (1), la funzione si classifica fra le trascendenti che abbiamo denominato complete.

7. - *Trascendenti multiformi e infinitiformi* si classificano considerando prima una sfera w con infiniti fogli, come testè, che corrisponde a una sfera z con numero finito di fogli, sulla quale vi è una distribuzione di punti essenziali dei diversi tipi fin qui considerati; indi una sfera w con un foglio, o con un numero finito o infinito di fogli che corrisponde a una sfera z con infiniti fogli. In questa categoria s'incontrano i punti di diramazione di tipo logaritmico, i quali sotto un certo punto di vista formano la controparte dei punti essenziali; e col loro accumularsi conducono a definire punti critici di ordine più elevato.

8. - *Riassumendo*, e limitando la classificazione a quelle funzioni la cui distribuzione di punti assoluti sulle due superficie riemanniane, quella di w e quella di z, è riducibile, si hanno queste suddivisioni, fatte in base ai due

(1) *Riducibile* diciamo un insieme che possiede un derivato nullo, di ordine finito o trasfinito.

gradi caratteristici m, n quando la funzione è algebrica, e considerando ogni trascendente come caso limite di una algebrica col divenire infinito uno dei due numeri.

CLASSIFICAZIONE DELLE FUNZIONI ANALITICHE COMPLETE

Gradi caratteristici	$n = 1$ (funzioni con un solo campo primitivo)	$n =$ finito	$n =$ infinito		
$m = 1$ (funzioni uniformi)	funzioni lineo-lineari (omografiche)	funzioni razionali	trascendenti uniformi con un punto essenziale o un numero finito di punti essenziali	trascendenti uniformi con punti essenziali di ordine superiore	trascendenti uniformi con punti essenziali di ordine infinito
$m =$ finito (funzioni finitiformi)	funzioni algebriche inverse delle razionali	funzioni algebriche generali	trascendenti finitiformi con punti essenziali di primo ordine	trascendenti finitiformi con punti essenziali di ordine superiore	trascendenti finitiformi con punti essenziali di ordine infinito
$m =$ infinito (funzioni infinitiformi)	trascendenti infinitiformi, con suddivisioni corrispondenti a quelle delle categorie precedenti				

Venendo infine alle funzioni in cui l'insieme dei punti assoluti di qualsiasi natura è irriducibile, e così a maggior ragione quelle il cui campo d'esistenza è interrotto da spazi lacunari, ritengo che esse debbano venire escluse da una classificazione a suddivisioni nette come la precedente, e che potrebbero opportunamente ricevere il nome di *funzioni incompletamente analitiche.* Tali sono ad esempio le funzioni che hanno linee singolari, o spazi lacunari, e tale è la funzione di POMPEJU [1] che è continua su tutto l'insieme dei suoi punti singolari. Basti riflettere che quest'ultima riesce uniforme solo perchè è un caso limite di funzione infinitiforme, i cui punti critici si aggruppano in modo tale che non è possibile girarvi attorno senza abbracciare insiemi su cui avviene il compenso; quindi si può anche dire che è una funzione con infiniti rami tutti distaccabili

---

[1] D. POMPEJU. - *Sur les singularités des fonctions analytiques uniformes.* Comptes Rendus de Paris (28 nov. 1904), tome CXXXIX, pp. 914-915. Devo richiamare l'attenzione del lettore sulla perspicua conferenza dello stesso Autore *Les singularités des fonctions analytiques uniformes*, presentata al primo congresso dei matematici rumeni a Cluj, nel nel maggio 1929.

Altre funzioni continue con linee singolari e spazi lacunari sono quelle, ben note, trovate successivamente dal FREDHOLM.

fra loro. In funzioni di questo tipo cessa dunque la distinzione precisa tra uniformi e multiformi, e le categorie desunte dalla considerazione dei numeri m, n, non sono più applicabili.

Ma v'ha di più. Le funzioni incompletamente analitiche possono venire considerate come caso intermedio fra quelle analitiche complete e quelle non analitiche. In effetto, nelle funzioni incompletamente analitiche il campo d'esistenza può essere limitato da linee singolari. Se questo campo si riduce a una striscia di spessore evanescente, si può ottenere come caso limite una funzione non analitica. Esempio: la serie di LAURENT, che quando la differenza fra il raggio di convergenza interno a quello esterno si riduce a zero, diventa una serie di FOURIER convergente solamente sopra una circonferenza. Così anche la serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n$ che altrove ho proposto di utilizzare per la rappresentazione di funzioni di variabile reale (1).

---

(1) G. GIORGI. - *Sôbre a série* $\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n$, Atti dell'Istituto di Coimbra, vol. LXXXIII, n. 5 (1926); *Serie analitica per lo sviluppo delle funzioni di variabile reale*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Anno VI (aprile 1927) pp. 63-67.

O. NIKODYM (Kraków - Polonia)

SUR LE FONDEMENT DES RAISONNEMENTS LOCAUX DE L'ANALYSE CLASSIQUE

Si l'on considère le cas des variables réelles dans l'analyse classique, on trouve deux espèces de problèmes, théorèmes, définitions et raisonnements: ce sont des problèmes, théorèmes etc. intégraux et des problèmes, théorèmes etc. locaux. En voici un exemple:

Si l'on se donne une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

et un domaine D dans le plan x, y et qu'on se propose de trouver des intégrales de cette équation, aussi étendues dans D que possible, on a affaire à un problème intégral.

Mais si l'on suppose seulement l'existence d'un voisinage d'un point donné x^0, y^0 dans lequel la fonction $f(x, y)$ satisfait à des certaines conditions de régularité et qu'on cherche des fonctions pour lesquelles il existe un voisinage de x^0 dans lequel cette fonction satisfait à l'équation donnée, on a affaire avec un problème local.

Les problèmes, théorèmes, raisonnements intégraux se rattachent à un domaine donné d'avance et considéré dans toute son étendue, tandis que les problèmes locaux ne se rattachent qu'au voisinage d'un point donné d'avance et il est dans la nature des choses qu'on n'a pas besoin de connaître ni la grandeur ni la forme précise de ce voisinage et c'est seulement la pure existence du voisinage qui est l'objet du problème. Il en est de même pour des théorèmes, définitions et raisonnements qui peuvent être intégraux ou locaux. Le calcul différentiel nous fournit au premier abord des théorèmes locaux et, pour en obtenir des théorèmes intégraux, on a besoin des raisonnements supplémentaires empruntés surtout de la topologie. Or, je ne parlerai que des problèmes, théorèmes, définitions et raisonnements locaux dans le cas des variables réelles.

L'analyse moderne est caractérisée par la rigueur logique du raisonnement se traduisant par le calcul « ε-aire ». Dans la théorie des fonctions d'une seule variable on emploie toujours des raisonnements ε-aires précis, ce qui se montre très avantageux.

Dans le cas de plusieurs variables, il est vrai qu'on donne des démonstrations rigoureuses ε-aires des théorèmes d'existence, mais, lorsqu'on passe à l'application de ces théorèmes pour développer des théories générales, les analystes se contentent presque toujours de donner des esquisses des démonstrations, esquisses qui ne sont fondées que sur l'intuition géométrique, et ils laissent à la patience du lecteur de combler les lacunes du raisonnement par des raisonnements ε-aires. Parfois, pour être sûr que toutes les différentiations, éliminations, substitutions, changements des variables soient bonnes, les analystes supposent que les fonctions sont analytiques et régulières, ce qui n'est nullement nécessaire et qui n'est pas même dans la nature des choses. Pour combler les lacunes dont j'ai parlé tout à l'heure, il n'y a pas de difficultés d'un caractère principal, mais les raisonnements supplémentaires sont toujours très longs, compliqués et pénibles. À savoir, on doit toujours choisir un voisinage dans un autre, y choisir un point, trouver un voisinage de ce point, là dedans en choisir un autre, etc.

Je ne crois pas qu'on exagererait, si l'on disait que dans l'état actuel de notre science les raisonnements locaux précis dans la théorie des fonctions de plusieurs variables sont si pénibles et longs que les analystes sont forcés de s'en désister et de fonder leurs théories seulement sur l'intuition géométrique.

Pour m'expliquer plus clairement, je vais employer dans la suite quelques symboles (un peu modifiés) empruntés aux *Principia Mathematica* de MM. WHITEHEAD et RUSSEL.

Une condition générale contenant une variable sera désignée par

$$w(\cdot x \cdot), \quad v(\cdot x \cdot),\ldots,$$

celle de deux variables par $w(\cdot x, y \cdot)$, $v(\cdot x, y \cdot),\ldots$.

Étant donnée une condition $w(\cdot x \cdot)$, le symbole

$$({}_{\mathbf{A}}x) \cdot w(\cdot x \cdot)$$

veut dire que *pour tout* x la condition $w(\cdot x \cdot)$ est satisfaite.

$({}_{\mathbf{I}}x) \cdot w(\cdot x \cdot)$ veut dire qu'*il existe au moins un* x tel que $w(\cdot x \cdot)$ et satisfaite.

Les symboles $({}_{\mathbf{A}}x)$ et $({}_{\mathbf{I}}x)$ rappellent les symboles **A** et **I** employés dans la logique traditionelle des syllogismes.

$$({}_{\mathbf{A}}{}^{x}_{s}) \cdot w(\cdot x \cdot), \quad ({}_{\mathbf{I}}{}^{x}_{s}) \cdot w(\cdot x \cdot)$$

signifient respectivement :

1) pour tout x, remplissant la condition supplémentaire s, la condition $w(\cdot x \cdot)$ est satisfaite.

2) il existe au moins un x remplissant la condition supplémentaire S et tel que $w(\cdot x \cdot)$ soit vrai.

P. ex. la définition de la limite a d'une suite infinie de nombres $\{a_n\}$ est donnée par la relation suivante:

$$({}_{\mathbf{A}}\varepsilon)_{>0}({}_{\mathbf{I}}\mu)({}_{\mathbf{A}}n)_{>\mu} \cdot |a_n - a| < \varepsilon.$$

Les symboles $({}_{\mathbf{A}}x)$ et $({}_{\mathbf{I}}x)$ s'appellent *quantificateurs* selon la terminologie employées par des mathématiciens polonais.

p et q étant des propositions, « $p \rightarrow q$ » désigne que p implique q, $p \rightleftarrows q$ désigne que p est logiquement équivalente à q.

Cela étant admis, rémarquons que dans l'analyse classique on a très souvent besoin d'éliminer des paramètres qui interviennent dans des équations.

P. ex. étant donné un système d'équations

$$f_i(x_1, \ldots, x_p, t_1, \ldots, t_q) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(qui peut être écrit plus simplement:

$$f(x, t) = 0),$$

on se propose d'y éliminer les paramètres t pour en obtenir une condition ne contenant que les variables x.

Si l'on considère le problème d'élimination comme un problème intégral, alors, faire la dite élimination, veut dire, trouver un système d'équations:

$$\varphi(x) = 0$$

tel qu'on ait:

(1) $$({}_{\mathbf{A}}x) \cdot [\varphi(x) = 0 \cdot \rightleftarrows : ({}_{\mathbf{I}}t) \cdot f(x, t) = 0].$$

Le système d'équations $\varphi(x) = 0$ s'appelle *éliminante.*

La relation (1) représente la définition de l éliminante *intégrale.* Mais, dans des raisonnements de l'analyse classique c'est de l'éliminante *locale* qu'on a besoin surtout, étant donné que souvent les fonctions en question ne sont déterminées que dans un certain voisinage de x^0, t^0 et les théorèmes classiques sur les fonctions implicites ne se rattachent qu'au voisinage d'un point donné.

C'est pourquoi, pour les buts de l'analyse, on est forcé d'admettre la définition suivante de l'éliminante locale. On appelle ainsi tout système d'équations $\varphi(x) = 0$ qui jouit des propriétés suivantes: (1)

(2) $$\begin{cases} ({}_{\mathbf{I}}b)_{>0}({}_{\mathbf{A}}x)_{x \in \mathcal{C}(x^0, b)}({}_{\mathbf{A}}t)_{t \in \mathcal{C}(t^0, b)} : f(x, t) = 0 \cdot \rightarrow \cdot \varphi(x) = 0 \\ ({}_{\mathbf{A}}a')_{>0}({}_{\mathbf{I}}b')_{>0}({}_{\mathbf{A}}x)_{x \in \mathcal{C}(x^0, b')}({}_{\mathbf{I}}t)_{t \in \mathcal{C}(t^0, a')} : \varphi(x) = 0 \cdot \rightarrow \cdot f(x,t) = 0. \end{cases}$$

---

(1) $x \in E$ signifie que l'élément x appartiens à l'ensemble E.

$\mathcal{C}(x^0, b)$ désigne l'ensemble de tous les points dont la distance de x^0 est inférieure à b. C'est donc la sphère (cercle, intervalle) ouverte de rayon b et de centre en x^0.

La définition contient 7 quantificateurs qui causent des complications sérieuses dans les raisonnements ε-aires rigoureux.

Voilà une condition:

$$(3)\qquad \begin{cases} (\mathbf{A}_{>0}a)(\mathbf{I}_{>0}b)(\mathbf{A}_{\varepsilon\,\mathcal{C}(x^0,\,b)}x_1, x_2)\,(\mathbf{A}_{\varepsilon\,\mathcal{C}(s^0,\,b)}s)\,(\mathbf{I}_{\varepsilon\,\mathcal{C}(t^0,\,a)}t) : f=0 \cdot \to \cdot \varphi=0 \\ (\mathbf{A}_{>0}a)(\mathbf{I}_{>0}b)(\mathbf{A}_{\varepsilon\,\mathcal{C}(x^0,\,b)}x_1, x_2)\,(\mathbf{A}_{\varepsilon\,\mathcal{C}(t^0,\,b)}t)\,(\mathbf{I}_{\varepsilon\,\mathcal{C}(s^0,\,a)}s) : \varphi=0 \cdot \to \cdot f=0. \end{cases}$$

exprimant que deux courbes situées sur les plans, définies par les systèmes:

$$(4)\qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, s)=0 \\ f_2(x_1, x_2, s)=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, t_1, t_2)=0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, t_1, t_2)=0 \\ \varphi_3(x_1, x_2, t_1, t_2)=0 \end{cases}$$

dans le voisinage de x_1^0, x_2^0, s^0 et de x_1^0, x_2^0, t_1^0, t_2^0 coincident dans un certain voisinage de x_1^0, x_2^0. Il y a 10 quantificateurs.

Pour donner un exemple montrant que ce n'est pas seulement le désir d'une pédanterie minutieuse qui voit des complications inutiles dans des choses où tout est clair au point de vue de l'intuition géométrique, considérons une *intégrale complète*

$$V(x, y, z, a, b)=0$$

et l'équation différentielle partielle

$$F(x, y, z, p, q)=0$$

qu'on en obtient, en éliminant a et b du système

$$V=0, \quad \frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot p=0, \quad \frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot q=0.$$

Or, dans la théorie de Lagrange on a besoin de démontrer que, réciproquement, on obtient $V=0$ par l'élimination de p et q des équations

$$F=0, \quad \frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot p=0, \quad \frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot q=0.$$

M. GOURSAT ne démontre pas cela dans son livre, mais il l'admet comme évident. Mais il n'est pas toujours vrai que si

$$f(x, a)=0$$

est une éliminante locale du système

$$g(x, a, b)=0, \quad h(x, b)=0,$$

l'équation

$$h(x, b)=0$$

est une éliminante locale du système

$$g(x, a, b)=0, \quad f(x, a)=0.$$

Les raisonnements ε-aires supplémentaires rendant précis le dit passage seraient très compliquées vu la foule de quantificateurs se trouvant dans les définitions de l'éliminante locale.

En finissant les préliminaires, remarquons qu'on ne possède jusqu'à présent aucune définition précise et locale du groupe continu au sens de SOPHUS LIE et, par conséquent, tous les raisonnements qu'on a fait dans cette théorie sont vagues et dépourvus de précision.

Il y a dix ans que je me suis posé la question: est-ce qu'on peut trouver des principes nouveaux, des notions auxiliaires et générales permettant d'économiser les raisonnements locaux et, par conséquent, permettant d'exécuter ces raisonnements d'une manière à la fois simple et précise?

J'ai réussi à trouver une telle théorie et je vais la publier dans un des journaux polonais.

Il est impossible de développer la théorie entière dans si peu de pages et c'est pourquoi je me contenterai d'en donner ici seulement quelques indications (1).

Appelons *molécule d'ensembles* toute classe K non vide d'ensembles, jouissant de la propriété suivante: (2)

$$(\mathrm{A}_{\varepsilon K} a, b)(\mathrm{I}_{\varepsilon K} c) \cdot \begin{cases} c \subset a \\ c \subset b. \end{cases}$$

P. ex. la classe K de toutes les sphères ouvertes centrées dans un point fixe représente une molécule d'ensembles.

Et voilà encore un exemple: Envisageons l'ensemble de tous les points x, y satisfaisant à une condition $w(\cdot x, y \cdot)$ et désignons le par $\widehat{x, y}\, w(\cdot x, y \cdot)$.

D'autre part, considérons la classe de « cylindres »

$$\mathcal{C}_x(x^0, y^0; a), \quad a > 0,$$

où

$$\mathcal{C}_x(x^0, y^0; a) = \underset{df}{\widehat{x, y}} \{ |x, x^0| < a \}$$

($|x, x^0|$ désigne la distance de deux points x et x^0).

Considérons maintenant la classe K_2 de tous les ensembles

$$\widehat{x, y}\, w(\cdot x, y \cdot) \cdot \mathcal{C}_x(x^0, y^0; a)$$

si l'on fait varier $a > 0$.

On démontre immédiatement que K_2 représente une molécule d'ensembles.

On la désigne par

$$\{ w(\cdot x, y \cdot) \}^{x^0}.$$

---

(1) Étant donnée une condition $w(\cdot x \cdot)$ désignons pour $\widehat{x}\, w(\cdot x \cdot)$ l'ensemble de tous les x satisfaisant à cette condition. Si a et b sont deux ensembles, $a \cdot b$ désignera l'ensemble de tous les éléments communs à a et b.

(2) $c \subset a$ signifie que tous les éléments de l'ensemble c appartiennent à l'ensemble a.

Étant donnée une molécule K_2 d'ensemble, faisons les projections orthogonales de tous les ensembles dont la molécule se compose, la dite projection étant effectuée sur le plan (variété) y ou x.

On obtient ainsi une nouvelle classe d'ensembles qui est — comme on le peut prouver aisément — une nouvelle molécule d'ensembles. Désignons cette molécule respectivement par

$$\mathrm{Proj}_x \{w(\cdot x, y \cdot)\}^{x^0}, \quad \mathrm{Proj}_y \{w(\cdot x, y \cdot)\}^{x^0}.$$

Plus généralement, étant donné une variété dont le point soit représenté par x, considérons des sous-variétés y [1] et t.

Or, on peut former des molécules du type

$$\mathrm{Proj}_t \{w(\cdot x \cdot)\}^{y^0}.$$

A et B étant des molécules, disons que *A est contenu dans B*:

$$A \overset{*}{\subset} B,$$

si

$$(\underset{\varepsilon B}{\mathrm{A}}\beta)(\underset{\varepsilon A}{\mathrm{I}}\alpha) \cdot \alpha \subset \beta.$$

La correspondance d'inclusion « $\overset{*}{\subset}$ » de molécules est, comme on le démontre aisément, transitive et jouit de la propriété

$$A \overset{*}{\subset} A.$$

Écrivons « $A \overset{*}{=} B$ » pour exprimer qu'on a à la fois

$$A \overset{*}{\subset} B \quad \text{et} \quad B \overset{*}{\subset} A.$$

La correspondance « $\overset{*}{=}$ » jouit des propriétés formelles caractéristiques à la correspondance d'identité.

La théorie des éliminations locales de l'analyse classique s'appuie sur de différents lemmes concernant les relations du type suivant:

$$\mathrm{Proj}_t \{w(\cdot x \cdot)\}^{s^0} \overset{*}{\subset} \mathrm{Proj}_t \{v(\cdot y \cdot)\}^{r^0} \tag{5}$$

que nous écrivons d'une manière un peu plus simple que voici :

$$w(\cdot x \cdot) \underset{t}{\overset{s^0 \quad r^0}{\rightarrow}} v(\cdot y \cdot), \tag{6}$$

les lettres y, x, r, s, t pouvant représenter des points dans des espaces à une ou à plusieurs dimensions.

La relation (6) possède un caractère assez intuitif puisqu'elle exprime que la condition $w(\cdot x \cdot)$ considérée dans le seul voisinage de s^0 et pour des points

---

[1] Relatives aux sous-ensembles de l'ensemble des coordonnées.

de t entraîne la condition $v(\cdot\, y\, \cdot)$ ne considérée que pour les points de t et dans le voisinage de r^0.

Les relations introduites s'appellent des *implications moléculaires* et la théorie dont je parle développe un calcul, un algorithme de ces implications. Je l'appelle *calcul éliminatoire.*

Au moyen des implications moléculaires on peut facilement exprimer les définitions de l'éliminante locale (voir (2)).

Soit donnée une condition

$$w(\cdot\, x, y\, \cdot) \tag{7}$$

où x, y représentent des points variables des espèces arbitraires, ne s'empiètant pas mutuellement. Soit x^0, y^0 un point quelconque. Or, on appelle *x-éliminante* de (7) prise dans le voisinage de x^0, y^0 toute condition $\varphi(\cdot\, x\, \cdot)$ telle que

$$w(\cdot\, x, y\, \cdot) \underset{x}{\overset{x^0,\, y^0}{\rightarrow}} \varphi(\cdot\, x\, \cdot)$$

$$\varphi(\cdot\, x\, \cdot) \underset{x}{\overset{x^0}{\rightarrow}} w(\cdot\, x, y\, \cdot).$$

D'une manière analogue, la relation (3) dont nous avons parlé auparavant s'exprime que voici:

$$\varphi(x, t) = 0 \cdot \underset{x}{\overset{x^0,\, t^0}{\rightarrow}} \cdot f(x, s) = 0$$

$$f(x, s) = 0 \cdot \underset{x}{\overset{x^0,\, s^0}{\rightarrow}} \cdot \varphi(x, t) = 0.$$

Il y a une trentaine de théorèmes généraux dans le calcul éliminatoire permettant d'effectuer les raisonnements locaux de l'analyse d'une manière très simple et *sans quantificateurs.* Remarquons que le calcul éliminatoire peut être développé dans des espaces fonctionnels très généraux.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des molécules d'ensembles. Mais la notion peut être généralisée, si l'on remplace la correspondance de l'inclusion d'ensembles par une correspondance R quelconque satisfaisant aux conditions:

1) $R \neq 0$

2) aRa

3) $\left.\begin{matrix} aRb \\ bRc \end{matrix}\right\} \rightarrow \cdot\, aRc$

Relativement à de telles correspondances on obtient des différentes sortes de molécules dont on a besoin dans l'analyse.

J'ai trouvé un principe général permettant de réduire les opérations sur des molécules des différents types aux opérations effectuées sur les molécules les plus simples, c'est-à-dire sur les molécules d'ensembles.

Au moyen du dit calcul éliminatoire on peut exécuter les raisonnements locaux de l'analyse classique d'une manière purement formelle et sans des considérations ε-aires.

Même la continuité d'une fonction $f(x)$ dans le point x^0 s'exprime par la formule :

$$y=f(x)\cdot \overset{x^0 \quad x^0, y^0}{\underset{x, y}{\rightleftarrows}} \cdot y=f(x),$$

où $y^0=f(x^0)$.

Jusqu'à maintenant j'ai étudié la théorie classique locale des équations différentielles ordinaires et partielles du 1e ordre et la théorie locale des groupes continus et j'ai remarqué que le calcul éliminatoire permet d'exposer ces théories d'une manière très simple et rigoureuse au point de vue des exigences modernes.

Je me contente de donner ces brèves indications, en renvoyant le lecteur pour l'exposé détaillé au travail qui paraîtra prochainement dans un des journaux mathématiques polonais.

R. NEVANLINNA (Helsinki - Finlandia)

SUR LES THÉORÈMES D'UNICITÉ DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS UNIFORMES (1)

1. - Considérons dans le plan des nombres complexes deux suites de points, a_μ ($\mu=1, 2,....$) et b_ν ($\nu=1, 2,....$), n'admettant aucun point fini du plan pour point limite. A l'aide des produits canoniques de Weierstrass on peut toujours construire une fonction méromorphe $f(x)$ de la variable complexe x présentant ces points respectivement pour zéros et pour pôles. L'ensemble des fonctions de cette espèce est défini par l'expression

$$e^{g(x)} f(x) \tag{1}$$

où $g(x)$ représente une fonction entière arbitraire. Par ce résultat classique et élémentaire de la théorie de Weierstrass on est conduit à un problème plus général que voici:

Étant données plusieures suites de nombres a_μ ($\mu=1, 2,....$), b_ν ($\nu=1, 2,....$), c_ϱ ($\varrho=1, 2,....$)...., former l'ensemble des fonctions méromorphes qui prennent des valeurs données, A, B, C,...., précisément aux points a_μ, b_ν, c_ϱ,....

Ce problème, dont l'expression (1) représente la solution complète lorsque le nombre des distributions données ne dépasse pas deux, se divise en deux parties. Il y s'agit en premier lieu de trouver les conditions nécéssaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction méromorphe vérifiant les conditions données, et de former effectivement une telle fonction. La seconde partie est un problème d'unicité où l'on cherche l'ensemble des solutions lorsqu'on connait une solution particulière.

2. - Dans cette communication nous n'abordons pas la première question d'existence: c'est un problème difficile dont on est loin de connaitre la solution si le nombre des distributions données dépasse deux. Remarquons seulement que le celèbre théorème de M. PICARD et ses généralisations représentent de conditions nécéssaires, mais nullement suffisantes pour qu'il existe des telles fonctions.

---

(1) L'auteur a exposé les démonstrations des théorèmes suivants dans un travail qui paraîtra dans la Collection des Monographies de M. BOREL.

Nous nous bornerons donc au problème d'unicité, qu'on peut énoncer en ces termes:

Étant donnée une fonction méromorphe f(x), *déterminer toute fonction méromorphe qui prend les valeurs données* A, B, C,.... *précisément aux mêmes points que la fonction* f(x).

Si deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ prennent une certaine valeur z aux mêmes points, c'est-à-dire si les équations

$$f_1(x)=z, \quad f_2(x)=z$$

ont leurs racines communes, nous convenons de dire que ces fonctions admettent la valeur Z pour *valeur commune*; et nous conservons cette dénomination même pour une valeur Z lacunaire, c'est-à-dire pour une valeur que les fonctions ne prennent pas à distance fini. D'après le théorème de M. PICARD le nombre des valeurs lacunaires communes ne dépasse pas deux.

3. - L'expression (1) définit l'ensemble des fonctions méromorphes qui, avec la fonction donnée f(x), présentent *deux* valeurs communes, zéro et la valeur infinie. La fonction entière g étant arbitraire, le nombre de telles fonctions méromorphes est infini.

Est-ce-qu'il existe plusieurs fonctions qui admettent *trois* ou plusieurs valeurs communes avec la fonction donnée? La solution complète de cette question est donnée par deux théorèmes de M. PÓLYA et de M. HENRI CARTAN (1).

D'après le théorème de M. CARTAN la fonction f est, en général, d'une manière univoque déterminée par les points où elle prend *trois* valeurs données. Une exception se présentera seulement si f admet une représentation de cette forme

$$f(x)=\frac{\alpha e^{\varphi(x)}+\beta e^{\psi(x)}+\gamma e^{\chi(x)}}{\alpha' e^{\varphi(x)}+\beta' e^{\psi(x)}+\gamma' e^{\chi(x)}},$$

les déterminants $A=\beta\gamma'-\beta'\gamma$, $B=\gamma\alpha'-\gamma'\alpha$, $\Gamma=\alpha\beta'-\alpha'\beta$ ne s'annullant pas et φ, ψ et χ désignant des fonctions entières. Dans ce cas exceptionnel il existe une et une seule autre fonction méromorphe, à savoir

$$\frac{A^2\alpha e^{-\varphi(x)}+B^2\beta e^{-\psi(x)}+\Gamma\gamma e^{-\chi(x)}}{A^2\alpha' e^{-\varphi(x)}+B^2\beta' e^{-\psi(x)}+\Gamma\gamma e^{-\chi(x)}}$$

qui admet trois valeurs communes avec la fonction f; ces valeurs communes sont $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$ et $\frac{\gamma}{\gamma'}$ (2).

---

(1) G. PÓLYA: *Bestimmung einer ganzen Funktion durch viererlei Stellen* (Matematisk Tidskrift, Kobenhavn, 1921).

H. CARTAN: *Sur quelques théorèmes de M. R. Nevanlinna* (Comptes rendus, décembre 1927).

(2) Dans le cas où l'ordre est fini, M. OSTROWSKI: *Jahresberichte der Deutschen Mathe-*

Dans quelques conditions supplémentaires il peut même arriver que ces deux fonctions admettent une quatrième valeur commune. On est ainsi conduit au théorème de M. PÓLYA (1).

Deux fonctions méromorphes $f_1(x)$ et $f_2(x)$ qui admettent *quatre* valeur communes z_1, z_2, z_3 et z_4 sont en général identiques entre elles. Une exception se présente seulement si les conditions suivantes sont vérifiées simultanément:

1°) Les valeurs z_1, z_2, z_3, z_4 sont anharmoniques: c'est-à-dire leur double-quotient est égal à -1.

2°) Deux des valeurs z_ν, soient z_2 et z_4, sont valeurs lacunaires des fonctions données.

Dans ce cas ou bien $f_2 \equiv f_1$ ou bien $f_2 \equiv S(f_1)$, S désignant la transformation homographique qui change entre elles les valeurs lacunaires z_2 et z_4 et qui admet les points z_1 et z_3 pour points invariables.

Ce cas d'exception se présente, par exemple, pour les fonctions e^x et e^{-x}, les valeurs communes étant -1, 0, $+1$, et ∞.

4. - Le théorème de M. PÓLYA conduit immédiatement à cette conclusion:

Si deux fonctions méromorphes admettent cinq valeurs communes, elles sont identiques entre elles.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que ce théorème renferme celui de M. PICARD comme corollaire immédiat. En effet, admettons pour un moment qu'il exsiste une fonction méromorphe $f(x)$, non constante, qui présente trois valeurs lacunaires z_1, z_2, z_3, et désignons par S la transformation homographique qui change entre elles ces valeurs d'une manière cyclique. Cette transformation appartient au type elliptique et elle admettra donc deux points invariables z_4 et z_5. Alors les fonctions et $S(f)$ présentent *cinq* valeurs communes, z_1,.... z_5, ce qui est impossible d'après le théorème de M. PÓLYA. Donc, le nombre des valeurs lacunaires de la fonction f est au plus égal a deux; mais c'est précisément le théorème de M. PICARD.

Il existe donc un lien entre ces deux théorèmes: le théorème de M. PICARD, d'après lequel le nombre des valeurs lacunaires d'une fonction méromorphe ne dépasse pas *deux*, et le théorème de M. PÓLYA, d'après lequel le nombre des valeurs communes de deux fonctions méromorphes ne dépasse pas *quatre*, ce qui, d'ailleurs, n'a rien d'étonnant si l'on observe que ces théorèmes se déduisent

---

matikervereinigung, Bd. 35, 1926, a indiqué des conditions nécéssaires et suffisantes pour que les fonctions ci-dessus admettent une valeur commune *lacunaire.*

(1) M. PÓLYA a demontré son théorème pour les fonctions entières d'ordre fini. L'extension aux fonctions méromorphes fut donnée par l'auteur: *Ueber einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen,* Acta Mathematica, t. 47, 1926. Cf. aussi les remarques de M. OSTROWSKI relatif à cette question (loc. cit.).

comme corollaires d'un théorème général de M. BOREL (1) concernant l'impossibilité d'une relation de la forme $\sum e^{\varphi_\nu} = 0$, les exposants φ_ν étant de fonctions entières.

5. - Indiquons brièvement quelques généralisations de ces deux théorèmes. Étant donnée une fonction méromorphe $f(x)$ et un nombre constant z, fini ou non, soit $n(r, z)$ le nombre des racines de l'équation $f(x) = z$ pour $0 < |x| \leqq r$, et désignons par $N(r, z)$ la valeur moyenne

$$N(r, z) = \int_0^r \frac{n(t, z)}{t}\, dt.$$

Soit ensuite, pour une valeur donnée de r, $N(r)$ le maximum des expressions $N(r, z)$ correspondant aux diverses valeurs de z, et formons le quotient

$$\frac{N(r) - N(r, z)}{N(r)},$$

dont la valeur, pour toute valeur de z, varie entre 0 et 1. Désignons enfin par $\delta(z)$ la limite inférieure de ce quotient lorsque r croît indéfiniment : (2)

$$\delta(z) = \varliminf_{r=\infty} \frac{N(r) - N(r, z)}{N(r)}.$$

Étant donnée une fonction méromorphe nous avons ainsi, à toute valeur de z, attaché un nombre $\delta(z)$ de l'intervalle $0 \leqq \delta \leqq 1$. Ce nombre, que nous appelons le défaut de la fonction donnée par rapport à la valeur z, ou simplement « le défaut de la valeur z », nous sert a caractériser la densité des racines de l'équation $f(x) = z$. Si les racines sont relativement denses, le défaut s'annule, si les racines sont rares relatif a la densité maximale, $\delta(x)$ devient positif; au cas extrême, si z est valeur lacunaire, le défaut atteint son maximum, un.

Cela étant, on peut énoncer ce théorème général :

Le nombre des valeurs z *pour lesquels le défaut ne s'annule pas est dénombrable. La somme des défauts correspondants est fini et ne dépasse pas deux :*

$$\sum \delta(z) \leqq 2. \tag{2}$$

On en déduit le théorème de M. PICARD comme conséquence immédiate. En effet, pour une valeur lacunaire le défaut δ devient égal a un, ce qui montre que le nombre de telles valeurs est au plus égal à deux.

---

(1) Acta Mathematica, t. 20, 1896.

(2) Dans mes recherches sur la théorie des fonctions méromorphes (Acta Math. t. 46, 1925), j'ai désigné par $\delta(z)$ une expression qui s'obtient de l'expression ci-dessus en remplaçant $N(r)$ par la fonction caractéristique $T(r)$, ce qui ne change pas la valeur de δ, car le quotient $N : T$ tend vers l'unité pour $r \to \infty$.

Dans le théorème de M. PICARD, le nombre 2 définit une borne supérieure des valeurs lacunaires. Or, si l'on convient d'appeler *exceptionelle* toute valeur de z pour laquelle le défaut devient positif, le nombre de telles valeurs exceptionnelles n'est plus limité: mais le même nombre, *deux*, constitue encore une borne supérieure pour *le défaut total* des valeurs exceptionnelles.

6. - Le théorème de M. PÓLYA se généralise d'une manière analogue. Étant données deux fonctions méromorphes $f_1(x)$ et $f_2(x)$, désignons par $n_1(r, z)$ et $n_2(r, z)$ les nombres des racines des équations

$$f_1(x)=z, \quad f_2(x)=z$$

pour $0<|x|\leqq r$, et par $n_{12}(r, z)$ le nombre de leurs racines communes, à l'intérieur de ce domaine. On aura alors

$$n_{12}\leqq\frac{n_1+n_2}{2}.$$

Formons ensuite le quotient

$$n_{12}(r, z):\frac{n_1(r, z)+n_2(r, z)}{2},$$

et désignons par $\lambda(z)$ sa limite inférieure pour $r\to\infty$:

$$\lambda(z)=\varliminf_{r=\infty}\frac{2n_{12}(r, z)}{n_1(r, z)+n_2(r, z)}.$$

Si z est valeur lacunaire des fonctions f_1 et f_2, on posera $\lambda(z)=1$.

Nous avons ainsi, à toute valeur de z, attachée un nombre $\lambda(z)$ $(0\leqq\lambda\leqq 1)$ qui caractérise la densité des racines communes des équations ci-dessus. Si la densité de ces racines est très petite, $\lambda(z)$ s'annule; si le nombre des racines communes font une partie considérable des autres racines, λ devient positif; enfin, si la valeur z est valeur commune des fonctions f_1 et f_2, λ atteint son maximum, un.

Ceci posé, on aura ce théorème:

Étant données deux fonctions méromorphes $\mathrm{f_1(x)}$ *et* $\mathrm{f_2(x)}$ *qui ne sont pas identiques entre elles, le nombre des valeurs* z *pour lesquelles* $\lambda(z)>0$ *est dénombrable, est l'on aura*

$$\sum\lambda(z)\leqq 4 \tag{3}$$

la somme s'étendent à toute valeur de z.

Le théorème de M. PÓLYA s'ensuit immédiatement. En effet, l'indice $\lambda(z)$ étant égal à un pour toute valeur commune des fonctions données, le nombre de telles valeurs ne dépassera pas *quatre.*

7. - Les théorèmes que nous venons d'énoncer restent valables pour fonctions qui sont uniformes et méromorphes autour d'un point singulier isolé. Il en est

de même pour des classes étendues de fonctions, supposées méromorphes seulement à l'intérieur d'un domaine fini, par exemple dans le cercle-unité. Nous nous sommes proposé de déterminer les fonctions pour lesquelles il en est ainsi.

Considérons la classe E_α des fonctions $f(x)$ uniformes et méromorphes pour $|x|<1$, et satisfaisant en outre à cette condition que l'expression $N(r)$, qui caractérise la densité maximale des racines de l'équation $f=z$ pour diverses valeurs de z, croît indéfiniment lorsque r tend vers un de sorte que

$$\lim_{r=1} \frac{N(r)}{\log \frac{1}{1-r}} \geqq \alpha, \tag{4}$$

α étant un nombre positif. Si l'on définit les nombres $\delta(z)$ et $\lambda(z)$ comme ci-dessus (en remplaçant bien entendu la limite $r=\infty$ par $r=1$), on aura, pour les fonctions de la classe E_α, au lieu des relations (2) et (3), ces deux nouvelles inégalités :

$$\sum \delta(z) \leqq 2+\frac{1}{\alpha},$$

$$\sum \lambda(z) \leqq 4+\frac{1}{\alpha}.$$

Alors, si $\alpha=\infty$, c'est-à-dire pour fonctions telles que le quotient

$$N(r) : \log \frac{1}{1-r}$$

tend vers l'infini pour $r \to 1$, les théorèmes ci-dessus resteront valables sans modification. Au contraire, pour les fonctions de la classe E_α, correspondant à une valeur finie de α, les sommes $\sum\delta$ et $\sum\lambda$ peuvent dépasser respectivement 2 et 4. Il y en a même des fonctions particulières pour lesquelles ces sommes égalent les limites supérieures ci-dessus.

Considérons, en effet, la fonction automorphe $\omega(x)$ qui donne la représentation conforme du cercle-unité sur une surface de RIEMANN à une infinité de feuillets, admettant les points $z_\nu = e^{k\frac{2\pi i}{p}}$ $(k=0, 1, \ldots, p-1)$, en nombre p, pour points de ramification d'ordre infini. Cette fonction, qui vérifie la relation

$$\lim_{r=1} \frac{N(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \frac{1}{p-2},$$

admet les p valeurs ci-dessus pour valeurs lacunaires. Le défaut total sera donc p, c'est-à-dire precisément égal à $2+\frac{1}{\alpha}$, où $\alpha=\frac{1}{p-2}$.

D'autre part, les fonctions ω et $e^{\frac{2\pi i}{p}}\omega$ présentent $p+2$ valeur communes, à savoir les valeurs 0, ∞ et les p valeurs lacunaires z_ν. Donc, pour ces fonctions, la somme $\sum\lambda$ atteint effectivement la limite $p+2=4+\frac{1}{\alpha}$.

D. MENCHOFF (Moskva - U. R. S. S.)

SUR LA REPRÉSENTATION CONFORME DES DOMAINES PLANS

Supposons qu'il existe une correspondance biunivoque, bicontinue et directe entre les points de deux domaines plans D et Ω, situés respectivement dans les plans des variables complexes z et w (1). Soit $w=f(z)$ la fonction continue (non nécessairement monogène) qui effectue cette correspondance. Nous désignerons dans la suite, les points et leurs affixes par les mêmes lettres.

τ' et τ'' étant deux rayons rectilignes quelconques, désignon par $(\widehat{\tau', \tau''})$ la valeur géometrique, comprise entre zéro et π, de l'angle formé par ces deux rayons (2).

Prenons un point z à l'intérieur du domaine D et désignons par t un rayon rectiligne issu de ce point et situé dans le même plan que le domaine D. $A(z, h)$ étant une fonction quelconque de deux variables complexes z et h, soit $\lim_{h\to 0}(t)A(z, h)$ la limite de la quantité $A(z, h)$, lorsque h tend vers zéro de telle façon que le poit $z+h$ reste toujours sur le rayon t.

Nous introduirons les trois notation suivantes:

1. - Désignons par E_1, l'ensemble de points z_0, intérieurs au domaine D, pour chacun desquels on peut trouver trois rayons rectilignes, t_1, t_2, t_3 issus de ce point, situés sur trois droites différentes et vérifiant les conditions suivantes:

a) Les courbes de Jordan I_1, I_2, I_3, images des rayons t_1, t_2, t_3 dans le domaine Ω, possèdent des tangentes déterminées $T_i (i=1, 2, 3)$ au point w_0 qui correspond au point z_0.

b) $(\widehat{t_1, t_2})=(\widehat{T_1, T_2})$, $(\widehat{t_1, t_3})=(\widehat{T_1, T_3})$, $(\widehat{t_2, t_3})=(\widehat{T_2, T_3})$,

le sens de parcour des angles dans les deux menbres de chaque égalité étant d'ailleurs le même (3).

---

(1) On dit qu'une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points de deux domaines plans D et Ω est *directe*, lorsqu'une courbe de Jordan simple et fermée quelconque, située à l'interieur du domaine D, est parcourue dans le même sens que son image dans le domanie Ω. Une courbe de Jordan J située à l'intérieur du domaine Ω sera dite l'*image* d'une autre courbe I située à l'intérieur du domaine D, lorsque les points de ces deux courbes se correspondent mutuellement.

(2) On suppose que les rayons τ' et τ'' ne sont pas parallèles.

(3) On suppose toujours que les rayons t_i sont situes dans le même plan que le domaine D.

2. - Désignons par E_2 l'ensemble de points z_0, intérieurs au domaine D, pour chacun desquels on peut trouver trois rayons rectilignes t_1, t_2, t_3 issus de ce point, situés sur trois droites différentes et tels que les trois limites

$$\lim_{h \to 0} (t_i) \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right|, \qquad (i=1, 2, 3),$$

existent et possèdent la même valeur finie.

3. - Désignons par E_3 l'ensemble de points z_0, intérieurs au domaine D, pour chacun desquels on peut trouver deux rayons rectilignes t_1 et t_2 issus du poit z_0, situés sur deux droites différentes et tels que les deux limites

$$\lim_{h \to 0} (t_i) \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \qquad (i=1, 2),$$

existent et possèdent la même valeur finie.

Ces définitions posées, on peut démontrer le théorème suivant:

Supposons que les domaines D, Ω *et la fonction* f(z) *aient la même signification que plus haut. Lorsque chaque point du domaine* D, *sauf peut-être un ensemble fini ou dénombrable, appartient à l'un au moins des ensembles* E_1, E_2 *ou* E_3, *la fonction* f(z) *est holomorphe à l'intérieur du domaine* D.

Comme un cas particulier de ce théorème on obtient le théorème suivant:

Lorsque l'un des ensembles E_1, E_2 *ou* E_3 *coïncide avec le domaine* D, *la fonction* f(z) *est holomorphe à l'intérieur de ce domaine* (1).

---

(1) L'énoncé de ce dernier théorème est contenu dans une note publiée par moi aux Comptes Rendus (1928, p. 502).

S. STOILOW (Cernauti - Romania)

SUR LA TOPOLOGIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES

La transformation continue définie par une fonction holomorphe quelconque, possède certaines propriétés qui subsistent quand on effectue des déformations continues dans le plan de la variable indépendante et dans celui de la fonction. Autrement dit: ces propriétés sont invariantes par rapport à toutes substitutions biunivoques et bicontinues opérées sur la variable et sur la fonction. Elles tiennent à la nature topologique des surfaces de RIEMANN; leur étude constitue la topologie des fonctions analytiques.

Toute définition des fonctions analytiques étant nécessairement métriques, il est clair que la véritable origine des propriétés topologiques de ces fonctions doit être cherchée en dehors et au delà de leur définition, trop restrictives à ce point de vue.

En présentant ici quelques résultats que j'ai obtenus ces temps derniers et dont je développerai les démonstrations ailleurs, je crois pouvoir faire voir comment certaines propriétés topologiques des fonctions analytiques se rattachent directement aux faits qui caractérisent une certaine classe topologique de transformations continues beaucoup plus générales.

1. - Considérons deux sphères s et S et une transformation qui fait correspondre d'une manière univoque et continue le point P de S au point p de s. La transformation que je désignerai par T n'est pas nécessairement définie sur toute la sphère s mais, d'une façon plus générale, dans une région (domaine ouvert) r de s.

Je supposerai que T satisfait en outre aux conditions suivantes:

1) tout point intérieur d'un ensemble quelconque faisant partie de r, a pour image un point intérieur de l'image de l'ensemble;

2) aucun continu compris dans r n'a pour image un point unique.

Dans ces conditions, l'ensemble des points P, images des points p de r, est aussi une région, soit R.

Ceci posé, on peut montrer d'abord que:

I. - *Les points de* r *qui ont même image sont isolés.* Leurs points limites, s'il en existe, sont donc nécessairement sur la frontière de r.

II. - *Le voisinage de chaque point* p *de* r *se divise en un nombre fini* n *de secteurs limités par des arcs simples, secteurs ayant chacun pour image biunivoque le voisinage tout entier de* P. *Les points* p *pour lesquels on* a $n>1$ *sont isolés.*

On reconnaît là les propriétés classiques concernant l'inversion locale des fonctions holomorphes. Ces propriétés appartiennent donc à la classe des transformations beaucoup plus générales T, que d'ailleurs elles caractérisent complètement.

2. - Envisageons maintenant le cas particulier où r occupe tout s. Alors R doit occuper tout S. De la proposition I il résulte que, dans ce cas, le nombre des points ayant même image est fini. Au moyen des proposition I et II on peut montrer que ce nombre est borné. La proposition que l'on obtient ainsi donne donc une sorte de généralisation topologique des fonctions rationnelles, savoir:

III. - *Si une transformation* T *est définie sur tout* s, *il existe un nombre fixe* k *tel que, quel que soit* P *sur* S, *il y a au moins un point* p *et au plus* k *points* p *ayant pour image* P.

Rien n'empêche de remplacer s par une surface fermée à connexion d'ordre quelconque; on obtient ainsi la généralisation analogue pour des fonctions automorphes.

3. - Supposons maintenant que r soit formé de s entier à l'exclusion d'un seul point: a. Nous allons voir que, si certaines conditions sont satisfaites; a présente le caractère d'un point singulier isolé essentiel de fonction analytique uniforme.

Nous dirons qu'un point de R est une *valeur asymptotique intérieure* de la transformation T, si ce point est la limite de l'image d'un point de r qui tend vers a suivant un chemin déterminé. On conçoit qu'il pourrait y avoir des valeurs asymptotiques non intérieures; elles seraient alors situées sur la frontière de R.

Nous supposerons, dans ce qui suivra, que l'ensemble des valeurs asymptotiques intérieures est, au plus, ponctuel. Dans cette hypothèse on peut démontrer les trois propositions suivantes:

IV. - *S'il existe au moins une valeur asymptotique intérieure et si* R *n'occupe pas tout* S, *toute valeur non asymptotique de* T *est prise un nombre infini de fois par la transformation.*

V. - *Si* R *n'est pas à connexion simple, toute valeur de* T *qui n'est pas asymptotique est prise un nombre infini de fois.*

VI. - *Si une valeur non asymptotique est prise un nombre infini de fois, il en est de même de toutes les autres valeurs non asymptotiques.*

Si l'on rapproche la conclusion commune de ces trois proposition de I, on voit que les points dont l'image est un point non asymptotique, s'accumulent

autour de a; ce qui, dans l'ordre d'idées du théorème de WEIRSTRASS et du théorème de PICARD, est bien caractéristique pour les points singuliers essentiels. En effet, on peut évidemment s'approcher autant que l'on veut d'une valeur asymptotique dans tout voisinage de a, par définition même, et, d'autre part, les valeurs exceptionnelles du théorème de PICARD sont toujours des valeurs asymptotiques.

Les propositions IV, V et VI donnent des critères pour reconnaître si a est point singulier essentiel de la transformation T.

4. - On pourrait assez facilement élargir la condition imposée plus haut à l'ensemble des valeurs asymptotiques intérieures, mais une restriction est nécessaire: avec une distribution quelconque de ces valeurs, les propositions cessent d'être vraies. Cela donne à penser que, dans le cas de certaines fonctions méromorphes, comme celles où les valeurs asymptotiques occupent toute la région R par exemple, le théorème de PICARD doit être rattaché à des faits topologiques d'une nature plus compliquée.

O. ONICESCU (Bucuresti - Romania)

LES MÉTHODES TOPOLOGIQUES DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS DE VARIABLE COMPLEXE

Théorèmes généraux.

1. - Le point de vue que j'ai adopté dans l'étude qui suit convient à une fonction uniforme quelonque de la variable complexe. Je me suis resteint à le définir ici pour une fonction entière, ayant en vue des applications spéciales relatives à ces fonctions.

2. - Soit

$$Z=F(z)$$

une fonction entière; considérons les zéros de $F'(z)$ que je vais désigner dans la suite par a_i et les points $A_i=F(a_i)$ qui correspondent à ces zéros dans le plan de la fonction.

Nous prenons comme point de départ dans l'étude de la correspondance définie par $F(Z)$ entre le plan de $z=x+iy$ et celui de $Z=X+iY$, le lemme suivant:

Si Z *décrit dans son plan une courbe simple* (C) [ces courbes seront, pour nous, toujours des courbes analytiques, limites régulières de lignes polygonales], z *décrira dans le sien un ensemble* (c) *de courbes simples. Si* (C) *ne passe pas par des points* A_i, *les courbes* (c) *décrites par* z *n'ont pas de points communs; si deux ou plusierus courbes* (c) *ont un point commun, ce point est un* a_i *et* (C) *passe par le point* A_i *correspondant.*

Supposons, en effet, que l'une des courbes qui correspondent à (C) dans le plan de z ait un point double a et soit $A=F(a)$ le point correspondant sur (C). Si $F'(a)$ était différent de zéro, la fonction inverse $z=F_1(Z)$ serait uniforme autour de A (si nous considérons bien entendu la détermination $Z=A$, $z=a$); mais cela est contraire à notre hypothèse d'après laquelle deux branches (c) se rencontrent en A. On a donc nécessairement $F'(a)=0$, a fait partie de l'ensemble a_i, et A de l'ensemble des A_i. Si (C) ne recontre pas de points A_i, les courbes (c) n'ont pas de points multiples.

Si Z décrit le chemin (C) dans un sens déterminé, on peut parler du sens dans lequel z décrit, avec ses différentes déterminations, chacun de ses chemins, car ce sens est déterminé.

Si z revenait en arrière sur son chemin, quand Z continue à décrire (C) dans le même sens, on aurait pour le même z deux valeurs de Z et la fonction ne serait plus uniforme.

On peut encore préciser le lemme précédent, en observant que:

A_i correspondant a un zéro n^{uple} de $F'(z)$, si (C) passe par A_i, $n+1$ branches de (c) se rencontrent en a_i, deux branches consécutives formant entre elles des angles égaux a $\frac{\pi}{n+1}$.

Pour nous rendre compte des faits que je viens d'ennoncer, examinons la correspondance définie par

$$Z=z^2.$$

L'ensemble a_i se réduit au point unique $z=0$ auquel correspond $Z=0$.

Nous anrons

$$X=x^2-y^2, \quad Y=2xy.$$

Considérons une ligne simple dans le plan de Z, soit par exemple la ligne droite $X=k$. La courbe qui lui correspond *géométriquement* dans le plan de z a pour équation

$$x^2-y^2=k$$

Elle est composée en général de deux branches distinctes, simples. Ces branches se rencontrent seulement si $k=0$, à l'origine. Les branches se réduisent à deux lignes droites se coupant à l'origine sous un angle droit.

Il est nécéssaire dans l'étude de la correspondance que détermine $F(z)$ de faire une distinction nette entre les différentes manières possibles de considérer les courbes (c). On peut considérer la correspondance du point de vue *géométrique*, comme nous l'avons fait dans l'exemple précédent. Mais ce n'est pas celui-ci notre point de vue qui a un caractère *fonctionnel*: les différentes branches de (c) seront les *chemins* séparés suivis par les différentes déterminations de z, quand Z décrit (C), dans un sens déterminé. Avec cette acception pour les branches de (c), on peut énoncer un théorème qui précise le caractère de la correspondance que nous avons en vue:

Si (C) *passe par* $\mathrm{A_i}$, *les deux branches de* (c) [$\mathrm{n+1}$ *branches si* $\mathrm{a_i}$ *est un zéro d'ordre* n *de* $\mathrm{F'(z)}$] *qui se rencontrent en* $\mathrm{a_i}$, *ne se pénétrent pas.*

Ainsi dans l'exemple précédent si MOM' et NON' sont les deux bisectrices des angles formés par les axes, et dont l'équation complessive est $x^2-y^2=0$, ces deux droites comme telles correspondent *géométriquement* à la droite $X=0$. La correspondance fonctionnelle est réalisée ou bien par les deux branches MON et $M'ON'$, ou bien par les branches MON' et $M'ON$ qui comme, les précédentes, se rencontrent, en O sans se pénétrer.

3. - Considérons, maintenant une courbe (C) simple et fermée limitant donc un domaine fini, simplement connexe $[D]$.

Supposons que parmi les courbes qui composent (c), au sens que nous avons précisé, au numéro précédent, il y ait une courbe fermée; supposons, c'est-à-dire que, Z décrivant toujours dans le même sens un certain nombre de fois (nècèssairement un nombre entier de fois) la courbe (C) z décrive une courbe (c) qui se ferme.

D'après les considérations précédentes cette courbe sera simple; d'autre part la fonction $Z=F(z)$ étant holomorphe dans tout le plan, l'intérieur $[D]$ de (C) correspond au domaine intérieur $[d]$ limité par (c), les sens de parcours de Z et respectivement de z étant les mêmes sur les deux courbes par rapport à leurs intérieurs respectifs.

Supposons que Z doive parcourir n fois (C) pour que z finisse de parcourir (c). [La plus petite valeur de l'entier n est 1]. Si P est un point de $[D]$ on peut écrire

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(c)}\frac{dF(z)}{F(z)-P}=\frac{n}{2i\pi}\int_{(C)}\frac{dZ}{Z-P}=n.$$

Donc toute valeur M correspondant à un point intérieur à (C) est prise par $F(z)$ à l'intérieur de $[d]$ n fois:

La correspondance $[D]$, $[d]$ est multivalente d'ordre n, dès qu'elle est d'ordre n entre les contour (C), (c).

On a aussi, réciproquement:

Si la correspondance est multivalente d'ordre n pour un point M de $[D]$, elle a la même valeur pour les contours, donc aussi pour les domaines entiers $[D]$, $[d]$.

En particulier si la correspondance est univalente, à l'intérieur de $[d]$ ne peut se trouver aucun a_i et l'on aura à faire à une représentation conforme.

D'ailleurs le théorème suivant, énoncé déjà dans des cas particuliers par différents géométres, est vrai:

Si dans le domaine simplement connexe $[d]$ *se trouvent* k *zéros simples de* $F'(z)$, *la correspondance* (D), (d) *à une valence d'ordre* $k+1$.

Réciproquement, si la correspondance $[D]$, $[d]$ *à une valence d'ordre* $k+1$, $[d]$ *contient* k *zéros simples de* $F'(z)$.

4. - Si (C) est, comme nous l'avons considérée au numéro précédent, simple et fermée, il arrive (c'est d'ailleurs le cas général) que parmi les courbes (c) se trouvent des courbes ouvertes (illimitées). Le théorème suivant nous le montrera, pour un cas particulier.

Si la courbe simple (C) *entoure un point* Ω *représentant une valeur exceptionelle, toutes les branches de* (c) *sont ouvertes.*

Pour le démontrer supposons que (c_1) soit une branche fermée. La fonction devrait prendre à l'intérieur de (c_1) au moins une fois la valeur Ω, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Soit, par exemple, la fonction

$$Z=e^z$$

pour laquelle $Z=0$ est une valeur exceptionnelle.

À un cercle (C) qui entoure $Z=0$ et dont l'équation est

$$|Z|=R$$

correspond la droite

$$x=\log R$$

où nous prenons la détermination réelle du logarithme.

Plus généralement: Si (C) entoure un point Ω représentant une valeur asymptotique, parmi les branches de (c) se trouve au moins une branche infinie.

La valeur $Z=0$ est asymptotique pour la fonction

$$Z=ze^z.$$

À un cercle

$$|Z|=R$$

correspondent une courbe fermée, autour de $z=0$, et une courbe infinie si $R\leqslant\frac{1}{e}$ $\left(\text{ces deux courbes se rencontrent au point } z=-1 \text{ si } R=\frac{1}{e}\right)$ et une seule corbe ouverte si $R>\frac{1}{e}$.

Polynomes.

Soit le polynome de degré n

$$Z=P_n(z)=a_0+a_1z+\ldots.+a_nz^n.$$

Quelle que soit la courbe (C) à distance finie, la courbe (c) sera tout entière (toutes les branches) à distance finie, car si $|z|$ tend vers l'infini, $|Z|$ tend aussi vers l'infini.

Si (C) est une courbe simple fermée (c) sera formée d'une ou de plusieurs (nombre fini) courbes simples fermées.

Supposons que (C) entoure $Z=0$. La fonction $P_n(z)$ prendra à l'intérieur d'une quelconque des courbes fermées qui correspondent à (C) la valeur zéro. Ainsi se trouve démontré le théorème fondamental de l'Algèbre.

Chaque valeur est prise par $P_n(z)$ le même nombre de fois. En effet, soient A et B deux valeurs quelconques. Considérons une courbe simple et fermée (C) qui ait à l'intérieur A et B. Soient (c_i) une des courbes simples et fermées qui composent (c). Soit n_i l'ordre de multiplicité de la valence de correspondence entre (C) et (c_i). Chacune des valeurs A et B sera prise à l'intérieur de (c_i) n_i fois.

Plus précisément, chaque valeur est prise par $P_n(z)$ exactement n fois. Supposons en effet que l'affirmation soit vraie pour chaque $P_{n-1}(z)$. Il résulte immédiatement que $P_n(z)$ prend la valeur a_0 (donc aussi toute autre valeur) n fois. Comme l'affirmation est exacte pour $n=1$ elle est toujours exacte.

Soient $a_1, a_2,\ldots., a_{n-1}$ les $n-1$ zéros de $P_n'(z)$. Considérons une courbe (Γ) simple et fermée qui contienne à l'intérieur les points $A_i=P_n(a_i)$ $(i=1, 2,\ldots., n-1)$.

Il lui correspondra dans le plan de z une courbe unique simple et fermée (γ) à l'intérieur de laquelle se trouvent a_1, a_2,.... a_{n-1}; la correspondance (Γ), (γ) a la valeurce n.

À toute autre courbe (Γ') englobant (Γ) il correspond une courbe unique (γ') englobant (γ).

Ces propriétés de la courbe (Γ) *sont caractéristiques pour les polynomes.* Car toute fonction, pour laquelle il existe une courbe (Γ) ayant ces propriétés, prend le même nombre *fini* de fois chaque valeur.

La région extérieure à (γ) *peut être divisée en* n *régions simples connexes correspondant chacune à la région du plan de* Z *extérieur à* (Γ). On n'a qu'à prendre sur (Γ) un point M convenablement choisi et de mener à partir de M une semidroite toute entière extérieure à Γ. Les lignes simples et infinis l_1, l_2,...., l_n qui lui correspondent réalisent la séparation en n domaines que nous avons annoncé.

Classification topologique des fonctions entières.

Si pour une fonction $Z=F(z)$, il existe une courbe (Γ) simple et fermée telle que (γ) contienne p branches infinies (et éventuellement un certain nombre de branches fermées) et que cela arrive aussi pour tout (Γ') qui englobe (Γ) nous dirons que la fonction est de l'*espèce p.*

Les fonctions de l'*espèce zéro* sont celles pour lesquelles à chaque courbe (C) correspondent un nombre fini ou une infinité de courbes simples fermées (c).

Dans la grande catégories des fonctions de l'espèce ∞, nous pouvons encore introduire des distinctions de nature topologiques que nous développerons ailleurs.

Les fonctions $Z=e^z$, $Z=P_n(z)e^z$, $Z=F_0(z)e^z$ (où $F_0(z)$ est une fonction de l'espèce zéro) sont de l'espèce un.

Les fonctions $Z=e^{z^2}$, $Z+\sin z$ sont de l'espèce deux.

Pour les fonctions de l'espèce *un* et *deux* ont peut réaliser simplement une division de la région extérieure à γ, en domaines équivalents (une certaine périodicité).

Le nombre des valeurs asymptotiques d'une fonction de l'espèce finie p est fini.

Quelques propositions en relation avec le théorème de Picard.

Une fonction de l'espèce un ne peut pas se comporter en deux points comme une constante, ou comme un polynome, ou comme une fonction de l'espèce zéro.

Supposons, par exemple, que Z ne prenne jamais ni la valeur A, ni la valeur B, comme une constante.

À une courbe (C) qui entoure A et B correspond une courbe infinie (c) et une seule, car :

a) Les points A et B sont exceptionnels, donc (c) n'est composée que de branches infinies.

b) La fonction Z est de l'espèce un, donc le nombre des branches infinies est au plus un.

Quand Z parcours (C) laissant son intérieur à gauche, la région à gauche du sens de parcours de z sur (c) correspond toute entière à l'intérieur de (C).

Comme le nombre des valeurs asymptotiques de Z est fini, on peut joindre deux points P et Q du contour (C) par une ligne intérieure simple PQ, qui divise (C) en deux régions simples connexes, l'une contenant A et l'autre B. Les lignes pq qui correspondent à PQ dans le plan de Z partent de (c) vers l'intérieur et aboutissent toujours sur (c). On aura ainsi un contour fermé correspondant à l'une des lignes fermées : à celle qui entoure A ou à celle qui entoure B. Pour l'une comme pour l'autre (aussi bien A que B sont des valeurs exceptionnelles) la correspondance est impossible.

La démonstration est toute semblable pour les autres parties du même théorème, qui est vrai aussi pour les fonctions de l'espèce p, p étant fini et quelconque. Le principe de cette démonstration sera développé ailleurs pour des propositions beaucoup plus étendues.

M. LAVRENTIEFF (Moskva - U. R. S. S.)

SUR UNE MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE DANS LA REPRÉSENTATION CONFORME

Je me propose de considérer une méthode directe dans la représentation conforme.

Soit D et D' deux domaines simplement connexes situés respectivement dans les plans des variables complexes z et w.

C'est U. CARATHEODORES qui a résolu le premier le problème le plus général de Riemann, le problème sur l'existence d'une fonction $w=f(z)$ qui réalise la représentation conforme du domaine D' sur le domaine D.

L'étude profonde des propriétés nombreuses de la fonction $f(z)$ et les applications essentielles de la théorie ont conduit à la question: construire, d'une manière la plus simple possible, une suite de fonctions convergente vers $f(z)$. Nous indiquons ici deux travaux remarquables sur ce sujet. Ce sont les travaux de M. BIEBERBACH et de M. JULIA. Ces auteurs, en partant des différents principes de minimum, ont costruit des séries de polynomes convergentes vers la fonction $f(z)$. Dans ces travaux on suppose que le domaine D' est un cercle et que la frontière du domaine D vérifie quelques conditions restrictives de caractère général.

Je me propose aussi, en appliquant un principe de minimum, de construire une suite de fonctions

$$f_1(z), \quad f_2(z),\ldots, \quad f_n(z),\ldots$$

convergente vers la fonction $f(z)$. La méthode considérée diffère essentiellement de celles de M. BIEBERBACH et M. JULIA, elle se rattache à la méthode directe, bien connue dans la théorie des équations aux dérivés partielles et le calcul des variations.

Soit D' un domaine limité par une courbe simple, fermée de Jordan C, situé dans le plan w. Soit, en outre, D le carré $OABC$ situé dans le plan z.

Divisons le carré D en n^2 carrés égaux et désignons par R_n le réseau de carrés ainsi obtenu. Fixons sur la courbe C trois points A', B' et C'. Construisons, maintenant, dans le domaine D', un réseau de quadrilatères R_n' homéomorphe au réseau R de carrés; c'est à dire nous construisons un réseau R' qu'on obtien du réseau R par une déformation continue. Nous supposons de plus que le réseau R' jouit des propriétés suivantes:

1) Tous les sommets du réseau R' sont situés sur la courbe C, si les sommets correspondants du réseau R sont situés sur la frontière de D.

2) Les sommets du réseau R' correspondants aux points A, B, C sont respectivement les points A', B', C'. Appellons segment du réseau chaque côté d'un quadrilatère quelconque du réseau. Alors, parmi tous les réseaux R_n' il en existe au moins un tel que la somme des carrés de tous ses segments est minimal. Un tel réseau sera appelé *réseau minimal*. Désignons par $f_n(z)$ la fonction qui réalise la correspondance d'homéomorphie entre le réseau R_n et un réseau minimal R_n'. Alors, la suite des fonctions $f_n(z)$, $n=1, 2, 3,....$, converge uniformément vers une fonction $f(z)$; cette fonction réalise la répresentation conforme du carré D sur le domaine D'.

Des considérations toutes pareilles permettent de construire facilement des suites de fonctions de même nature pour la représentation conforme du domaine D' sur un triangle ou sur un cercle.

G. PÓLYA (Zürich - Svizzera)

SUR LA RECHERCHE DES POINTS SINGULIERS DE LA SÉRIE DE TAYLOR

Je vais donner un aperçu de quelques recherches récentes dont le but est de contribuer à la solution du problème général posé par M. HADAMARD dans sa Thèse: *Quelles sont les relations entre les singularités d'une fonction analytique et les coefficients d'une série entière qui la représente?*

1. - En premier lieu, je parlerai de l'étude des « lacunes ». Pour les mettre en évidence je mettrai la série entière sous la forme

$$A_1 z^{\lambda_1} + A_2 z^{\lambda_2} + \ldots + A_n z^{\lambda_n} + \ldots = f(z). \tag{1}$$

Les exposants λ_n sont des entiers, $0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$, les coefficients « effectifs » A_n sont des constantes complexes différentes de 0 et telles que le rayon de convergence de la série (1) est l'unité. J'envisage un cas particulier du problème général de M. HADAMARD: *Quelles sont les relations entre la suite* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ *des exposants et les singularités de la fonction* f(z) *définie par la série* (1)?

Avant d'aborder cette question, on doit se rendre compte de quelques « propriétés-limites » de la suite

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n, \ldots \tag{2}$$

qui interviendront dans la réponse. Une propriété-limite très simple est l'existence de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = D. \tag{3}$$

Si cette limite existe, je dirai que la suite (2) est *mesurable* et que D est sa *densité*. Mais en général, la densité n'existe pas, de même qu'un ensemble de points n'est pas mesurable en général. A défaut de la densité, nous sommes amenés à envisager d'autres limites, p. e.

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} = \underline{D}, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} = \overline{D}. \tag{4}$$

Les limites (4) existent toujours; je les nommerai respectivement la *densité inférieure* et la *densité supérieure* de la suite (2). Mais ces limites qui se

présentent les premières ne sont pas toujours les plus utiles. Laissons-nous nous guider par l'analogie de la mesure des aires; pour définir la mesure intérieure et extérieure, on considère deux sortes de sommes de rectangles: celles qui sont contenues dans l'aire à mesurer et celles qui la contiennent, et on prend la borne supérieure des premières et la borne inférieure des secondes. Dans notre cas nous considérons deux espèces de suites mesurables d'entiers: celles qui sont contenues dans la suite proposée (2) et celles qui la contiennent. La borne *supérieure* des densités des suites mesurables *contenues* dans (2) sera appelée la *densité minimum* de (2), écrivons $\underline{\underline{D}}$, et la borne *inférieure* des densités des suites mesurables *contenant* (2) sera appelée la *densité maximum* de (2), écrivons $\overline{\overline{D}}$. (D'ailleurs, ces bornes sont *atteintes* pour certaines suites mesurables contenues respectivement contenantes.) Nous avons

$$0 \leqq \underline{\underline{D}} \leqq \underline{D} \leqq \overline{D} \leqq \overline{\overline{D}} \leqq 1,$$

1 étant la densité des coefficients d'une série sans aucune lacune.

2. - C'est encore à M. HADAMARD qu'on doit la remarque, qu'une série entière ayant des très grandes lacunes est nécessairement non-continuable. Ces remarques ont été complétées par M. BOREL et surtout par M. FABRY. Plus récemment d'autres relations entre les lacunes et les singularités ont été découvertes, grâce surtout à d'importantes recherches de M. OSTROWSKI et à des observations intéressantes de M. MANDELBROJT. Je me suis efforcé de compléter quelques-uns de ces théorèmes et de donner à d'autres une expression qui fait intervenir les densités que je viens de définir. Voici les principaux exemples:

I. Si la *densité* des coefficients est $=0$, chaque point du cercle de convergence est point singulier de la fonction représentée (FABRY).

II. Si la *densité supérieure* des coefficients est $\overline{D}$, chaque point du cercle de convergence est le centre d'un cercle de rayon $\varphi(\overline{D})$ contenant des points singuliers de la fonction, $\varphi(x)$ tendant vers zéro avec x (OSTROWSKI).

III. Si la *densité maximum* des coefficients est $\overline{\overline{D}}$, chaque arc fermé du cercle de convergence dont la longueur est $2\pi\overline{\overline{D}}$ contient des points singuliers de la fonction (FABRY).

De ce théorème on déduit immédiatement le suivant

IV. Supposons qu'il n'y a qu'un point singulier sur le cercle de convergence. Dans ce cas-là, *densité maximum* des coefficients est $=1$.

Il est intéressant de remarquer que, sous la même hypothèse, tout ce qu'on peut dire de la densité supérieure c'est qu'elle doit être positive (à cause de I); mais elle peut être aussi près de zéro qu'on le veut. On peut dire davantage si on suppose quelque chose sur la nature du point singulier en question.

V. Supposons qu'il n'y a qu'un point singulier sur le cercle de convergence et supposons en plus qu'il est *semiisolé*; cela veut dire que tous les points

singuliers contenus dans un cercle concentrique un peu plus grand sont situés *sur le même rayon.* Dans ce cas-là la *densité supérieure* des coefficients est $=1$.

Mais la densité inférieure peut être, sous la même hypothèse, $=0$.

VI. Supposons qu'il n'y a qu'un point singulier sur le cercle de convergence et supposons de plus qu'il est un point singulier *isolé et non critique* (donc un point essentiel ou un pôle). Dans ce cas-là *la densité* des coefficients existe et est $=1$ (FABER).

VII. Si la *densité inférieure* des coefficients est $=0$, la fonction définie par la série est *uniforme* et son domaine d'existence est *simplement connexe.*

En supposant davantage, à savoir que la *densité* est $=0$, on sait, d'après I, que le domaine d'existence est une aire simplement connexe particulière, une aire circulaire limitée par le cercle de convergence. En supposant seulement que la *densité minimum* s'annulle, on ne peut pas affirmer que la fonction est uniforme.

3. - Jetons un coup d'oeil sur certaines généralisations et analogies des théorèmes précédents.

On peut étendre les théorèmes I, II, III, VII aux séries de Dirichlet de la forme

$$A_1 e^{-\lambda_1 z} + A_2 e^{-\lambda_2 z} + \ldots + A_n e^{-\lambda_n z} + \ldots \tag{5}$$

Il faut supposer que les exposants $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ « ressemblent » aux nombres entiers dans une certaine mesure, p. e. qu'ils sont des nombres positifs croissants et que les différences $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ ont une borne inférieure positive. Mais en certains cas une « ressemblance » moins distincte suffit, p. e. pour la généralisation suivante du théorème I: Admettons que les λ_n sont des nombres complexes de module non décroissant dont la densité est $=0$ (la limite (3) est $=0$) et que la série (5) converge dans une aire quelconque. Alors la fonction analytique définie par (5) est *uniforme* et son domaine d'existence est *convexe.*

Il y a une curieuse analogie entre séries entières de rayon de convergence finie et infinie: aux points singuliers situés sur le cercle de convergence des premières correspondent, dans une certaine mesure, les « directions de *Julia* » des dernières. (Une direction s'appelle « de *Julia* » pour une fonction entière, si celle-ci prend toutes les valeurs complexes, à l'exception d'une valeur unique peut-être, une infinité de fois dans chaque entourage angulaire de la direction.) Aux théorèmes I et III correspondent des théorèmes analogues s'appliquant aux directions de Julia des fonctions entières d'ordre infini. On ne sait pas encore si p. e. I s'étend aussi aux fonctions d'ordre fini; mais M. BIERNACKI a déja obtenu un résultat intéressant dans cet ordre d'idées.

4. - Je ne peux donner ici des indications sur la démonstration des théorèmes précédents. Chaque espèce de singularité doit être attaquée d'une manière

différente et il n'y a que peu de méthodes qui embrassent un plus grand nombre de cas. Parmi ces dernières je dois mentionner une méthode de M. FABER qui intervient dans la démonstration des théorèmes I, II, III, IV et VII et des théorèmes analogues sur les séries de Dirichlet et les fonctions entières. Cette méthode peut être présentée comme l'emploi de certaines opérations différentielles linéaires d'ordre infini, introduites par M. PINCHERLE et étudiées par MM. RITT, CRAMÉR et d'autres.

5. - Les théorèmes concernant les relations entre la densité des coefficients et les singularités de la fonction trouvent une application intéressante dans l'étude du théorème bien connu de M. HADAMARD sur la multiplication des singularités.

N'envisageons que le cas le plus typique. Supposons que les deux séries

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots. \text{ et } f^*(z)=a_0^*+a_1^*z+a_2^*z^2+\ldots.$$

ont le même rayon de convergence, égal à 1 et que les deux ne possèdent sur leur cercle de convergence commun qu'un point singulier unique, le même point $z=1$. D'après le théorème cité de M. HADAMARD, la série composée

$$H(z)=a_0a_0^*+a_1a_1^*z+a_2a_2^*z^2+\ldots.$$

ne peut admettre dans l'aire fermée $|z|\leqq 1$ autre point singulier que le point $z=1$. Mais *est-ce que le point* $z=1$ *est effectivement singulier*? Voici une question à laquelle le théorème de M. HADAMARD ne donne aucune réponse. Elle a été posée par M. BOREL et notablement avancée par M. FABER. Nous allons l'examiner.

N'envisageons de nouveau qu'un cas extrême: La série composée $H(z)$ n'aura certainement aucune singularité si les lacunes des séries composantes $f(z)$ et $f^*(z)$ se complètent de manière que

$$a_0a_0^*=a_1a_1^*=\ldots.=a_na_n^*=\ldots.=0. \tag{6}$$

Le cas que nous considérons consiste donc en ceci que les deux suites d'exposants qui correspondent aux coefficients effectifs (non-nuls) des deux séries $f(z)$ et $f^*(z)$, n'ont pas d'élément commun. Sous quelles conditions peut se produire ce cas extrême?

Soit $\overline{D}$ la densité *supérieure* des coefficients de la série $f(z)$ et $\underline{D}^*$ la densité *inférieure* de l'autre série composante $f^*(z)$. *Si*

$$\overline{D}+\underline{D}^*>1 \tag{7}$$

le cas extrême (6) *ne peut pas se présenter.* En effet, si nous avons deux ensembles de points contenus dans le même carré et si la mesure extérieure du premier ensemble ajoutée à la mesure intérieure du second surpasse l'aire du carré, nous en concluons que les deux ensembles ont des points communs: C'est une conclusion strictement analogue que nous tirons de (7).

En particulier: si le point $z=1$ est un point singulier *semiisolé* de $f(z)$, nous avons, d'après V, $\overline{D}=1$. Si le point $z=1$ est un point singulier *isolé* (critique ou non-critique) de $f^*(z)$, le domaine d'existence de $f^*(z)$ n'est pas simplement connexe, donc nous avons, d'après VII, $\underline{D}^*>0$. Les deux hypothèses étant remplies, (7) a lieu, donc (6) n'a pas lieu, donc la série $H(z)$ composée de $f(z)$ et de $f^*(z)$ n'est pas identiquement nulle. En précisant légèrement ce raisonnement (où l'allure de $f(z)$ et de $f^*(z)$ en dehors d'un cercle $|z|<1+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, n'intervient pas du tout) on conclut que le rayon de convergence de $H(z)$ est $=1$, donc que $H(z)$ possède un point singulier sur la circonférence $|z|=1$, qui ne peut être que le point $z=1$. En résumé: *le produit d'un point semiisolé et d'un point isolé est certainement singulier.*

L'inégalité $\overline{\overline{D}}+\underline{\underline{D}}^*>1$ se prêtant au même raisonnement que (7), on peut tirer des théorèmes I, VII et d'analogues, d'autres compléments du théorème de M. HADAMARD, montrant que le produit de deux points singuliers dont la nature est précisée, est, en beaucoup de cas, effectivement singulier.

(Pour la bibliographie qui ne peut pas trouver de place ici, je renvoie à la 2e édition de l'ouvrage classique de M. HADAMARD « La série de Taylor » (1926, en collaboration avec M. MANDELBROJT), puis à mon travail « Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen » qui va paraître dans la Mathematische Zeitschrift.)

M. PLANCHEREL (Zürich - Svizzera)

SUR LE DÉVELOPPEMENT D'UN COUPLE DE FONCTIONS ARBITRAIRES EN SÉRIES DE FONCTIONS FONDAMENTALES D'UN PROBLÈME AUX LIMITES DU TYPE HYPERBOLIQUE

§ 1. - Considérons un problème de petits mouvements d'un système continu à une dimension, non nécessairement dépourvu de frottement, régi par une équation

$$a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b(x)\frac{\partial u}{\partial t}-L(u)=0, \qquad 0\leqq x\leqq 1,\ t\geqq 0 \tag{1}$$

et par des conditions aux limites

$$U_1(u)=0, \quad U_2(u)=0. \tag{2}$$

$L(u)$ est une abréviation pour

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+q(x)u.$$

Nous supposons que les conditions aux limites sont indépendantes de t, que $a(x)>0$, $p(x)>0$, que a, b, p, q ont des dérivées secondes continues et que le problème

$$L(u)=0, \quad U_1(u)=0, \quad U_2(u)=0 \tag{3}$$

est adjoint à lui-même.

On sait qu'une solution du problème (1), (2) est déterminée par les conditions initiales $u=u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}=u_1(x)$ pour $t=0$. Nous retrouverons cette proposition en ramenant par la transformation de Laplace le problème proposé, du type hyperbolique, à la recherche des valeurs et des solutions fondamentales du problème aux limites du type elliptique

$$L(v)-(a\lambda^2+b\lambda)v=0 \tag{4}$$

$$U_1(v)=0, \quad U_2(v)=0 \tag{5}$$

où λ est un paramètre. Nous montrerons de plus comment le couple u_0, u_1 peut se développer en séries de fonctions fondamentales du problème (4), (5). Nous donnerons ainsi la démonstration de résultats que M. BROMWICH [1] a obtenus

[1] T. J. I'A. BROMWICH. *Normal coordinates in dynamical systems.* [Proc. London Math. Soc. 15 (1916)].

d'une manière heuristique dans un mémoire consacré à établir sur des bases sûres le calcul opérationnel de HEAVISIDE.

§ 2. - La détermination des petits mouvements du type $u=e^{\lambda t}v(x)$ conduit immédiatement au problème aux limites (4), (5). Ce dernier admet pour certaines valeurs de λ dites valeurs fondamentales des solutions $v(x)\not\equiv 0$ appelées fonctions fondamentales. Si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs fondamentales différentes, $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ deux fonctions fondamentales correspondantes, la relation d'orthogonalité généralisée

$$(\lambda_1+\lambda_2)\int_0^1 a\Phi_1\Phi_2 dx+\int_0^1 b\Phi_1\Phi_2 dx=0 \tag{6}$$

montre que toutes les valeurs fondamentales sont situées dans une bande de largeur finie, parallèle à l'axe imaginaire du plan du paramètre complexe λ. L'ensemble des valeurs fondamentales est infini dénombrable, sans valeur d'accumulation finie.

Les travaux de BIRKHOFF (1) et de TAMARKIN (2) permettent d'affirmer que dans le domaine $R\lambda\geqq 0$ il existe un système v_1, v_2 de 2 solutions linéairement indépendantes de l'équation (4), du type

$$\begin{aligned} v_1&=e^{-\lambda\int_0^x\sqrt{\frac{a}{p}}dx}\left[v_{10}(x)+\frac{v_{11}(x)}{\lambda}+0\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]\\ v_2&=e^{\lambda\int_0^x\sqrt{\frac{a}{p}}dx}\left[v_{20}(x)+\frac{v_{21}(x)}{\lambda}+0\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{7}$$

Il existe un système analogue dans le domaine $R\lambda\leqq 0$. Désignons par $G(x,\xi;\lambda)$ la fonction de Green du problème aux limites (4), (5). C'est une fonction méromorphe de λ, dont les pôles sont précisément les valeurs fondamentales λ_k du problème aux limites. L'existence d'un système (7) permet de vérifier les propriétés suivantes de la fonction de Green:

a) Si l'on décrit autour de chaque point λ_k un cercle de rayon fixe δ arbitrairement petit, et si l'on désigne par E_δ le plan de la variable complexe λ duquel on a enlevé l'intérieur de tous ces cercles, il existe une constante $M=M(\delta)$, telle que dans E_δ

$$|G(x,\xi;\lambda)|<\frac{M}{|\lambda|} \qquad 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq\xi\leqq 1;$$

---

(1) G. D. BIRKHOFF. *On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter* [Trans. American Math. Soc. 9 (1908), p. 219-231]; *Boundary value and expansions problems of ordinary linear differential equations* [ibid. 9 (1908), p. 373-395].

(2) J. TAMARKIN. *Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions* [Math. Zeitschrift, 27 (1927), p. 1-54].

b) Si $f(x)$ est une fonction à variation bornée, on a, uniformément dans $0 \leqq x \leqq 1$

$$\oint d\lambda \int_0^1 G(x, \xi; \lambda) f(\xi) d\xi = 0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

lorsque les intégrales de contour sont prises le long de certains cercles dont le rayon tend vers l'infini.

On peut alors conclure que si $G_k(x, \xi; \lambda)$ est la partie principale de G au pôle λ_k, on a $G = \sum G_k$, la série étant uniformément convergente en x, ξ, λ dans $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq \xi \leqq 1$, et E_δ. Les pôles de G sont en général du premier ordre. Il peut cependant arriver qu'ils soient d'ordre supérieur. S'ils sont simples, G prend la forme

$$G(x, \xi; \lambda) = \sum_k \frac{\Phi_k(x)\Phi_k(\xi)}{\lambda - \lambda_k}$$

où l'on peut supposer que les fonctions fondamentales Φ_k sont normées par la condition

$$\int_0^1 (2a\lambda_k + b)\Phi_k^2 dx = 1. \tag{8}$$

§ 3. - Si $f(x)$ possède une dérivée seconde continue et vérifie les conditions aux limites $U_1(f) = 0$, $U_2(f) = 0$, on a

$$f(x) = \int_0^1 G(x, \xi; \lambda)[L(f) - (a\lambda^2 + b\lambda)f] d\xi.$$

Par suite, si $v = v(x, \lambda)$ désigne la solution du problème non homogène

$$L(v) - (a\lambda^2 + b\lambda)v = -(a\lambda + b)u_0 - au_1 \tag{9}$$

$$U_1(v) = 0, \quad U_2(v) = 0 \tag{10}$$

on peut démontrer que lorsque u_0 et u_1 vérifient les conditions aux limites

$$v - \frac{u_0}{\lambda} - \frac{u_1}{\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda}\int_0^1 G(x, \xi; \lambda)[L(u_0) + \frac{1}{\lambda}L(u_1) + bu_1]_\xi d\xi$$

Prenant alors a positif et assez grand pour que toutes les valeurs fondamentales λ_k aient leur partie réelle inférieure à a, et définissant

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R_n \to \infty} \oint_{|\lambda| = R_n} e^{\lambda t} v d\lambda, \tag{11}$$

l'intégrale de contour étant prise le long des cercles dont il a été question plus haut, on aura encore

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\lambda t} v(x, \lambda) d\lambda, \tag{12}$$

l'intégrale étant à interpréter comme $\lim_{R\to\infty}\int_{\alpha-iR}^{\alpha+iR}$. A l'aide de (1) et des propriétés asymptotiques de la fonction de Green, on vérifie encore que

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R_n\to\infty}\oint_{|\lambda|=R_n}\lambda e^{\lambda t}v\,d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\lambda e^{\lambda t}v\,d\lambda, \tag{13}$$

en supposant encore que u_0'' est à variation bornée. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ne peut pas se calculer par dérivation sous l'intégrale $\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}$. On peut cependant, par quelques considérations simples, vérifier que la fonction (12) est une solution du problème de petits mouvements (1), (2), répondant aux conditions initiales $u=u_0$, $\frac{\partial u}{\partial t}=u_1$ pour $t=0$. Nous obtenons ainsi le résultat suivant: *Les deux problèmes:*

PROBLÈME I. - Intégrer dans le domaine $0\leqq x\leqq 1$, $t\geqq 0$ l'équation (1) sous les conditions aux limites (2) et les conditions initiales $u=u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}=u_1(x)$ pour $t=0$.

PROBLÈME II. - λ désignant un paramètre complexe, intégrer l'équation (9) dans le domaine $0\leqq x\leqq 1$, sous les conditions aux limites (10)

ont des solutions $u(x, t)$, $v(x, \lambda)$ reliées entre elles par les formules (transformation de Laplace)

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}e^{\lambda t}v(x,\lambda)\,d\lambda,\quad v(x,\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}u(x,t)\,dt.$$

§ 4. - Du développement en série de $G(x, \xi; \lambda)$ et des formules (11) et (13), le calcul des résidus permet d'obtenir des développements en séries de $u(x, t)$ et de $\frac{\partial u}{\partial t}$. Ces développements sont particulièrement simples dans le cas où tous les pôles de G sont simples; ils ont alors la forme

$$u(x,t)=\sum_k e^{\lambda_k t}A_k\Phi_k(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_k \lambda_k e^{\lambda_k t}A_p\Phi_k(x)$$

et sont uniformément convergents dans $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq t\leqq T$, T fini. Les coefficients A_k sont donnés par

$$A_k=\int_0^1[(a\lambda_k+b)u_0+au_1]\Phi_k\,dx$$

lorsque Φ_k est normé par (8). Ces développements se réduisent pour $t=0$ aux séries uniformément convergentes

$$u_0=\sum_k A_k\Phi_k(x),\quad u_1=\sum_k \lambda_k A_k\Phi_k(x).$$

Il est donc possible de développer en séries de fonctions fondamentales Φ_k un couple de fonctions arbitraires u_0, u_1 possédant des dérivées secondes continues et dont la première a de plus sa dérivée seconde à variation bornée et satisfaisant aux conditions $U_1(u_0)=U_1(u_1)=U_2(u_0)=U_2(u_1)=0$. Il est intéressant de remarquer que l'unicité du développement est vraie pour le couple, mais non pas pour chaque fonction de couple. Ce n'est que dans certains cas particuliers (par ex. $b=0$) qu'en groupant les termes correspondant à des valeurs λ_k conjuguées complexes, on obtient des développements possédant la propriété d'unicité pour chaque fonction du couple. Si la fonction de Green possède des pôles d'ordre supérieur, les développements en séries de u, $\frac{\partial u}{\partial t}$, u_0 et u_1 sont encore donnés par le calcul des résidus mais sont plus compliqués.

§ 5. - Si au lieu des petits mouvements libres on a affaire à des petits mouvements contraints, le second membre de (1) est une fonction $f(x, t)$ et il faut ajouter au second membre de (9) la transformée

$$g(x, \lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x, t)\,dt.$$

De même, si les conditions aux limites, sans contenir t explicitement, contiennent $\frac{\partial u}{\partial t}$, il y a lieu de remplacer dans les conditions aux limites du problème II le symbole $\frac{\partial}{\partial t}$ par λ en faisant figurer au second membre les données initiales. On peut encore traiter d'une manière analogue le cas parabolique $a=0$, $b>0$. Pour plus de détails, nous renvoyons à un travail d'un de nos élèves, M. W. MAECHLER, actuellement en préparation.

E. KASNER (New York - U. S. A.)

GÉOMÉTRIE DES FONCTIONS POLYGÈNES

Introduction et résultats.

Dans plusieurs articles publiés récemment dans des revues américaines [1] j'ai commencé à étudier les fonctions w d'une variable complexe z dans le cas où les composantes de w sont des fonctions *indépendantes* (non soumises aux conditions de Cauchy-Riemann). Si nous posons

$$z = x + iy$$
$$w = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

φ et ψ seront donc des fonctions réelles *arbitraires* [2] de x et de y. J'ai proposé pour une telle fonction de z le terme *polygène* comme exprimant la propriété essentielle qui la distingue d'une fonction monogène. Car tandis que pour celle-ci la dérivée a une valeur uniquement déterminée pour chaque z, la dérivée

$$\frac{dw}{dz} = \frac{(\varphi_x + i\psi_x)dx + (\varphi_y + i\psi_y)dy}{dx + idy} \tag{1}$$

d'une fonction polygène dépend non seulement de $x+iy$ mais aussi de $\frac{dy}{dx}$, c'est à dire de la direction dans laquelle elle est prise.

Les principaux théorèmes relatifs à la dérivée d'une fonction polygène énoncés à l'endroit cité s'expriment sous une forme plus courte et plus simple si dans $\frac{dw}{dz}$, que nous abrégeons de nouveau par γ, nous faisons la substitution

$$\frac{dy}{dx} = \tan\frac{\theta}{2} = -i\,\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}},$$

où θ va de 0 à 2π quand $\frac{dy}{dx}$ va de 0 à ∞.

---

[1] Science, vol. 66 (1927), p. 581; Proceedings National Academy of Sciences, vol. 13, n. 1 (1928), p. 75-82. Trans. Am. Math. Soc., vol. 30 (1928), p. 803. Bull. Am. Math. Soc., vol. 34 (1928), p. 561.

[2] Nous supposons seulement que φ et ψ soient continues et aient des dérivées partielles continues. Si on suppose que φ et ψ sont analytiques, on peut employer les coordonnées minimales et simplifier les calculs. Mais tous les résultats sont vrais sans cette supposition.

Nous obtenons alors

(1) $$\gamma = L + le^{-i\theta},$$

(2) $$L = \frac{\varphi_x + i\psi_x - i(\varphi_y + i\psi_y)}{2}, \quad l = \frac{\varphi_x + i\psi_x + i(\varphi_y + i\psi_y)}{2}$$
$$= \frac{w_x - iw_y}{2}, \qquad = \frac{w_x + iw_y}{2}.$$

Pour une valeur fixe de $x+iy$, γ décrit donc un cercle de centre L et de rayon $|l|$ qui, paramétrisé par rapport à θ comme (1) le montre, se nomme une *horloge uniforme négative* dans notre terminologie (1). Donc en résumant les théoremes déjà connus:

I. - La dérivée $\frac{dw}{dz}$ d'une fonction polygène w de z est représentée dans le plan complexe γ de $\frac{dw}{dz}$ par une congruence d'horloges uniformes négatives qui se trouvent dans une correspondance définitive avec les points du plan z.

Dans l'article présent nous établirons d'abord le théoreme correspondant relatif à la dérivée d'une fonction polygène w par rapport à une autre fonction polygène w^*: $\Gamma = \frac{dw}{dw^*}$:

II. - La dérivée $\frac{dw}{dw^*}$ d'une fonction polygène w de z par rapport à une autre fonction polygène w^* de z est représentée dans le plan complexe Γ de $\frac{dw}{dw^*}$ par une congruence d'horloges générales homographiques (1) qui se trouvent dans une correspondance définitive avec les points du plan z.

Ensuite nous examinerons les spécialisations de cette seconde congruence dans quatre cas simples:

III. - Les horloges de la congruence représentant $\frac{dw}{dw^*}$ se réduisent

a) à des horloges uniformes négatives quand w^* est une fonction analytique de $x+iy$, c'est à dire fonction monogène;

b) à des horloges uniformes positives quand w^* est une fonction analytique de $x-iy$;

c) à des points quand les fonctions w et w^* dépendent analytiquement l'une de l'autre;

---

(1) Voir « Homographic Circles or clocks », un article par L. Hofmann et E. Kasner Bull. Am. Math. Soc. 1928. Soit la variable complexe w une fonction de θ telle que

$$w = \frac{A + Be^{-i\theta}}{C + De^{-i\theta}}$$

où θ varie de 0 à 2π et A, B, C, D sont des constantes complexes. Pour le cercle décrit par w et parametrisé par rapport à θ comme la formule le montre, nous avons introduit le terme *horloge homographique générale* (le cercle est dans une correspondance homographique avec le cercle $w = e^{-i\theta}$). Une horloge homographique est donc un cercle avec une certaine distribution de points. Pour des raisons évidentes, nous nommons les horloges spéciales avec $D=0$ ($C=0$) *des horloges uniformes négatives* (*positives*).

d) à des droites quand les composantes φ^* et ψ^* de w^* dépendent analytiquement l'une de l'autre;

et inversement.

Finalement nous étudierons les problèmes inverses des théoremes I et II:

IV. - Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence quelconque:

a) d'horloges uniformes négatives, *b*) d'horloges homographiques générales, qui se trouvent dans une correspondance quelconque avec les points d'un plan complexe z, représente la dérivée d'une fonction polygène de z, *a*) par rapport à z, *b*) par rapport à une autre fonction polygène de z? La réponse est donnée dans la dernière page.

Nous procédons maintenant à la preuve des théoremes énoncés.

Démonstration des théorèmes II.

La preuve de II s'ensuit directement de ce que

$$\frac{dw}{dw^*} = \frac{\frac{dw}{dz}}{\frac{dw^*}{dz}} = \frac{\gamma}{\gamma^*}.$$

Donc

$$\Gamma = \frac{L + le^{-i\theta}}{L^* + l^* e^{-i\theta}}$$

et cette formule s'interprète immédiatement dans le sens de II.

Démonstration des théorèmes IV *a*) et *b*).

Quand w^* est une fonction analytique *a*) de $x+iy$, *b*) de $x-iy$, nous avons

$$a)\ \varphi_x^* - \psi_y^* = 0,\ \varphi_y^* + \psi_x^* = 0; \quad b)\ \varphi_x^* + \psi_y^* = 0,\ \varphi_y^* - \psi_x^* = 0.$$

Donc

$$a)\ \frac{\varphi_x^* - \psi_y^*}{2} + i\,\frac{(\varphi_y^* + \psi_x^*)}{2} = l^* = 0; \quad b)\ \frac{\varphi_x^* + \psi_y^*}{2} + i\,\frac{(\psi_x^* - i\varphi_y^*)}{2} = L^* = 0$$

ce qui nous donne des horloges uniformes négatives dans le cas *a*) et des horloges uniformes positives dans le cas *b*). Les inverses sont évidentes.

Démonstration des théorème III *c*).

La condition pour que w et w^* soient des fonctions analytiquement dépendantes est que la déterminante jacobienne de w et w^* s'évanouisse:

$$w_x w_y^* - w_y w_x^* = 0.$$

La condition pour que l'expression

$$\Gamma = \frac{L + le^{-i\theta}}{L^* + l^* e^{-i\theta}}$$

représente un point et non un cercle, c'est à dire pour qu'elle soit indépendante de θ, est

$$Ll^* - L^* l = \frac{(w_x - iw_y)}{2}\frac{(w_x^* + iw_y^*)}{2} - \frac{(w_x^* - iw_y^*)}{2}\frac{(w_x + iw_y)}{2} = \frac{i}{2}(w_x w_y^* - w_y w_x^*) = 0.$$

Ces deux conditions sont donc équivalentes et III *c*) et son inverse sont démontrés.

Démonstration des théorème III *d*).

Quand φ^* et ψ^* sont des fonctions dépendantes,

$$\varphi_x^* \psi_y^* - \varphi_y^* \psi_x^* = 0.$$

De l'autre côté, les horloges de notre congruence ne dégenèrent dans des droites que quand

$$|L^*| - |l^*| = 0 \quad (^1).$$

Mais

$$|L^*| - |l^*| = \frac{1}{4}[(\varphi_x^* + \psi_y^*)^2 + (\varphi_y^* - \psi_x^*)^2 - (\varphi_x^* - \psi_y^*)^2 - (\varphi_y^* + \varphi_x^*)^2] = \varphi_x^* \psi_y^* - \varphi_y^* \psi_x^*,$$

ce qui prouve III *d*) son inverse.

Les théorèmes IV *a*) et *b*).

Nous arrivons maintenant aux problèmes IV *a*) et *b*), que nous discutons séparément. D'abord IV *a*).

Désignons par D_x et D_y des multiplicateurs symboliques représentant les opérations qui consistent à former les dérivées partielles par rapport à x et à y, et abrégeons

$$D_x - iD_y \text{ par } \mathfrak{D}, \quad D_x + iD_y \text{ par } \mathfrak{P}.$$

Alors puisque, suivant (2),

$$L = \frac{w_x - iw_y}{2}, \quad l = \frac{w_x + iw_y}{2}$$

on a

$$L = \mathfrak{D}w, \quad l = \mathfrak{P}w. \tag{3}$$

Pour $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{P}$ l'identité

$$\mathfrak{P}\mathfrak{D} = \mathfrak{D}\mathfrak{P} \tag{4}$$

se vérifie immédiatement. En appliquant à L l'operateur $\mathfrak{P}$ et à l l'opérateur $\mathfrak{D}$, nous obtenons donc en vertu de (3) et de (4)

$$\mathfrak{P}L = \mathfrak{D}l. \tag{5}$$

---

(1) Voir l'article dans le Bull. Am. Mat. Soc. cité plus haut.

Alors, si

$$\gamma = A(x, y) + B(x, y)e^{-i\theta}$$

est une congruence quelconque d'horloges uniformes négatives, les fonctions A et B qui déterminent la correspondance entre les horloges de la congruence et les points $x+iy$, doivent satisfaire à la condition nécessaire

$$\mathfrak{P}A = \mathfrak{D}B$$

afin que la congruence puisse représenter la dérivée d'une fonction polygène. Nous omettons comme très simple la preuve que cette condition nécessaire est aussi suffisante, c'est à dire que chaque fois que A et B remplissent la relation (5), on peut trouver deux fonctions φ et ψ telles que A et B soient égales aux côtés droits des formules (2).

En appliquant le résultat obtenu au cas d'une congruence représentant $\frac{dw}{dw^*}$:

$$\Gamma = \frac{L + le^{-i\theta}}{L^* + l^* e^{-i\theta}},$$

où le numérateur et le dénominateur de Γ considérés séparément sont des congruences représentant $\frac{dw}{dz}$ et $\frac{dw^*}{dz}$, nous avons

$$\mathfrak{P}L = \mathfrak{D}l, \quad \mathfrak{P}L^* = \mathfrak{D}l^*.$$

Donc, si

$$\Gamma = \frac{A(x, y) + B(x, y)e^{-i\theta}}{C(x, y) + D(x, y)e^{-i\theta}}$$

est une congruence arbitraire, la condition nécessaire pour qu'elle puisse représenter la dérivée d'une fonction polygène par rapport à une autre, est qu'il existe une fonction multiplicatrice $\lambda(x, y)$ telle que

$$\mathfrak{P}(\lambda A) = \mathfrak{D}(\lambda B), \quad \mathfrak{P}(\lambda C) = \mathfrak{D}(\lambda D).$$

Ces relations se réduisent facilement aux suivantes:

$$C(\mathfrak{P}A - \mathfrak{D}B) - A(\mathfrak{P}C - \mathfrak{D}D) = (BC - AD)\mathfrak{D}(\log \lambda)$$
$$D(\mathfrak{P}A - \mathfrak{D}B) - B(\mathfrak{P}C - \mathfrak{D}D) = (BA - AD)\mathfrak{P}(\log \lambda).$$

Nous en pouvons éliminer λ en vertu de l'identité (4). Si nous abrégeons les côtés gauches des équations obtenues par R et S, nous obtenons pour les fonctions A, B, C, D la condition nécessaire

$$\mathfrak{P}R = \mathfrak{D}S,$$

ou explicitement

$$(6) \qquad (C\mathfrak{P} - P\mathfrak{D})(\mathfrak{P}A - \mathfrak{D}B) - (A\mathfrak{P} - B\mathfrak{D})(\mathfrak{P}C - \mathfrak{D}D) = 0. \text{ (}^1\text{)}$$

De nouveau nous omettons de donner la preuve de la suffisance de la condition (6).

---

(1) Les produits doivent être compris symboliquement partout.

Elle se donne le plus facilement, dans le cas ou φ et ψ sont des fonctions analytiques, en employant comme variables indépendantes au lieu de x et de y; $z=x+iy$ et $\bar{z}=x-iy$. (Alors, pour montrer comme les formules se simplifient, $\mathfrak{D}=\frac{\partial}{\partial z}$, $\mathbb{P}=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$).

En mettant les deux résultats ensemble, nous avons donc le théorème (1):

IV. - La condition nécessaire et suffisante pour que la congruence

$$a)\ \gamma=A+Be^{-i\theta};\quad b)\ \Gamma=\frac{A+Be^{-i\theta}}{C+De^{-i\theta}}$$

représente la dérivée d'une fonction polygène de z

a) par rapport à z

b) par rapport à une autre fonction polygène de z, est

$$a)\qquad \mathbb{P}A-\mathfrak{D}B=0$$

$$b)\qquad (C\mathbb{P}-D\mathfrak{D}(\mathbb{P}A-\mathfrak{D}B)-(A\mathbb{P}-B\mathfrak{D})(\mathbb{P}C-\mathfrak{D}D)=0.$$

---

(1) Pour les congruences des cercles, au lieu des horloges, j'ai exposé la théorie dans « Note on the derivative circular congruence of a polygenic function », Bull. Am. Math. Soc., vol. 34 (1928) pp. 561-562. L'interprétation geométrique des dernières conditions a) et b) sera donnée dans un autre mémoire. La condition a) est du première ordre et b) de deuxième ordre. Dans le cas a) une transformation affine associée devient une similitude. Si la fonction est monogène on a conformalité.

G. VALIRON (Strasbourg - Francia)

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS ANALYTIQUES DANS LE VOISINAGE DE LEURS SINGULARITÉS

Je m'occuperai dans ce qui suit des propriétés de la suite des points voisins d'une singularité essentielle, ou d'une singularité analogue, en lesquels une fonction analytique $f(z)$ prend une valeur donnée arbitraire. Je donnerai quelques propositions précises obtenues ces mois derniers par moi-même et par M. MILLOUX et j'indiquerai quelques questions à résoudre.

1. - Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une fonction $f(z)$ méromorphe dans tout le plan sauf au point à l'infini qui est point essentiel. Introduisons les fonctions de Jensen et de Nevanlinna

$$N(r, g) = \int_0^r [n(x, g) - n(x, o)] \frac{dx}{x} + n(o, g) \log r,$$

$$m(r, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |g(re^{iu})| \, du ;$$

$g(z)$ est supposée méromorphe pour $|z| \leqq r$, $n(x, g)$ est le nombre des zéros de cette fonction dans le cercle $|z| < x$ et $\overset{+}{v}$ désigne v si v est positif et o dans le cas contraire. Écrivons encore avec M. R. NEVANLINNA (1)

$$T(r, f) = m(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

L'ordre de M. BOREL (2) est alors le nombre

$$\varrho = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

La fonction $T(r, f)$ caractérise la distribution circulaire moyenne des zéros de $f(z) - x$; notamment, *lorsque l'ordre est fini, le rapport* $\mathrm{N(r, f-x) : T(r, f)}$ *tend vers un lorsque* r *croît indéfiniment, presque pour tous les* x (3).

(1) *Zur Theorie der meromorphen Funktionen* (« Acta math. » 46, 1925).

(2) *Leçons sur les fonctions méromorphes.* Paris, Gauthier-Villars, 1903.

(3) *Sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes* (« Acta math. » 47, 1926).

Il y aurait lieu de faire une étude approfondie de l'ensemble exceptionnel de mesure nulle qui s'introduit ici. La méthode de M. NEVANLINNA conduit de même à ce résultat:

I. *Si* ϱ *est positif, il existe un nombre* $k=k(\varrho)$ *et une suite infinie de couronnes* $C(n, T)$

$$\frac{1}{k}R_n<|z|<kR_n$$

avec

$$\lim_{n=\infty} R_n=\infty \quad , \quad \lim_{n=\infty}\frac{\log T(R_n, f)}{\log R_n}=\varrho$$

telles que, dans toute couronne $C(n, T)$ *de rang assez grand,* $f(z)$ *prenne au moins*

$$\frac{1}{\log k}\log T(R_n, f)$$

et au plus

$$\frac{2}{\log k}\log T(k^2R_n, f)$$

fois toute valeur x *dont le point représentatif sur la sphère de Riemann est à l'extérieur de deux cercles au plus de rayon* $T(R_n, f)^{-1}$.

Lorsqu'on considère des fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ dont les fonctions caractéristiques $T(r, f)$ et $T(r, f_1)$ sont assez voisines, il existe une suite infinie de couronnes C communes. C'est ce qui a lieu lorsque $f_1(z)$ est la somme de $f(z)$ et d'une fonction d'ordre moindre. Dans le cas des fonctions entières, $T(r, f)=m(r, f)$ est lié au module maximum $M(r, f)$ ($M(r, f)$ est le maximum de $|f(re^{iu})|$ pour $0<u\leqq 2\pi$) par des inégalités connues. On peut alors supposer que le rapport des logarithmes de $M(r, f)$ et $M(r, f_1)$ a des limites d'indétermination positives. En particulier on peut prendre pour $f_1(z)$ une dérivée de $f(z)$ ou plus généralement une transmuée convenable: si c_n est le coefficient de z^n dans le développement de $f(z)$ suivant les puissances de z, on peut le remplacer par $c_n\varphi(n)$, $\varphi(x)$ satisfaisant à des conditions assez larges (1). Notamment on peut prendre pour $f_1(z)$ le produit de z^α par la dérivée d'ordre α de Riemann-Liouville de $f(z)$. Il y aurait lieu de chercher si l'on a des propriétés analogues pour les fonctions méromorphes, fonctions pour lesquelles la relation entre $T(r, f)$ et $T(r, f')$ est encore mal connue.

2. - D'après la proposition I, le nombre des zéros de $f(z)-x$ dans $C(n, T)$ est de l'ordre de $T(R_n, f)$ sauf pour les x exceptionnels. Si la distribution de ces zéros est sensiblement homogène pour ces x, il existera dans la couronne des régions, par exemple des cercles de rayon εR_n dans lesquels le nombre des zéros de $f(z)-x$ sera en général de l'ordre de $\varepsilon^2 T(R_n, f)$. J'ai montré dans un mé-

(1) Voir à ce sujet mon article: *Sur quelques propriétés des fonctions holomorphes et des fonctions entières*, qui doit paraître dans les « Rendiconti del Circolo mat. di Palermo ».

moire récent (1) une proposition générale un peu moins précise que celle-ci, le nombre des zéros trouvés dans le cercle en question est divisé par $\log T(R_n, f)$. M. MILLOUX a complété mes résultats (2) en faisant disparaître ce terme logarithmique tout au moins lorsque $\varepsilon = \varepsilon(n)$ ne décroît pas trop vite. En utilisant son idée j'ai pu supprimer aussi cette restriction (3). Nous sommes ainsi arrivés à des résultats très précis qui seront exposés en détail par M. MILLOUX dans la première partie d'un mémoire qui doit paraître prochainement dans les Acta mathematica. En se plaçant au point de vue de mon mémoire des Acta de 1928 cité plus haut, le résultat est le suivant:

II. *Il existe au moins un cercle* $\Gamma(\mathrm{n}, \varepsilon_\mathrm{n}, \mathrm{f})$ *de rayon* $\varepsilon_\mathrm{n}\mathrm{R}_\mathrm{n}$ *coupant la couronne* $\mathrm{C}(\mathrm{n}, \mathrm{T})$ *de l'énoncé* I, *dans lequel le nombre des zéros de* $\mathrm{f}(\mathrm{z}) - \mathrm{x}$ *est au moins égal à* $\mathrm{N} = \varepsilon_n^2 \mathrm{h}\ \mathrm{T}(\mathrm{R}_\mathrm{n}, \mathrm{f})$ *pourvu que* x *soit représenté sur la sphère de Riemann à l'extérieur de deux petits cercles dont le logarithme du rayon est* $-lN$. h et l ne dépendent pas de n, ε_n doit être pris inférieur à un nombre fixe.

Cet énoncé a été et devra encore être considérablement précisé dans le cas de l'ordre infini. Le cas $\varrho = 0$ se traite de même en remplaçant les couronnes $C(n, T)$ par les couronnes $R_0 < |z| < R_n$. On décompose en régions plus petites dont les dimensions sont proportionnelles à leur distance à l'origine; la méthode s'applique tant que

$$T(r, f) : (\log r)^2$$

n'est pas borné. On rejoint ainsi un résultat de M. OSTROWSKI (4). On montre d'autre part que, dans le cas de l'ordre positif, il existe une suite infinie de *cercles de remplissage* $\Gamma(n)$, dont les centres z_n s'éloignent indéfiniment, dont les rayons sont

$$A_n |z_n| [T(|z_n| h, f)]^{-1/2}$$

et tels que, dans $\Gamma(n)$, $f(z)$ prend toutes les valeurs représentées sur la sphère à l'extérieur de deux petits cercles de rayon e^{-kA_n}. h et k sont des nombres fixes dépendant de $f(z)$ mais non pas de n. Ce résultat est bien précis comme le montre le cas des fonctions elliptiques (5). On peut aussi choisir pour ε_n une fonction tendant lentement vers zéro avec $1/n$, ce qui montre en particulier que

---

(1) *Recherches sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes.* (« Acta math. », 52, 1928).

(2) *Sur quelques propriétés des racines des fonctions méromorphes* (« Comptes Rendus Académie des Sciences », 186, 1928).

(3) *Sur les cercles de remplissage des fonctions méromorphes* (Ibid.).

(4) *Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes.* (« Math. Zeitschrift », 24, 1925).

(5) Ceci permet d'étendre le champ d'application du théorème VIII de mon mémoire des Acta (1928) à toutes les fonctions du type maximum de l'ordre 2.

le théorème de M. BOREL d'après lequel l'exposant de convergence de la suite des zéros de $f(z)-x$ est égal à l'ordre ϱ sauf au plus pour deux valeurs de x reste vrai lorsqu'on se borne à la suite des zéros appartenant aux cercles $\Gamma(n, \varepsilon, f)$. La seule différence est que les valeurs exceptionnelles peuvent se présenter même pour les fonctions entières d'ordre non entier (l'une est alors infinie).

3. - Dans quelle mesure la position des cercles $\Gamma(n, \varepsilon_n, f)$ dépend-elle de la fonction $f(z)$? Si l'on considère les fonctions $f(z)+R(z)$ où $R(z)$ est une fraction rationnelle, on peut obtenir, en augmentant convenablement les rayons, des cercles Γ communs pour toutes ces fonctions. En particulier on a des cercles communs pour toutes les fonctions $z^q f(z)$. En est-il de même pour l'ensemble de la fonction donnée et de transmuées convenables telles par exemple que les dérivées? Dans cet ordre d'idées je signalerai quelques résultats qui s'obtiennent aisément (1).

Appelons *direction de Borel* de $f(z)$ une direction $\varphi = \arg z = \text{const.}$ telle que, pour tout angle Δ de sommet origine admettant cette direction pour bissectrice, l'exposant de convergence de la suite des zéros de $f(z)-x$ appartenant à Δ soit égal à l'ordre ϱ de $f(z)$ sauf au plus pour deux valeurs de x dont l'une peut être infinie. Il existe toujours au moins une telle direction d'après le théorème II. Si $f(z)$ est une fonction entière d'ordre infini l'ensemble des directions de Borel de $f(z)$ et de toutes ses dérivées ou primitives et de toutes les branches de ses dérivées généralisées est le même (on suppose les dérivées généralisées prolongées sans sortir de Δ). Si $f(z)$ est d'ordre fini ϱ supérieur à $1/2$ et si D est direction de Borel de $f(z)$, il existe une direction de Borel de $D^a f(z)$ faisant avec D un angle au plus égal à $\frac{\pi}{\varrho}$. Un résultat récent de M. BIERNACKI laisse prévoir qu'il existe toujours une direction de Borel commune à une fonction entière et à toutes ses dérivées ordinaires. Il semble même qu'il doit exister des cercles Γ du genre de ceux définis dans II, mais de rayons un peu plus grands, communs à $f(z)$ et à ses q premières dérivées.

J'ai dit plus haut (n. 2) que le rayon trouvé pour les cercles de remplissage est très précis. Il en est ainsi pour les fonctions méromorphes les plus générales. Pour les fonctions entières j'avais montré antérieurement (2) que le rayon minimum s'obtient en remplacant $\sqrt{T}$ par $\log M(r, f)$ c'est-à-dire par T. M. MILLOUX a établi dans le mémoire cité plus haut qu'il en est encore ainsi pour certaines classes de fonctions méromorphes, notamment celles qui sont exception-

---

(1) Voir le mémoire: *Sur quelques propriétés des fonctions holomorphes et des fonctions entières*, qui doit paraître dans les « Rendiconti del Circolo mat. di Palermo ».

(2) *Complément au théorème de Picard-Julia* (« Bulletin des sciences math. », 51, 1927).

nelles au point de vue de M. BOREL. On pourra chercher à déterminer toutes les fonctions pour lesquelles cet abaissement se produit. Existe-t-il des classes étendues pour lesquelles ce rayon est encore moindre? On sait par exemple que les fonctions entières d'ordre inférieur à 1/2 et dont les modules des zéros croissent très régulièrement profitent complétement des possibilités de variations d'une fonction d'ordre donné, le rayon des cercles de remplissage est de l'ordre de $[M(r, f)]^{-1}$; mais cette propriété n'est plus vraie en général dès que l'ordre atteint 1/2.

4. - Tous les résultats précédents s'étendent, à peu près sans modification, au cas des fonctions méromorphes autour du point à l'infini.

On obtient des propositions semblables pour une fonction $f(z)$ méromorphe dans le cercle $|z|<1$ et dont l'ordre moyen

$$\varrho=\overline{\lim_{r=1}} \frac{\log T(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

est positif. Dans ces conditions

III. *Il existe une suite infinie de petits cercles* $\Gamma(\mathrm{n}, \varepsilon_\mathrm{n}, \mathrm{f})$

$$|z-z_n|<\varepsilon_n(1-|z_n|)$$

tels que, dans $\Gamma(\mathrm{n}, \varepsilon_\mathrm{n}, \mathrm{f})$, $\mathrm{f(z)}$ *prenne au moins*

$$N=\varepsilon_n^2 \mu T(r_n, f)$$

fois toute valeur sauf au plus celles représentées sur la sphère à l'intérieur de deux cercles de rayon $[T(r_n, f)]^{-\lambda}$. On a

$$\lim \frac{\log T(r_n, f)}{\log \frac{1}{1-r_n}}=\varrho, \quad K<\frac{1-r_n}{1-|z_n|}<K'$$

λ, μ, K et K' étant des nombres fixes dépendant de $f(z)$; ε_n est arbitraire mais inférieur à un nombre fixe.

Supposons ε_n fixe. Si l'on considère les modules $r(p, x)$ des zéros de $f(z)-x$ appartenant à une suite de cercles $\Gamma(n, \varepsilon_n, f)$, on voit que la série

$$\sum [1-r(p, x)]^\tau$$

diverge pour $\tau<\varrho$ sauf au plus pour deux valeurs de x. L'exposant de convergence relatif à cette suite est au moins égal à ϱ.

Ceci m'a conduit à définir diverses sortes de points singuliers sur la circonférence du cercle $|z|<1$ dans lequel $f(z)$ est méromorphe tandis qu'elle ne l'est plus pour $|z|=1$. Un point z_0 est *un point de Picard* si $f(z)$ prend toute valeur sauf deux au plus dans un voisinage circulaire arbitrairement restreint

de z_0. (Il est entendu une fois pour toutes qu'il s'agit uniquement des valeurs prises à l'intérieur du cercle $|z|<1$). Il pourra exister en un tel point *une direction de Picard*, direction D aboutissant à z_0 et telle que la propriété précédente reste vraie lorsqu'on se limite en outre à un voisinage angulaire arbitraire de sommet z_0 et bissectrice D. Le point sera un *point de Julia* si l'on peut se borner à considérer la portion du cercle $|z|<1$ appartenant à une suite quelconque extraite de petits cercles dont les centres z_n tendent vers z_0 et dont les rayons sont égaux à $\varepsilon(1-|z_n|)$, ε étant arbitrairement petit.

On définit de même un *point de Borel d'ordre positif* α avec trois sous-cas analogues aux précédents lorsque la série

$$\sum (1-|z(p,x)|)^\tau$$

formée avec les zéros $z(p,x)$ de $f(z)-x$ (ou les pôles si x est infini) appartenant respectivement aux trois sortes de voisinage considérés ci-dessus converge quel que soit x pour $\tau>\alpha$ et diverge pour tous les x sauf deux au plus pour $\tau<\alpha$. Lorsque $f(z)$ est d'ordre moyen positif ϱ dans le cercle, il existe au moins un point de Borel avec petits cercles à la Julia dont l'ordre est au moins ϱ, mais il existe aussi lorsque $f(z)$ est holomorphe au moins un point de Borel de l'espèce la plus simple dont l'ordre est $\varrho+1$ (1). L'étude des conditions précises dans lesquelles se présentent ces points reste à faire.

En ce qui concerne les points de Picard sans direction de Picard, le théorème de Schottky montre qu'il en existe un dès que $f(z)$ est holomorphe et que $(1-r)\log M(r,f)$ ne reste pas borné. Le cas de $e^{\frac{1}{1-z}}$ montre que cette condition ne peut être remplacée par une autre meilleure de la même espèce.

On peut donner des définitions analogues dans le cas d'une fonction méromorphe dans le voisinage d'un point singulier non polaire qui est accessible à l'intérieur d'un angle. Je signalerai à ce sujet la question suivante. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans un angle Δ de sommet origine et pour $|z|<R$ et supposons qu'il existe un chemin aboutissant à l'origine dans un angle Δ' complétement intérieur à Δ, chemin sur lequel $f(z)$ est complétement indéterminée lorsque z tend vers 0. On sait qu'il suffit qu'il existe un autre chemin intérieur à Δ sur lequel $f(z)$ n'est pas complétement indéterminé lorsque z tend vers 0 pour que le théorème de Picard et même celui de Julia s'applique à $f(z)$ dans Δ; cela résulte de la théorie des familles normales de M. MONTEL. Supposons donc que sur toute demi droite aboutissant à l'origine dans l'angle Δ, $f(z)$ soit complétement indéterminée pour $z=0$. *Le théorème de Picard ne s'applique pas*

---

(1) *Sur quelques propriétés des fonctions méromorphes* (« Comptes Rendus Académie des Sciences », 186, 1928).

toujours. Il suffit de modifier légèrement la construction donnée au n. 7 d'un de mes mémoires (1) pour obtenir une fonction de cette espèce qui omet de prendre autant de valeurs que l'on veut et même toutes les valeurs situées sur une courbe simple ouverte (au sens banal du mot).

---

(1) *Le théorème de M. Picard el le complément de M. Julia* (« Journal de math. », (9), 7, 1928).

O. Szász (Frankfurt - Germania)

UEBER DIRICHLETSCHE REIHEN AN DER KONVERGENZGRENZE

§ 1.

ABEL, dessen 100. Todestag im nächsten Jahre gefeiert wird, hat bekanntlich den Satz bewiesen:

A). Die unendliche Reihe $\sum_1^\infty c_\nu$ sei konvergent, dann konvergiert offenbar die Potenzreihe $\sum c_\nu z^\nu$ für $|z|<1$, und es ist (1)

$$\lim_{z\to 1-0}\sum c_\nu z^\nu = \sum c_\nu .$$

Allgemeiner ist nach DEDEKIND unter derselben Voraussetzung die Dirichletsche Reihe $\sum_1^\infty c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$, wo die λ_ν reell sind und der Bedingung genügen

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_\nu<\lambda_{\nu+1}<\ldots, \quad \lim_{\nu\to\infty}\lambda_\nu=\infty, \tag{1}$$

für $t>0$ konvergent und (2) es ist

$$\lim_{t\to+0}\sum c_\nu e^{-\lambda_\nu t} = \sum c_\nu .$$

Wenn die λ_ν hinreichend stark wachsen, ist der Satz umkehrbar; die Herren HARDY und LITTLEWOOD (3) haben nämlich den Satz bewiesen:

B). Es sei

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}>1,$$

---

(1) Vgl. z. B. A. PRINGSHEIM, *Vorlesungen über Funktionenlehre.* Verlag Teubner (1926), S. 254.

(2) Vgl. z. B. E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen,* Verlag Teubner (1909), S. 737. - *Der Abelsche Satz ergibt sich hieraus durch die Substitution* $e^{-t}=z$, $\lambda_\nu=\nu$.

(3) G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD, *A further note on the converse of Abel's theorem.* Proc. London Math. Soc. (2), 25 (1926), 219-236.

ferner sei die Reihe $\sum c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ für $t>0$ konvergent (1), dann folgt aus der Exlstenz des Grenzwertes

$$\sum c_\nu e^{-\lambda_\nu t} \to s \text{ für } t \to 0, \tag{2}$$

die Konvergenz der Reihe $\sum c_\nu$ zur Summe s.

Aber im allgemeinen sind zur Umkehrung des Abelschen Satzes Zusatzbedingungen erforderlich (2). Ich zitiere hier nur den bemerkenswerten Satz (3) des Herrn LITTLEWOOD:

C). Es gelte ausser (1)

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to 1 \text{ für } n \to \infty, \tag{3}$$

$$c_n = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right), \tag{4}$$

sodass die Reihe $\sum c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ für $t>0$ konvergiert. Dann folgt aus der Existenz des Grenzwertes (2) die Konvergenz der Reiche $\sum c_\nu$ zur Summe s.

Herr LANDAU (4) hat diesen Satz aus dem folgenden hergeleitet:

D) Es bezeichne $M(m, \delta)$ das Maximum von $|s_n - s_m|$ für

$$\frac{\lambda_m}{1+\delta} \leqq \lambda_n \leqq \lambda_m(1+\delta), \quad \delta>0, \quad c_1 + \ldots + c_n = s_n,$$

$$\psi(\delta) = \overline{\lim_{m\to\infty}} M(m, \delta).$$

Es gelte nun ausser (1), (2) und (3)

$$\psi(\delta) \to 0 \text{ für } \delta \to 0, \text{ und } \sum_1^n c_\nu = O(1); \tag{5}$$

dann konvergiert $\sum c_\nu$ zur Summe s.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich auch folgende Verallgemeinerung des Satzes *C*) beweisen:

E) Es gelte ausser (1) und (3) für ein $p>1$

$$\sum_2^n \lambda_\nu^p (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})^{1-p} |c_\nu|^p = O(\lambda_n), \tag{5_p}$$

---

(1) Dies bedeutet: $c_n = O(e^{\delta\lambda_n})$ für jedes positive δ.

(2) Beispiel: $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots$.

(3) J. E. LITTLEWOOD, *The converse of Abel's theorem on power series*, Proc. London Math. Soc. (2), 9 (1910), 434-448. Kürzlich hat Herr K. ANANDA-RAU (Journal London Math. Soc. 3 (1928), 200-205) gezeigt, dass man die Bedingung (3) streichen kann.

(4) E. LANDAU, *Ueber einen Satz des Herrn Littlewood*. Rend. di Palermo, 35 (1913), 265-276.

so dass die Reihe $\sum c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ für $t>0$ absolut konvergiert. Aus der Existenz des Grenzwertes (2) folgt sodann die konvergenz der Reihe $\sum c_\nu$ mit der Summe s.

Vorbemerkung 1. Die Bedingung (5_p) ist allgemeiner als (4); denn aus (4) folgt

$$\lambda_\nu^p(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})^{-p}\,|c_\nu|^p=O(1), \quad \text{also} \quad \lambda_\nu^p(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})^{1-p}\,|c_\nu|^p=O(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}),$$

also gilt (5_p) für jedes $p>1$. Die c_ν sind beliebige komplexe Zahlen.

§ 2.

2. Es ist für $p-\varepsilon\geqq 1$ [1]

$$\sum\lambda_\nu^{p-\varepsilon}(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})^{-p+\varepsilon+1}\,|c_\nu|^{p-\varepsilon}=\sum\lambda_\nu^{p-\varepsilon}(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})^{\varepsilon-p+1-\frac{\varepsilon}{p}}\,|c_\nu|^{p-\varepsilon}(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})^{\frac{\varepsilon}{p}}$$
$$\leqq\Big(\sum\lambda_\nu^p(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})^{1-p}\,|c_\nu|^p\Big)^{\frac{p-\varepsilon}{p}}\Big(\sum(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})\Big)^{\frac{\varepsilon}{p}}=O\Big(\lambda_n^{\frac{p-\varepsilon}{p}+\frac{\varepsilon}{p}}\Big)=O(\lambda_n).$$

Wenn also die Beziehung (5_p) für ein p gilt, so gilt sie auch für jedes kleinere $p\geqq 1$; insbesondere muss also

$$(5_1)\qquad \sum_1^n\lambda_\nu|c_\nu|=O(\lambda_n)$$

sein.

Je kleiner p ist, desto umfassender ist die Behauptung des Satzes.

Der kürzeste Beweis des Satzes E) ergibt sich aus einer von Herrn NEDER [2] herrührenden Verschärfung des LITTLEWOODschen Satzes, die aus dem LANDAUschen Satze folgt. Diese lautet:

D') Es sei nebst (1) und (3)

$$(5')\qquad \overline{\lim_{x\to\infty}}\sum_{x\leqq\lambda_\nu\leqq(1+\delta)x}|c_\nu|<\eta(\delta), \quad \eta(\delta)\to 0 \text{ für } \delta\to 0,$$

so dass die Reihe $\sum c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ für $t>0$ konvergiert (sogar absolut). Aus (2) folgt dann die Konvergenz der Reihe $\sum c_\nu$ mit der Summe s.

Hieraus ergibt sich nun Satz E) sofort; denn es ist

$$\sum|c_\nu|=\sum\lambda_\nu(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})^{\frac{1-p}{p}}\,|c_\nu|\cdot(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})^{\frac{p-1}{p}}\lambda_\nu^{-1}$$
$$\leqq\Big[\sum\lambda_\nu^p(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})^{1-p}\,|c_\nu|^p\Big]^{\frac{1}{p}}\Big[\sum(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})\lambda_\nu^{-q}\Big]^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{q}=1-\frac{1}{p},$$

---

[1] Nach der Hölderschen Ungleichung

$$\sum\alpha_\nu\beta_\nu\leqq\Big(\sum\alpha_\nu^{\frac{1}{t}}\Big)^t\Big(\sum\beta_\nu^{\frac{1}{1-t}}\Big)^{1-t}, \quad \alpha_\nu\geqq 0,\ \beta_\nu\geqq 0,\ 0<t<1.$$

[2] L. NEDER, *Über Taubersche Bedingungen*. Proc. London Math. Soc. (2) 23, p. 172-184; insb. S. 181-182.

und

$$\sum_{x\leqq\lambda_\nu\leqq(1+\delta)x}(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})\lambda_\nu^{-q}\leqq\frac{1}{x^q}[(1+\delta)x-(1-\delta)x],$$

falls das vor x stehende $\lambda>(1-\delta)x$ ist; dies ist wegen (3) für alle hinreichend grossen x der Fall. Also ist

$$\sum_{x\leqq\lambda_\nu\leqq(1+\delta)x}|c_\nu|=O[(1+\delta)^{\frac{1}{p}}x^{\frac{1}{p}}\cdot x^{\frac{1-q}{q}}\cdot(2\delta)^{\frac{1}{q}}]=\delta^{\frac{1}{q}}O(1)$$

d. h. es gilt (5′). Qu. e. d.

Die Herren HARDY und LITTLEWOOD (1) haben den Satz bewiesen:

Es sei für ein $\varrho>0$ die Reihe $\sum\left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}\right)^\varrho|c_\nu|^{\varrho+1}$ konvergent, so dass $\sum c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ für $t>0$ absolut konvergiert; aus (2) folgt dann die Konvergenz der Reihe $\sum c_\nu$ mit der Summe s.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus E), denn es ist

$$\sum_2^n\frac{\lambda_\nu^{\varrho+1}|c_\nu|^{\varrho+1}}{(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})^\varrho}\leqq\lambda_n\sum_2^n\left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}\right)^\varrho|c_\nu|^{\varrho+1}=O(\lambda_n).$$

Eine genauere Orientierung gibt die Abschätzung

$$\sum_1^n\lambda_\nu^{\varrho+1}(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})^\varrho|c_\nu|^{\varrho+1}=-\sum_1^{n-1}u_\nu(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu)+u_n\lambda_n=o(\lambda_n),$$

wobei

$$\lambda_0=0,\quad u_n=\sum_1^n\left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}\right)^\varrho|c_\nu|^{\varrho+1}.$$

§ 3.

Für $\lambda_\nu=\nu$ gilt (1) und (3); (5_p) reduziert sich auf

$$\sum_1^n\nu^p|c_\nu|^p=O(n).$$

Für diesen Fall gab ich einen einfacheren Beweis (2); ich gebe hier einen entsprechenden Beweis für den allgemeinen Satz E), da er auf Hilfssätzen beruht, die weitergehendes Interesse haben.

---

(1) HARDY u. LITTLEWOOD, *Some theorems concerning Dirichlet's series.* Messenger of Math. (2) 43, (1914), 134-147, insb. S. 136-137.

(2) O. SZÁSZ, *Verallgemeinerung eines Littlewoodschen Satzes über Potenzreihen*, Journal London Math. Soc. 3 (1928), 254-262.

LEMMA 1. - Es sei $\lambda_0 = o < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lambda_n \to \infty$ und

$$\sum_1^n \lambda_\nu c_\nu = O(\lambda_n);$$

dann ist $\sum c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ konvergent für $t > 0$.

Beweis: Es ist für $\sum_1^n \lambda_\nu c_\nu = v_n$

$$\sum_n^{n+k} c_\nu e^{-\lambda_\nu t} = \sum_n^{n+k} (v_\nu - v_{\nu-1}) \frac{e^{-\lambda_\nu t}}{\lambda_\nu} = -\frac{v_{n-1}}{\lambda_n} e^{-\lambda_n t} + \frac{v_{n+k}}{\lambda_{n+k}} e^{-\lambda_{n+k} t} + \sum_n^{n+k-1} v_\nu \left(\frac{e^{-\lambda_\nu t}}{\lambda_\nu} - \frac{e^{-\lambda_{\nu+1} t}}{\lambda_{\nu+1}} \right)$$

$$= O\left[e^{-\lambda_n t} + \sum_n^{n+k-1} (e^{-\lambda_\nu t} - e^{-\lambda_{\nu+1} t}) + \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\lambda_n} \right] = o(1) \text{ für } n \to \infty,$$

wegen $\frac{e^{-\lambda_\nu t}}{\lambda_\nu} - \frac{e^{-\lambda_{\nu+1} t}}{\lambda_{\nu+1}} = \frac{e^{-\lambda_\nu t} - e^{-\lambda_{\nu+1} t}}{\lambda_\nu} + e^{-\lambda_{\nu+1} t} \left(\frac{1}{\lambda_\nu} - \frac{1}{\lambda_{\nu+1}} \right)$ und $\lambda_\nu e^{-\lambda_{\nu+1} t} < \lambda_\nu e^{-\lambda_\nu t} < \frac{1}{t}$.
Qu. e. d.

LEMMA 2. - Es sei

$$\sum_1^n \lambda_\nu c_\nu = O(\lambda_n),$$

also nach Lemma 1 die Reihe $\sum c_\nu e^{-\lambda_\nu t} = F(t)$ konvergent für $t > 0$; ferner sei $F(t) = O(1)$ für $t > 0$; dann ist

$$\sum_1^n c_\nu = s_n = O(1).$$

Beweis: Es ist für $c_0 = 0$

$$F(t) = \sum_1^\infty v_\nu \left(\frac{e^{-\lambda_\nu t}}{\lambda_\nu} - \frac{e^{-\lambda_{\nu+1} t}}{\lambda_{\nu+1}} \right) = \sum_1^\infty \frac{v_\nu}{\lambda_\nu} (e^{-\lambda_\nu t} - e^{-\lambda_{\nu+1} t}) + \sum_1^\infty v_\nu e^{-\lambda_{\nu+1} t} \left(\frac{1}{\lambda_\nu} - \frac{1}{\lambda_{\nu+1}} \right),$$

und

$$\sum_1^n c_\nu = \sum_1^{n-1} v_\nu \left(\frac{1}{\lambda_\nu} - \frac{1}{\lambda_{\nu+1}} \right) + \frac{v_n}{\lambda_n}.$$

Also

$$F(t) - s_n = -\frac{v_n}{\lambda_n} + \sum_1^\infty \frac{v_\nu}{\lambda_\nu} (e^{-\lambda_\nu t} - e^{-\lambda_{\nu+1} t}) + \sum_1^{n-1} v_\nu \left(\frac{1}{\lambda_\nu} - \frac{1}{\lambda_{\nu+1}} \right) (e^{-\lambda_{\nu+1} t} - 1)$$

$$+ \sum_n^\infty v_\nu e^{-\lambda_{\nu+1} t} \left(\frac{1}{\lambda_\nu} - \frac{1}{\lambda_{\nu+1}} \right).$$

Hieraus folgt wegen $1 - e^{-x} < x$, $x e^{-x} < 1$

$$F\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) - s_n = O\left(1 + e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_n} \sum_1^{n-1} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) + \lambda_n \cdot \frac{1}{\lambda_n}\right) = O(1).$$

Qu. e. d.

LEMMA 3. - Aus der Existenz des $\lim_{t \to 0} \sum c_\nu e^{-\lambda_\nu t} = s$ und aus $|s_n| \leqq B$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ folgt:

$\sum c_\nu$ ist summierbar mit den Rieszschen (λ)-Mitteln, das heisst

$$\frac{(\lambda_2-\lambda_1)s_1+\ldots.+(\lambda_{n+1}-\lambda_n)s_n}{\lambda_{n+1}}\to s, \quad n\to\infty \ (^1).$$

Zum Beweise benutze ich folgenden Satz der Herren HARDY und LITTLEWOOD (²)

Aus

$$\sum a_\nu e^{-\lambda_\nu t}\sim\frac{A}{t}, \quad A>0, \quad t\to 0, \quad a_\nu\geqq 0, \quad \frac{\lambda_{\nu+1}}{\lambda_\nu}\to 1,$$

folgt

$$a_1+\ldots.+a_n\sim A\lambda_n.$$

Sezt man nun $s_0=0$, $\lambda_0=0$, $B'=(1+i)B$, so wird

$$B'+\sum_1^\infty c_\nu e^{-\lambda_\nu t}=\sum_0^\infty (B'+s_\nu)(e^{-\lambda_\nu t}-e^{-\lambda_{\nu+1}t})=t\sum (B'+s_\nu)(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu)e^{-\lambda_\nu t}$$
$$+\sum (B'+s_\nu)[e^{-\lambda_\nu t}-e^{-\lambda_{\nu+1}t}-t(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu)e^{-\lambda_\nu t}]=S_1+S_2\sim B'+s;$$

hierbei ist offenbar

$$|S_2|\leqq 3Bt\sum[(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu)e^{-\lambda_\nu t}-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} e^{-tx}dx]\leqq 3Bt\sum(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu)(e^{-\lambda_\nu t}-e^{-\lambda_{\nu+1}t})$$
$$\leqq 3Bt^2\sum(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu)^2e^{-\lambda_\nu t}.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (3) leicht (³) $S_2\to 0$ für $t\to 0$, also $S_1\sim B'+s$, das heisst

$$\sum_0^\infty (B'+s_\nu)(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu)e^{-\lambda_\nu t}\sim(B'+s)t^{-1}, \quad t\to 0.$$

Die Anwendung des obenzitierten Satzes von HARDY und LITTLEWOOD auf Real-bezw. Imaginärteil dieser Reihe ergibt nun unmittelbar

$$(\lambda_2-\lambda_1)(B'+s_1)+\ldots.+(\lambda_{n+1}-\lambda_n)(B'+s_n)\sim(B'+s)\lambda_n$$

also wegen (3)

$$(\lambda_2-\lambda_1)s_1+\ldots.+(\lambda_{n+1}-\lambda_n)s_n\sim s\lambda_{n+1}. \qquad \text{Qu. e. d.}$$

LEMMA 4. - Aus der (λ) Summierbarkeit der Reihe $\sum c_\nu$ und aus (5_p) folgt die Konvergenz der Reihe.

Zum Beweise sei abkürzend

$$(\lambda_2-\lambda_1)s_1+\ldots.+(\lambda_{n+1}-\lambda_n)s_n=\lambda_{n+1}\sigma_n,$$

dann îst offenbar

$$(6)\quad \sigma_{n+k}-s_{n+k}=\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+k+1}-\lambda_n}(\sigma_{n-1}-\sigma_{n+k})-\frac{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)c_{n+1}+\ldots.+(\lambda_{n+k}-\lambda_n)c_{n+k}}{\lambda_{n+k+1}-\lambda_n}.$$

(¹) Vgl. LITTLEWOOD, loc. cit. (p. 270), p. 448.

(²) HARDY und LITTLEWOOD, loc. cit. (p. 272), insb. S. 141.

(³) Vgl. HARDY und LITTLEWOOD, loc. cit. (p. 272), S. 146. - K. KNOPP, *Divergenzcharaktere gewisser Dirichletscher Reihen.* Acta Mathematica 34 (1911), S. 165-204; insb. S. 198-203.

Nun ist

$$\sum_{\nu=1}^{k}(\lambda_{n+\nu}-\lambda_n)c_{n+\nu}=\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\lambda_{n+\nu}\cdot c_{n+\nu}}{(\lambda_{n+\nu}-\lambda_{n+\nu-1})^{\frac{p-1}{p}}}\cdot\frac{(\lambda_{n+\nu}-\lambda_{n+\nu-1})^{\frac{p-1}{p}}(\lambda_{n+\nu}-\lambda_n)}{\lambda_{n+\nu}},$$

und nach der Hölderschen Ungleichung

$$\left|\sum_{1}^{k}(\lambda_{n+\nu}-\lambda_n)c_{n+\nu}\right|\leqq\left[\sum_{1}^{k}\frac{\lambda_{n+\nu}^{p}\,|\,c_{n+\nu}\,|^{p}}{(\lambda_{n+\nu}-\lambda_{n+\nu-1})^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{1}^{k}\frac{(\lambda_{n+\nu}-\lambda_{n+\nu-1})(\lambda_{n+\nu}-\lambda_n)^{q}}{\lambda_{n+\nu}^{q}}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqq\left[\sum_{1}^{k}\frac{\lambda_{n+\nu}^{p}\,|\,c_{n+\nu}\,|^{p}}{(\lambda_{n+\nu}-\lambda_{n+\nu-1})^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{\lambda_{n+k}-\lambda_n}{\lambda_{n+k}}\cdot(\lambda_{n+k}-\lambda_n)^{\frac{1}{q}},$$

$$\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p},$$

also wegen (5_p)

$$\frac{\sum_{1}^{k}(\lambda_{n+\nu}-\lambda_n)c_{n+\nu}}{\lambda_{n+k+1}-\lambda_n}=O\left[\lambda_{n+k}^{\frac{1}{p}-1}(\lambda_{n+k}-\lambda_n)^{\frac{1}{q}}\right]=O\left[\left(\frac{\lambda_{n+k}-\lambda_n}{\lambda_{n+k}}\right)^{\frac{1}{q}}\right]. \tag{7}$$

Nun sei zu gegebenem $\varepsilon>0$ n_0 so bestimmt, dass

$$|\sigma_{n-1}-\sigma_{n+k}|<\varepsilon \quad \text{für } n>n_0 \text{ und } k=0,\,1,\,2,\ldots. \tag{8}$$

und dass

$$\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n}<\varepsilon \quad \text{für } n>n_0.$$

Dann lassen sich alle $m>n_0$ in der Form schreiben $m=n+k$, so dass $n>n_0$, $k>0$ und

$$\sqrt{\varepsilon}<\frac{\lambda_m-\lambda_n}{\lambda_m}<2\sqrt{\varepsilon}. \tag{9}$$

Dazu braucht man nur m der Bedingung $\frac{\lambda_m-\lambda_{n_0}}{\lambda_m}>2\sqrt{\varepsilon}$ zu unterwerfen, und für n den kleinsten, der Ungleichung $\frac{\lambda_m-\lambda_n}{\lambda_m}<2\sqrt{\varepsilon}$ genügenden Wert zu wählen: dann ist $n>n_0$ und

$$\frac{\lambda_m-\lambda_n}{\lambda_m}=\frac{\lambda_m-\lambda_{n-1}}{\lambda_m}-\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_m}>2\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon>\sqrt{\varepsilon}.$$

Aus (6), (8) und (9) folgt nun

$$|\sigma_m-s_m|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{1}{\lambda_{m+1}-\lambda_n}\left|\sum_{1}^{k}(\lambda_{n+\nu}-\lambda_n)c_{n+\nu}\right|,$$

und wegen (7) und (9) wird weiter

$$\sigma_m-s_m=O\left(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon}^{\frac{1}{q}}\right).$$

Hieraus folgt $\sigma_m-s_m\to 0$, also $\sigma_m\to s$ für $m\to\infty$. Qu. e. d.

Aus diesen Hilfssätzen folgt nun unmittelbar der Satz E); denn wegen (5_1) folgt nach Lemma 1 Konvergenz der Reihe $\sum c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$, $(t>0)$, nach Lemma 2

ist $s_n = O(1)$, nach Lemma 3 ist $\sum c_\nu(\lambda)$ summierbar und nach Lemma 4 sogar konvergent.

An anderer Stelle werde ich eine Verallgemeinerung und einfachere Beweisführung dieser Sätze geben.

Zusatz bei der Korrektur (25-V-1930). Ich verweise auf meine inzwischen erschienene Arbeiten: 1) *Über neuere Untersuchungen im Zusammenhange mit dem Abelschen Potenzreihensatz*, Mat. és Fiz. Lapok, 36 (1929), 10-22. - 2) *Verallgemeinerung und neuer Beweis einiger Sätze Tauberscher Art*, Sitzungsb. d. Bayer. Akad. d. Wiss., 1929, 325-340.

A. BUHL (Toulouse - Francia)

SUR LA PERMUTABILITÉ DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

1. - Il y a d'innombrables systèmes différentiels reposant, soit par eux-mêmes, soit par leurs conditions d'intégrabilité, sur la permutabilité des dérivées partielles ordinaires.

Les équations de Lagrange, les systèmes fondamentaux de la théorie du trièdre mobile, les formules conservant les équatlons canoniques,...., tout cela s'établit d'ordinaire en utilisant des interversions de dérivations.

Il serait bien intéressant aussi de classer les systèmes différentiels dont la théorie n'utilise pas ces interversions; telles seraient les équations dynamiques générales de M. P. APPELL fondées sur la considération de l'énergie d'accélérations. Il semble que les interversions en question jouent assez naturellement pour les espaces ou les systèmes holonomes et ne jouent pas pour espaces ou systèmes non holonomes, mais, à cet égard, on ne saurait être exclusif. Ainsi l'étude des espaces de Riemann porte à considérer des dérivées en D qui ne sont pas permutables mais qui peuvent prendre la forme lagrangienne construite, elle, en s'appuyant, sur des d et des ∂ permutables.

De même la Théorie des Groupes conduit rapidement à l'un des théorèmes fondamentaux de Lie, exprimé par

$$(1) \qquad (X_iX_j)=X_iX_j-X_jX_i=c_{ij}^s X_s.$$

Cette théorie semble donc consister en la considération d'opérateurs X non permutables en général; cependant elle est aussi entremêlée d'une foule de questions de permutabilité, ce que nous voulons précisément signaler ici de façon très brève.

D'abord en général, les opérateurs X_i sont en nombre r et dépendent de n variables.

Le groupe est à r paramétres et à n variables; la méthode de construction qui semble aujourd'hui prévaloir (Henri Poincaré, Elie Cartan) consiste à passer par l'obtention préalable des *groupes paramétriques* pour lesquels on a $n=r$ et

$$(2) \qquad (A_iA_j)=c_{ij}^s A_s, \quad (B_iB_j)=c_{ij}^s B_s, \quad (A_iB_j)=0.$$

Or la dernière de ces égalités fait apparaïtre une permutabilité pure et simple.

Observons que, dans (1) et (2), l'indice s est indice de sommation; il en sera de même dans la suite, pour tout indice contenu deux fois dans un terme monome.

2. - Pour les transformations infinitésimales A_j, en a_1, a_2,...., a_r, on a, plus explicitement,

$$A_j = a_{jk} \frac{\partial}{\partial a_k}.$$

On tire de là

$$\alpha^{jk} A_j = \frac{\partial}{\partial a_k}, \quad \alpha^{ji} A_j = \frac{\partial}{\partial a_i}. \tag{3}$$

En (3), les seconds membres sont évidemment permutables; en écrivant qu'il en est de même des premiers, on a le *système de Maurer-Cartan*

$$V^{s\nu\mu} = \frac{\partial \alpha^{s\nu}}{\partial a_\mu} - \frac{\partial \alpha^{s\mu}}{\partial a_\nu} - c^s_{jk} \alpha^{k\mu} \alpha^{j\nu} = 0. \tag{4}$$

En multipliant par $da_\mu da_\nu$, on peut écrire plus simplement, avec M. CARTAN,

$$[\pi^s]' + c^s_{jk} [\pi^j \pi^k] = 0. \tag{5}$$

Pour obtenir des groupes paramétriques de structure donnée il faut intégrer (4) ou (5). Or non seulement ces systémes peuvent naître d'une permutabilité mais leur intégration repose sur un état de choses analogue.

3. - Considérons le système différentiel ordinaire

$$\frac{d\theta^s}{dt} + C^s_k \theta^k = 0. \tag{6}$$

Si les coefficients C^s_k contiennent t d'une manière quelconque on ne sait, pour ainsi dire, rien des intégrales de ce système, à part quelques généralités provenant de son caractère linéaire.

Diminuons la généralité en ne faisant dépendre les r^2 fonctions C^s_k que de r fonctions λ^j seulement. Rien de plus naturel que de poser

$$C^s_k = c^s_{jk} \lambda^j$$

et, si les λ^j dépendent non seulement de t mais encore de r paramétres λ_j, nous pourrons définir r^2 dérivées partielles des λ^s par rapport à λ_ϱ. Ceci nous permettra de considérer le système

$$\frac{d\theta^{s\varrho}}{dt} + c^s_{jk} \lambda^j \theta^{k\varrho} = \frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_\varrho} \tag{7}$$

encore dérivé très naturellement de (6). Par appel à la notion de permutabilité, écrivons que

$$\frac{\partial^2 \lambda^s}{\partial \lambda_\varrho \partial \lambda_\tau} = \frac{\partial^2 \lambda^s}{\partial \lambda_\tau \partial \lambda_\varrho}. \tag{8}$$

Si les *relations structurales* de Lie ont lieu entre les constantes c_{jk}^{s} (et il y a ici une manière de retrouver, d'imposer ces relations) l'identité (8) donne

$$\frac{\partial}{\partial t} V^{s\varrho\tau} + c_{jk}^{s} \lambda^{j} V^{k\varrho\tau} = 0. \tag{9}$$

Si (7) *est intégré de telle manière que les* $\theta^{s\varrho}$ *soient tous nuls* pour $t=0$, il en est de même des $V^{s\varrho\tau}$ qui sont alors *identiquement* nuls de par l'homogénéité de (9). Donc, en *intégrant* (7) *comme il vient d'être indiqué, on intègre le système* (4).

4. - La Physique mathématique classique considère de nombreuses équations linéaires, aux dérivées partielles, à coefficients constants (cordes vibrantes, conductibilité, propagation ondulatoire, potentiel...).

Le premier membre E de l'une quelconque de ces équations est un assemblage d'opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3}, \ldots \tag{10}$$

permutable avec l'un quelconque d'entre eux ou avec tout assemblage E' analogue à E. Il suit de là que *toute équation* $E=0$ *admet pour solutions toutes les dérivées partielles d'une solution.* De même l'expression taylorienne, où les θ sont des constantes,

$$f(x_1+\theta_1, \; x_2+\theta_2, \ldots) = \sum^{n} \frac{1}{n!} \left(\theta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{(n)} f \tag{11}$$

est un assemblage E'; c'est une solution de $E=0$ si $f(x_1, x_2, \ldots)$ en est une.

En général, une équation $E=0$ admet des solutions

$$e^{a_i x_i} \tag{12}$$

les a_i étant des coordonnées pour un point situé sur une multiplicité caractéristique M. Après y avoir changé x_i en $x_i+\theta_i$ multiplions (12) par une fonction arbitraire des a et des θ, par tous les da et par tous les $d\theta$, puis intégrons enfin le long de M et en l'espace défini pas les θ. Nous aurons ainsi, pour les équations $E=0$, un type très général de solutions, type comprenant notamment les solutions à la Fourier.

5. - La théorie des Groupes semble offrir bien des manières de généraliser le paragraphe précédent. On peut tenter de remplacer les opérateurs (10) par des opérateurs X_i, tels ceux figurant en (1); certes, en général, ces opérateurs ne seront pas permutables mais ils peuvent offrir, par certaines de leurs combinaisons linéaires, de remarquables permutabilités particulières.

On créera ainsi des *équations aux opérateurs* X, à coefficients constants, lesquelles seront, en fin de compte, des équations linéaires, aux dérivées partielles, à coefficients non constants, formant des classes particulières très étendues.

Tout d'abord, on peut partir d'un seul opérateur X et chercher les opérateurs Y les plus généraux tels que $(XY)=0$. La question a donné lieu à un grand nombre de recherches; elle peut être confondue avec celle des équations aux variations de Poincaré. Elle donne lieu aussi à une réciprocité. Si Y permute les intégrales de $X=0$, réciproquement X permute les intégrales de $Y=0$ et, comme Y peut avoir diverses formes Y_i, nous pouvons former des équations aux opérateurs Y_i dont toutes les solutions seront changées en d'autres par l'opération X.

Autre point de vue. Reprenons les opérateurs figurant en (1). Soient μ_i des coefficients constants; il peut arriver que $(\mu_i X_i, X_j)=0$.

Les $\mu_i X_i$ sont les transformations *distinguées* du groupe; elles n'existent pas toujours mais on voit que, à tout groupe à transformations distinguées, correspondent des équations, aux opérateurs X_j, dont les solutions sont changées en d'autres par l'opération $\mu_i X_i$.

Troisième point de vue. Si le groupe défini en (1) est simplement *transitif*, il existe un groupe *réciproque*, de même structure, tel que $(X_i, Y_j)=0$. Ainsi les deux groupes paramétriques, considérés eu (2), sont réciproques. Là encore, ceci permet de former des équations aux opérateurs X (ou Y) à solutions permutées par les opérateurs Y (ou X).

Bornons-nous ici aux trois points de vue qui viennent d'être indiqués. L'un ou l'autre permettront de généraliser l'équation (11); aux équations Y aux opérateurs X correspondront ainsi des transformations *finies*, dépendant de constantes arbitraires, généralisant des solutions qu'on étendra encore par le procédé d'intégration indiqué au paragraphe 4.

6. - Nous ne pouvons guère ici développer des applications. Indiquons simplement quelques directions dans lesquelles on peut trouver de nombreuses équations aux opérateurs X. Ce seront d'abord des équations de Laplace

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\partial\beta}+A\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+B\frac{\partial\theta}{\partial\beta}+C\theta=0.$$

On sait, de plus, que la considération des lignes conjuguées sur les surfaces exige l'association de plusieurs solutions d'une telle équation; tout procédé qui, partant d'une solution, permet d'en déduire d'autres, est ici particulièrement précieux.

Si

$$X=(x-y)\frac{\partial}{\partial x},\quad Y=(x-y)\frac{\partial}{\partial y},$$

l'équation, à coefficients m, n, p constants,

$$XY+mX+nY+pf=0,$$

est la célèbre équation d'Euler et de Poisson.

Ces cas sont hyperboliques. Voici maintenant un cas parabolique. Soit à déterminer les surfaces dont un système d'asymptotiques se projette sur la famille de courbes

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B}.$$

Ce problème entraine l'équation

$$A^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2AB\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+B^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

ou

$$X^2-Y=0$$

si

$$X=A\frac{\partial}{\partial x}+B\frac{\partial}{\partial y},\quad Y=X(A)\frac{\partial}{\partial x}+X(B)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Il peut arriver que ces opérateurs soient permutables ce qui permet de ramener l'équation précédente à la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\frac{\partial f}{\partial t}=0.$$

Si X et Y ne sont pas permutables, on peut cependant en faire les transformations infinitésimales de divers groupes projectifs, ce qui permet d'appliquer, à l'équation $X^2=Y$, les méthodes au paragraphe 4.

7. - Il y a des systèmes *non linéaires* auxquels on peut appliquer des considérations analogues aux précédentes. Tel est, dans la théorie du trièdre mobile, le système formé par l'équation

$$\frac{\partial p_i}{\partial t_k}-\frac{\partial p_k}{\partial t_i}=q_i r_k-r_i q_k$$

et les deux qu'on en déduit par permutations circulaires en p, q, r.

Ce système, qui se rapporte aux rotations du trièdre, est un cas particulier des systèmes (4).

On peut l'intégrer avec des constantes arbitraires τ_i. Soit maintenant un opérateur

$$W=T_i\frac{\partial}{\partial t_i}+U_i\frac{\partial}{\partial \tau_i}$$

en lequel les T et les U ne dépendent que des τ_i. En posant

$$\xi_i=W(p_i),\quad \eta_i=W(q_i),\quad \zeta_i=W(r_i)$$

et en appliquant W au système indiqué, on en déduit

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t_k}-\frac{\partial \xi_k}{\partial t_i}=q_i\zeta_k+r_k\eta_i-r_i\eta_k-q_k\zeta_i$$

et deux autres équations formant avec celle-ci le système qu'il convient d'adjoindre au premier quand le mouvement du trièdre se complique de translations.

Ainsi il y a des déplacements du trièdre définis par le système en p, q, r et *par l'opérateur* W. N'y aurait-il là qu'un procédé mnémonique pour adjoindre

le système en ξ, η, ζ au système en p, q, r que ce serait déjà remarquable mais la chose admet des explications géométriques et des conséquences suffisamment importantes pour qu'on s'étonne que d'illustres fondateurs de la Théorie du trièdre mobile, tels Ribaucour et Darboux, aient pu apporter tant et tant de choses à cette théorie sans remarquer la dépendance très simple qui en lie les systèmes différentiels fondamentaux.

Les références bibliographiques que je ne donne point ici devraient cependant être nombreuses, mais elles ne diffèreraient pas de celles qu'on trouve dans mes *Aperçus modernes sur la Théorie des groupes continus*, publiés dans le « Mémorial des Sciences mathématiques ».

S. KAKEYA (Tokyo - Giappone)

ON THE MAXIMUM MODULUS OF AN ANALYTIC FUNCTION OF TWO VARIABLES

1. - In August, 1925, I have published the following theorem, in the Science Reports, Tôhoku Imp. Univ. 4, p. 306.

Among all analytic functions $F(x)$ which are holomorphic for $|x|\leqq 1$, and are such that, for the given points u_1, u_2,...., u_k within the circle $|x|=1$, the values of

$$F(u_1),\ F'(u_1),\ldots,\ F^{(m_1-1)}(u_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(u_k),\ F'(u_k),\ldots,\ F^{(m_k-1)}(u_k)$$

are equal to the prescribed constants respectively, there exists only one fonction, $F=f(x)$, whose maximum modulus for $|x|\leqq 1$ is smaller than that of any other function $F(x)$. This $f(x)$ is a rational function of the degree not exceeding $\sum m-1=n-1$, and it has constant modulus for $|x|=1$.

From its nature we see that $f(x)$ has the form

$$f(x)=\lambda\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\nu)}{(\bar{a}_1x-1)(\bar{a}_2x-1)\ldots(\bar{a}_\nu x-1)},\quad |a_i|<1,\ \nu<n,$$

where $\bar{a}$ denotes the coniugate of a. The constant modulus above mentioned is equal to $|\lambda|$.

We may now turn to the problem which has the same form but is of the function of two variables. Then our problem is *to find a function* $f(x, y)$ *among all analytic functions* $F(x, y)$ *which are holomorphic for the domain* D, *namely* $|x|\leqq 1$, $|y|\leqq 1$, *and the values of which and whose partial derivatives are given at certain points* (u_1, v_1), (u_2, v_2),...., (u_k, v_k) *within the domain* D, *and to make the maximum modulus* $f(x, y)$ *for the domain* D *smallest.*

I could only solve the two special cases of this problem.

It is remarkable to see that from one of these particular cases that the required extremal $f(x, y)$ is not uniquely determined, contrarily to the case of the single variable.

2. - As the first special case, we consider *the function* F(x, y) *whose values, not the values of whose derivatives, at the points* (u_i, v_i) *are given in the following form*

$$F(u_i, v_i) = w_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

To solve the problem in this case, we first consider the functions $G(x)$ holomorphic in the unit circle $|x| \leqq 1$, which satisfy the equations

$$G(u_i) = v_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Then there exists, by our former theorem, the unique function $G = g(x)$ among them, whose maximum modulus M for $|x| \leqq 1$ is smallest. We now give a restriction to our problem that this M *is not greater than* 1.

Next we consider the functions $H(x)$ holomorphic in the unit circle, which satisfy

$$H(u_i) = w_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

and, as before, we get the unique function $H = h(x)$ among them, wich has the smallest maximum modulus N.

Then we can conclude that *a required extremal* f(x, y) *of our problem is* f(x, y) = h(x), *so that the required smallest maximum modulus is* N.

For in the contrary case, there must exist a function $F(x, y)$ satisfyng the condition, for which

$$|F(x, y)| < N \text{ for } |x|, |y| \leqq 1.$$

If we put

$$F(x, y) - h(x) = \varphi(x, y)$$

then $\varphi\{x, g(x)\}$ is regular and has at least n zero points u_i, within the unit circle.

On the other hand, $h(x)$ is a rational function of the degree at most $n-1$, so that it can not have more than $n-1$ zero points within the unit circle. And moreover

$$|h(x)| = N \text{ for } |x| = 1,$$

so that

$$|F\{x, g(x)\}| < |h(x)| \text{ for } |x| = 1.$$

Hence, by the theorem of D'Alembert, the function $\varphi\{x, g(x)\}$ has the same number of zeros as $h(x)$, namely at most $n-1$, within the unit circle.

These two facts contradict each other. Hence our proposition must be true.

In some special case, we get also an extremal of the form $h_1(y)$.

3. - We now come to the second special case.

We consider a rational function

$$f(x, y) = \lambda \frac{a + bx + cy + xy}{\bar{a}xy + \bar{b}y + \bar{c}x + 1},$$

and assume that the expansion of $f(x, y)$ has the form

$$f(x, y)=\alpha+\beta x+\gamma y+\cdots.$$

Taking two constants u and v such that

$$0<|u|=|v|<1,$$

let

$$f(u,v)=w.$$

We can determine the four constants λ, a, b, c, so also the form of the function $f(x, y)$ in terms of α, β, γ, u, v, w. We then assume that

$$a+bx+cy+xy\neq 0 \text{ for } |x|, |y|\geqq 1,$$

so that $f(x, y)$ is holomorphic in D and is of constant modulus $|\lambda|$ along the periphery $|x|=|y=1$.

Then we can conclude that, *under the condition that*

$$F(u, v)=w,$$

and

$$F(0, 0)=\alpha,\ F_x(0, 0)=\beta,\ F_y(0, 0)=\gamma,$$

a required extremal is the function f(x, y) *above mentioned, and the required smallest maximum modulus is* $|\lambda|$.

For, if the proposition is not true, then we have a function $F(x, y)$ satisfying our condition, for wich

$$|F(x, y)|<|\lambda| \text{ for } |x|, |y|\leqq 1.$$

If we put

$$F(x, y)-f(x, y)=\varphi(x, y),$$

then we have

$$\varphi(u, v)=0$$

and

$$\varphi(0, 0)=\varphi_x(0, 0)=\varphi_y(0, 0)=0,$$

and hence $\varphi(x, y)$ must have the form

$$\varphi(x, y)=x^2A(x, y)+xyB(y)+y^2C(y),$$

where A, B and C are regular in D.

If we put $v=\varepsilon u$, we have $|\varepsilon|=1$. Hence

$$\frac{1}{x^2}\varphi(x, \varepsilon x)=A(x, \varepsilon x)+\varepsilon B(\varepsilon x)+\varepsilon^2 C(\varepsilon x)$$

is regular for $|x|\leqq 1$ and becomes zero at the point $x=u$. Therefore, the change of the amplitude of $\varphi(x, y)$ is at least 6π, when x and y revolve arround $|x|=1$ and $|y|=1$ respectively, satisfying the relation $y=\varepsilon x$.

But we can easily see that the change of the amplitude of

$$f(x, y)=\lambda\frac{(c+x)\left(y+\dfrac{a+bx}{c+x}\right)}{\bar{a}xy+\bar{b}y+\bar{c}x+1}$$

is at most 4π in our revolution of x and y. Hence the amplitude of

$$\frac{\varphi(x, y)}{f(x, y)} = \frac{F(x, y)}{f(x, y)} - 1$$

must change at least as 2π.

On the other hand

$$\left|\frac{F(x, y)}{f(x, y)}\right| < 1 \text{ for } |x| = |y| = 1,$$

so tat the amplitude of the above function can not change by our revolution.

These two facts contradict each other. Hence our proposition must be true.

The discussion of this paragraph can be extended into the more complicated cases.

N. OBRECHKOFF (Sofija - Bulgaria)

SUR LA SOMMATION DE LA SÉRIE DE TAYLOR SUR LE CONTOUR DU DOMAINE DE SOMMABILITÉ PAR LES DIVERSES MÉTHODES

Soit $f(z)$ une fonction analytique, holomorphe autour de $z=0$ et donnée par la série de Taylor

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots \tag{1}$$

On sait que cette série est sommable par la méthode de M. BOREL dans un polygone G, et ne l'est pas en dehors de G. Nous démontrons la sommabilité de (1) sur le contour de G dans des cas assez étendus. Nous disons qu'un point singulier $a=re^{i\alpha}$ satisfait à la condition B_p s'il existe un $p\geqq 0$ tel que $f(z)$ étant holomorphe autour de a dans un angle

$$\alpha+\varepsilon\leqq \arg(z-a)\leqq \alpha+2\pi-\varepsilon,\quad \varepsilon>0,$$

$(z-a)^{p+1}f(z)$ tend uniformément vers zero avec $z-a$.

1. - I. *Soit Γ un côté du contour du polygone* G *qui passe par un point singulier* $a=re^{i\alpha}$ *satisfaisant à la condition* B_0; *soit* $z=Re^{i\varphi}$ *un point régulier sur Γ et qui n'est pas un sommet. La série* (1) *est sommable par la méthode de M. Borel pour* z *avec la somme* f(z).

On sait que sur le cercle K de diamètre $(0,z)$ il n'y a pas d'autres points singuliers que le point a. Soient K_1 une circonférence concentrique de K avec un rayon $R_1>\frac{R}{2}$ et C un contour fermé contenant l'origine et le point z et se composant des parties E et D. La partie E qui est autour du point a se compose des segments E_1, E_2, E_3 définis comme il suit: le segment E_1 est donné par $z-a=\varrho e^{i\psi}$, $\psi=\alpha-\varepsilon$ pour $0<\tau\leqq\varrho\leqq d$, $a+de^{i(\alpha-\varepsilon)}$ étant un point sur K_1; E_2 est donné par $\varrho=\tau$, $\varepsilon\leqq\psi-\alpha\leqq 2\pi-\varepsilon$ et enfin E_3 par $\tau\leqq\varrho\leqq d_1$, $\psi=\alpha+\varepsilon$, $a+de^{i(\alpha+\varepsilon)}$ étant un point sur K_1. La partie D est un arc de K_1 tel que

$$\alpha+\varepsilon\leqq\psi\leqq 2\pi+\alpha-\varepsilon.$$

Si l'on désigne

$$S_n=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n,$$

on obtient facilement

$$e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n}{n!}x^n=f(z)+\frac{z}{2\pi i}\int_C\frac{f(u)}{u(z-u)}e^{\left(\frac{z}{u}-1\right)x}du.$$

Soient i_1, i_2, i_3, j les intégrales de $\frac{f(u)}{u(z-u)}e^{\left(\frac{z}{u}-1\right)x}$ prises sur les courbes E_1, E_2, E_3, D. On démontre facilement que, sur E on a

$$R\left(\frac{z}{u}-1\right)<T|u-a|,$$

où $T>0$ et fini. Donc si $M(\tau)$ est le maximum de $|f(u)|$ sur E_2, $m>0$ étant le minimum de $|u|$, $|z-u|$, quand u décrit E, on aura

$$|i_2|<\frac{2\pi\tau M(\tau)}{m^2}e^{T\tau x},$$

et comme $\tau M(\tau)\to 0$ on aura, en posant $\tau=\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\infty} i_2=0$.

Soit $M(R_1)$ le maximum de $|f(u)|$ sur D. De l'inégalité

$$R\left(\frac{z}{u}-1\right)<-q, \quad q=\frac{2R_1-R}{2R_1+R}>0 \text{ sur } D$$

il s'ensuit

$$|j|<\frac{2\pi R_1 M(R_1)}{\left(R_1-\frac{R}{2}\right)^2}e^{-qx},$$

d'où $\lim_{x\to\infty} j=0$. Si nous posons $u-a=\varrho e^{i\psi}$, $g(\varrho)=|f(u)|$, on obtient facilement

$$R\left(\frac{z}{u}-1\right)<-C\varrho, \quad C>0 \text{ sur } E_1, \quad |i_1|<\frac{1}{m^2}\int_\tau^d e^{-C\varrho x}g(\varrho)d\varrho.$$

Nous pouvons prendre d ainsi que $\varrho g(\varrho)<\varepsilon$, $\varepsilon>0$ étant arbitrairement petit. Donc on aura

$$|i_1|<\frac{\varepsilon}{m^2}\int_\tau^d\frac{e^{-C\varrho x}}{\varrho}d\varrho<\frac{\varepsilon x}{m^2}\int_0^\infty e^{-C\varrho x}d\varrho=\frac{\varepsilon}{m^2 C},$$

ce qui achève la démonstration. On voit aussi que le théorème est valable aussi dans le cas où z est un sommet, si les points singuliers placés sur K satisfont à la condition B_0.

2. - D'après M. DOETSCH (1) une série $\sum a_n$ est (B, p) sommable avec la somme s si, $\frac{s_n^p}{A_n^p}$ étant les moyennes de Cesàro d'ordre p, $e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n^p}{A_n^p}\frac{x^n}{n!}$ tend vers s quand x tend vers l'infini.

II. *Soit Γ un côté du contour du polygone* G *qui passe par un point singulier satisfaisant à la condition* B_p, $p\geqq 0$; *soit* z *un point régulier sur Γ et qui n'est pas un sommet. La série* (1) *est sommable* (B, p) *pour* z *avec la somme* f(z).

---

(1) Doetsch-Inauguraldissertation, Göttingen 1920, et Mathematische Zeitschrift, 1, 1921, p. 161-179.

D'abord on a la proposition:

a) Soit le rayon de convergence de la série (1) égal à un. Alors si $f(z)$ a sur le cercle $|z|=1$ seulement des points singuliers satisfaisant à la condition B_p, $p \geqq 0$, on aura $a_n = o(n^p)$.

La démonstration est semblable à la démonstration des théorèmes I et II.

Nous en déduisons la formule asymptotique

$$T_n^p(z) = \sum_{\mu=0}^{n} A_{n-\mu}^p z^\mu = \left(\frac{z}{z-1}\right)^{p+1} z^n + \frac{A_n^p}{1-z} + o(n^p), \quad A_n^p = \binom{n+p}{n}, \quad |z-1| > \delta > 0.$$

En effet, si nous posons $u = \frac{z}{z-1}$, on obtient de l'identité

$$\frac{1}{(1-t)^{p+1}} \frac{1}{1-zt} = \frac{u^{p+1}}{1-zt} + \frac{1}{1-z} \frac{1}{(1-t)^{p+1}} \cdot \frac{u^{p+1}(1-t)^{p+1} - 1}{u(1-t) - 1},$$

en développant suivant les puissances de t

$$T_n^p = u^{p+1} z^n + \frac{A_n^p}{1-z} + \frac{\tau_n}{1-z},$$

où τ_n est le coefficient de t^n dans

$$\varphi(t) = \frac{u^{p+1}(1-t)^{p+1} - 1}{u(1-t) - 1} \cdot \frac{1}{(1-t)^{p+1}} - \frac{1}{(1-t)^{p+1}} = \frac{u[u^p(1-t)^p - 1]}{(1-t)^p[u(1-t) - 1]}.$$

La fonction $\varphi(t)$ a sur $|t|=1$ seulement le point 1 pour singulier, qui satisfait à la condition B_p, $p \geqq 0$. Donc d'après la proposition où d'après un théorème de Darboux, on aura $\tau_n = o(n^{p-1+\eta}) = o(n^p)$, $|z-1| \geqq \delta > 0$, $|u| \leqq \frac{1+\delta}{\delta}$.

Soit C un contour fermé contenant l'origine et le point z, dans lequel $f(z)$ est holomorphe. Si nous posons

$$s_n^p = \sum_{\mu=0}^{n} A_{n-\mu}^p a_\mu z^\mu$$

on aura

$$s_n^p = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{u} T_n^p\left(\frac{z}{u}\right) du.$$

Quand u décrit C on aura $|z-u| \geqq \delta > 0$, donc

$$T_n^p\left(\frac{z}{u}\right) = \left(\frac{z}{z-u}\right)^{p+1} \left(\frac{z}{u}\right)^n + \frac{A_n^p u}{u-z} + a_n, \quad a_n = o(n^p),$$

d'où vient

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n^p}{A_n^p} \frac{x^n}{n!} = \int_C f(u)\psi(u) g\left(\frac{zx}{u}\right) du + e^x f(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{A_n^p} \frac{x^n}{n!}, \quad m_n = o(n^p),$$

où

$$\psi(u) = \frac{1}{2\pi i u} \left(\frac{z}{z-u}\right)^{p+1}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!\, A_n^p}.$$

On démontre facilement que

$$g(x)=px^{-p}e^x\int_0^x e^{-t}t^{p-1}dt=\Gamma(p+1)x^{-p}e^x-\eta(x),$$

d'où l'integration peut être fait sur la ligne $|\arg t|<\frac{\pi}{2}$.

En effet si l'on pose $h(x)=\frac{x^p g(x)}{\Gamma(p+1)}$ on a $h'(x)=\frac{x^{p-1}}{\Gamma(p)}+h(x)$, d'où il suit le résultat ennoncé. En intégrant en partie, on obtient

$$\eta(x)=P\left(\frac{1}{x}\right)+p(p-1)\ldots(p-m)x^{-p}e^x\int_x^\infty e^{-t}t^{p-1-m}dt,\quad m>p,$$

où $P(x)$ est un polynome, donc $\lim_{|x|\to\infty}\eta(x)=0$.

De la formule (2) on obtient

$$e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n^p}{A_n^p}\frac{x^n}{n!}=f(z)+\frac{\Gamma(p+1)}{(zx)^p}\int_C f(u)\psi(u)e^{\left(\frac{z}{u}-1\right)x}du+$$

$$+e^{-x}\sum_0^\infty\frac{m_n}{A_n^p}\frac{x^n}{n!}-e^{-x}\int_C f(u)\psi(u)\eta\left(\frac{zx}{u}\right)du=A+B+C_1.$$

Puisque $m_n=o(n^p)$, $\frac{m_n}{A_n^p}=o(1)$ d'après un téorème connu de CESÀRO et M. APPELL on aura $\sum_0^\infty\frac{m_n}{A_n^p}\frac{x^n}{n!}=o(e^x)$, $\lim_{x\to\infty}B=0$.

Soit le contour C ainsi choisi que chez la démonstration du théorème I et soient q_1, q_2, q_3, s les intégrales de

$$\varphi(u)=\frac{\Gamma(p+1)}{z^p}f(u)\psi(u)e^{\left(\frac{z}{u}-1\right)x}$$

prises sur les courbes E_1, E_2, E_3, D. Si nous posons $u-a=\varrho e^{iv}$, $g(\varrho)=|f(u)|$ on aura

$$|q_1|<Mx^{-p}\int_\tau^d g(\varrho)d\varrho,\qquad M=\mathrm{Max}\left|\frac{\Gamma(p+1)\psi(u)}{z^p}\right|\ \text{sur } E.$$

Nous pouvons prendre d ainsi que $\varrho^{p+1}g(\varrho)<\varepsilon$, ε étant arbitrairement petit. Donc

$$|q_1|<M\varepsilon x^{-p}\int_\tau^d\frac{d\varrho}{\varrho^{p+1}}<M\varepsilon x^{-p}\int_{\frac{1}{x}}^\infty\frac{d\varrho}{\varrho^{p+1}}=\frac{M}{p}\varepsilon,\quad\lim_{x=\infty}q_1=0.$$

On a la même chose pour q_3. Si $m(\tau)$ est le maximum de $|f(u)|$ sur E_2 on aura

$$|q_2|<\frac{2\pi M\tau m(\tau)}{x^p}e^{T\tau x}=2\pi\tau^{p+1}m(\tau)Me^T$$

et parceque $\tau^{p+1}m(\tau)\to 0$, $\tau\to 0$, on aura $\lim_{x\to\infty}q_2=0$. On voit aussi que chez la démonstration de théorème I que s tend vers zéro. Parceque $\eta\left(\frac{zx}{u}\right)\to 0$ il suit tout de suite que $\lim_{x\to\infty}C_1=0$.

Si Γ passe par un pôle d'ordre p de $f(z)$ il suit du théorème II que la série (1) est sommable $(B, p-1+\varepsilon)$ pour chaque $\varepsilon>0$. M. DOETSCH [1] a démontré la sommabilité (B, p). Nous disons qu'un point singulier a satisfait à la condition $\overline{B}_p$ s'il existe un nombre $p \geqq 0$ tel que la fonction $f(z)$ étant holomorphe dans le domaine déjà cité, $(z-a)^{p+1}f(z)$ est uniformément borné.

III. *Soit Γ un côté du contour du polygone* G *qui passe par un point singulier satisfaisant à la condition* B_p, *et soit* z *un point régulier sur Γ qui n'est pas un sommet. La série* (1) *est* (B, p) *bornée.*

La démonstration est entièrement semblable.

3. - Considérons la sommation avec la méthode de MITTAG-LEFFLER [2] avec la fonction

$$E_\alpha(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\Gamma(\alpha n+1)}, \quad 2>\alpha>0$$

Soit G' le domaine $z=\varrho e^{i\varphi}$; $\varrho=\left(\cos\frac{\varphi}{\alpha}\right)^{-\alpha}$, $-\alpha\frac{\pi}{2}<\varphi<\alpha\frac{\pi}{2}$;

$$0\leqq\varrho\leqq\infty, \quad \alpha\frac{\pi}{2}\leqq\varphi\leqq 2\pi-\alpha\frac{\pi}{2}.$$

Si z_1, z_2,.... sont les points singuliers de $f(z)$, le domaine de la sommabilité de la série (1) est la région G_α commune des z_1G', z_2G',....

IV. *Soit Γ un arc du contour de* G_α *qui passe par un point singulier satisfaisant à la condition* B_0 *et soit* z *un point sur Γ qui n'est pas un sommet. La série* (1) *est sommable par la méthode de Mittag-Leffler pour* z *avec la somme* f(z).

On voit de la démonstration des théorèmes que dans la condition B_p on peut changer l'angle $\alpha+\varepsilon\leqq\arg(z-a)\leqq 2\pi+\alpha-\varepsilon$ par l'angle

$$\alpha+\beta+\varepsilon\leqq\arg(z-a)\leqq 2\pi+\alpha-\gamma-\varepsilon, \quad 0\leqq\beta<\frac{\pi}{2}, \quad 0\leqq\gamma<\frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon>0$$

et arbitrairement petit.

On démontre aussi des théorèmes par la sommation

$$\frac{1}{E_\alpha(x)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n^p}{A_n^p}\frac{x^n}{\Gamma(n\alpha+1)}.$$

---

[1] DOETSCH, Mathematische Annalen, 84 (1921), s. 245-251.

[2] G. MITTAG-LEFFLER, Acta Mathematica, 29 (1905), p. 101-182.

P. J. MYRBERG (Helsinki - Finlandia)

ÜBER DISKONTINUIERLICHE GRUPPEN UND AUTOMORPHE FUNKTIONEN VON MEHREREN VARIABELN

Wir werden im Folgenden unter automorphe Funktionen eindeutige analytische Funktionen der n komplexen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verstehen, die in bezug auf irgend eine Gruppe biuniformer Transformation

$$S_k: \qquad x_\nu' = f_\nu^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

invariant sind.

Im Falle einer Variablen reduzieren sich bekanntlich jene Transformationen auf lineare. Es gilt in diesem Falle der einfache Satz, dass jede in der komplexen Ebene eigentlich diskontinuierliche Gruppe automorphe Funktionen besitzt, deren Existenzbereich mit dem Bereich der eigentlichen Diskontinuität der Gruppe zusammenfällt. Dies findet nicht im Allgemeinen statt, wenn die Anzahl der Variablen grösser als Eins ist. Um eine Analogie zwischen den beiden Fällen herzustellen, habe ich einen neuen Begriff eingeführt, den Begriff des *Normalbereichs* der Gruppe, den ich in folgender Weise definiere.

Es sei Γ eine unendliche Gruppe biuniformer Transformationen. Wir sagen, dass Γ im Raum der Variablen (x) *normal* ist, wenn es dort Punkte gibt, in deren Umgebung die Funktionen $f_\nu^{(k)}$ meromorph sind und eine Normalfamilie in dem von MONTEL definierten Sinne bilden. Die Menge D der genannten Punkte, die aus einer abzählbaren Menge $2n$-dimensionaler Bereiche besteht, werden wir *Normalbereich* der Gruppe nennen. Derselbe ist offenbar in bezug auf die Substitutionen der Gruppe invariant.

Für die normalen Gruppen gilt nun der fundamentale Satz, dass jede derselben in irgendeinem Teilbereich D' von D eigentlich diskontinuierlich ist, sobald die Gruppe keine infinitesimale Substitution in D' enthält. Die Normalität und die eigentliche Diskontinuität sind für $n=1$ identische Begriffe, nicht aber fur $n>1$.

Eine hinreichende Bedingung für die Normalität der Gruppe erhält man, wenn man voraussetzt dass die Funktionen $f_\nu^{(k)}$, wenigstens nach Ausführung eines geeigneten biuniformen Transformation, bis auf endlich viele derselben, in einem gewissen Bereich Δ beschränkt sind. Dies ist u. A. stets dann der Fall, wenn es einen in bezug auf sämtliche Substitutionen der Gruppe invarianten endlichen Raum Δ gibt. Durch diese Bemerkung wird die Normalität und somit

a fortiori die eigentliche Diskontinuität der wichtigsten bekannten Gruppen, wie der fuchsschen, hyperfuchsschen und hyperabelschen unmittelbar in Evidenz gebracht.

Betrachten wir insbesondere den einfachsten Fall, die Gruppen linearer Substitutionen.

Es sei $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zuerst eine reelle Form mit nichtverschwindender Diskriminante. Wir bilden die Gesamtheit der reellen Tangentenhyperebenen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} = 0$$

des Gebildes $\varphi = 0$ und wir setzen voraus, dass die Punkte jener Hyperebenen den ganzen $2n$-dimensionalen Raum (x) nicht ausfüllen. Die ausserhalb der Hyperebenen liegenden Punkte bilden dann einen oder mehrere Bereiche, in denen jede Gruppe reeller linearer Substitutionen, die das Gebilde $\varphi = 0$ invariant lassen, normal ist. Solche Bereiche gibt es z. B. bei den reellen quadratischen Formen dann, wenn das Trägheitsindex derselben gleich Eins oder Zwei ist. Wir bemerken noch, dass das Obige auch für komplexe Gruppen gültig ist vorausgesetzt, dass φ durch eine Hermitesche Form ersetzt wird (1).

Zur funktionentheoretischen Seite unserer Darstellung übergehend werden wir im Folgenden in aller Kürze die Frage nach der Existenz automorpher Funktionen bei unseren diskontinuierlichen Normalgruppen behandeln. Der Poincaréschen Methode folgend denken wir uns die automorphen Funktionen als Quotienten zweier Θ-Reihen dargestellt. Zur Konvergenz dieser Reihen hat FUBINI zwei Bedingungen aufgestellt, die hauptsächlich Folgendes enthalten:

1° Es soll einen Bereich Δ geben, dessen Transformierte, bis auf endlich viele derselben, im Endlichen liegen und 2° die Werte der Jacobischen Determinante der Funktionen $f_\nu^{(k)}$ sollen in zwei beliebig genommenen Punkten von Δ Verhältnisse haben, die eine endliche obere und von Null verschiedene untere Grenze besitzen.

Was nun die letztere Bedingung betrifft, so ist dieselbe im Falle einer Variablen wegen des Verzerrungssatzes stets erfüllt. Dies ist aber nicht der Fall für mehrere Variablen, weil es hier kein Analogon des Verzerrungssatzes gibt (2) Anders verhält es sich aber, wenn man sich auf spezielle Funktionenklassen beschränkt. In meinen hiergehörigen Untersuchungen bin ich zu dem Resultat gelangt, dass die zweite Fubinische Bedingung bei allen linearen Gruppen und allgemeinen bei allen Gruppen Cremonascher Transformationen beschränkten Grades, die einen Normalbereich haben, ohne weiteres erfüllt ist.

---

(1) P. J. MYRBERG. *Untersuchungen über die automorphen Funktionen beliebig vieler Variablen.* (Acta Mathematica, Bd. 46 (1925) S. 215-336).

(2) Vgl. Z. B. die Cremonasche Transformation $x' = x$, $y' = x^n y$, wo n eine ganze Zahl ist.

Hinsichtlich der ersten Bedingung bemerken wir hier nur, das dieselbe bei den linearen Gruppen äquivalent mit der Forderung ist, dass eben der Gruppe auch die im projektiven Sinne korrelative Gruppe im zugeordneten Raum normal sein soll. Dass die Normalität der Gruppe allein zur Existenz der automorphen Funktionen im Allgemeinen nicht hinreichend ist, das zeigt uns schon das klassische Beispiel der Abelschen Funktionen.

Welches ist nun der Zusammenhang zwischen dem Normalbereich der Gruppe und dem Existenzbereich der zugeordneten automorphen Funktionen? Man kann zeigen, dass im Allgemeinen jeder Randpunkt des Normalbereichs eine wesentlich singuläre Stelle für die vermittels der Poincaréschen Reihen gebildeten Transzendenten ist. Es gibt sehr allgemeine Klassen diskontinuierlicher Normalgruppen, deren automorphe Funktionen innerhalb des zugeordneten Normalbereichs meromorph sind, bei welchen also der Existenzbereich der Funktionen mit dem entsprechenden Normalbereich zusammenfällt. Man kann hier von automorphen Funktionen mit festen wesentlichen Singuläritäten sprechen, während in den übrigen Fällen dazu noch bewegliche Singuläritäten im Inneren des Normalbereichs vorhanden sind.

Zum Schluss noch eine Bemerkung! Bekanntlich lässt sich jede automorphe Funktion einer Variablen im Allgemeinen als Quotient zweier Poincarescher Reihen darstellen. Entsprechendes gilt nicht mehr für Funktionen mehrerer Variablen. Es entsteht bei dieser Sachlage die Frage, in wie fern der im Vorigen angegebene Zusammenhang zwischen dem Normalbereich und den automorphen Funktionen von jeder analytischen Darstellung unabhängig für die allgemeinsten automorphen Funktionen stattfindet. Dass dies wirklich der Fall ist, habe ich für zwei Variablen wenigstens in sehr allgemeinen Fallen nachgewiesen können. Es erübrigt aber noch die Frage bei grösseren Variablenzahl zu entledigen.

H. RADEMACHER (Breslau - Germania)

ZUR THEORIE DER MODULFUNKTIONEN

Die Funktion

$$f(x)=\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m) \tag{1}$$

ist für $|x|<1$ regulär und frei von Nullstellen. Setzen wir $\log f(0)=0$ fest, so ist $\log f(x)$ im Einheitskreise als reguläre eindeutige Funktion bestimmt:

$$g(x)=-\log f(x)=-\sum_{m=1}^{\infty}\log(1-x^m)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{mn}.$$

Um $g(x)$ in der Nähe rationaler Teilpunkte des Einheitskreises zu untersuchen, setzen wir

$$x=e^{-\frac{2\pi z}{k}+\frac{2\pi i h}{k}}, \qquad (h,k)=1,\ R(z)>0.$$

Dann ist

$$g(x)=g\left(e^{-\frac{2\pi z}{k}+\frac{2\pi i h}{k}}\right)=\sum_{m,n}\frac{1}{n}e^{\left(-\frac{2\pi z}{k}+\frac{2\pi i h}{k}\right)mn}.$$

Indem man bedenkt, daß im Exponenten m und n nur mod k in Frage kommen' erhält man nach Anwendung der bekannten MELLINschen Formel die Gleichung

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\substack{\mu=1,\dots k\\ \nu=1,\dots k}} e^{\frac{2\pi i h\mu\nu}{k}}\int_{\frac{3}{2}-i\infty}^{\frac{3}{2}+i\infty}\frac{\Gamma(s)}{(2\pi z)^s}\zeta\left(s,\frac{\mu}{k}\right)\zeta\left(1+s,\frac{\nu}{k}\right)\frac{ds}{k^{1+s}}$$

mit

$$\zeta(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s}, \qquad 0<a\leqq 1.$$

Diese verallgemeinerten ζ-Funktionen lassen sich bekanntlich in die ganze s-Ebene eindeutig fortsetzen. Wichtig sind für das Folgende der Wert $\zeta(0,a)=\frac{1}{2}-a$ und die Regularität von $\zeta(s,a)-\frac{1}{s-1}$ in der ganzen s-Ebene. Mit Hilfe einer von

HURWITZ (1) aufgestellten Funktionalgleichung für die $\zeta(s, a)$ gelangt man zu

$$g(x) = -\log f\left(e^{2\pi i\frac{iz+h}{k}}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi i k^2}\sum_{\lambda,\mu,\nu}^{1,\dots k} \cos\frac{2\pi h\mu\nu}{k}\cos\frac{2\pi\lambda\mu}{k}\int_{\frac{3}{2}-i\infty}^{\frac{3}{2}+i\infty}\frac{\zeta\left(1+s,\frac{\nu}{k}\right)\zeta\left(1-s,\frac{\lambda}{k}\right)}{2z^s\cos\frac{\pi s}{2}}ds$$
$$+\frac{1}{2\pi k^2}\sum_{\lambda,\mu,\nu}^{1,\dots k}\sin\frac{2\pi h\mu\nu}{k}\sin\frac{2\pi\lambda\mu}{k}\int_{\frac{3}{2}-i\infty}^{\frac{3}{2}+i\infty}\frac{\zeta\left(1+s,\frac{\nu}{k}\right)\zeta\left(1-s,\frac{\lambda}{k}\right)}{2z^s\sin\frac{\pi s}{2}}ds.$$

Ersetzen wir in dieser Formel s durch $-s$, μ durch $h'\mu$, wo h' als eine Lösung von $hh' \equiv -1 \bmod k$ fest gewählt sei, so geht diese Formel in eine ganz analog gebaute über, die aus jener auch durch die simultane Ersetzung von z durch z^{-1} und von h durch h' gewonnen werden kann, mit dem einzigen Unterschiede, daß hierbei der Integrationsweg nicht verändert wird, während er bei der Ersetzung von s durch $-s$ die Verschiebung von $\sigma = \frac{3}{2}$ auf $\sigma = -\frac{3}{2}$ erleidet. Schiebt man den Integrationsweg zurück auf $\sigma = \frac{3}{2}$, so treten Residuen R auf, so daß man erhält

$$-\log f\left(e^{2\pi i\frac{iz+h}{k}}\right) = -\log f\left(e^{2\pi i\frac{iz^{-1}+h'}{k}}\right) + R,$$
$$R = \frac{\pi}{12k}\left(z-\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{2}\log z - i\pi\sum_{r=1}^{k-1}\frac{r}{k}\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right), \tag{2}$$
$$-\pi < J(\log z) < \pi,$$

worin das Symbol $((x))$ für reelle Zahlen x durch die Gleichung

$$((x)) = x - [x] - \frac{1}{2} \tag{3}$$

definiert sein soll (2). Die in (2) auftretende Summe

$$s(h, k) = \sum_{r=1}^{k-1}\frac{r}{k}\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right)$$

hat die merkwürdige Eigenschaft

$$12s(h, k) + 12s(k, h) = -3 + \frac{h}{k} + \frac{k}{h} + \frac{1}{hk} \quad (3). \tag{4}$$

Ein Beweis dieser Formel gelingt einerseits nach DEDEKIND durch geeignete

---

(1) Zeitschrift für Math. u. Physik, Bd 27 (1882), S. 95.

(2) $[x]$ dedeutet wie üblich die größte ganze Zahl $\leqq x$.

(3) R. DEDEKIND, *Erläuterungen in Riemanns Werken*, S. 438-447, insbesondere S. 442 und 446. Ferner R. Dedekind, Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Crelles Journal, Bd 83 (1877) S. 286.

Anwendung von (2) auf sich selbst, anderseits auch direkt arithmetisch. Eine Gitterpunktsabzählung führt nämlich (4) in die ihrerseits leicht beweisbare Formel

$$12\sum_{q=1}^{hk-1}\left[\frac{q}{h}\right]\left[\frac{q}{k}\right]=(h-1)(k-1)(4hk+h+k+1)$$

über.

Zu den Modulsubstitutionen gelangt man nun, indem man in (2)

$$\frac{iz+h}{k}=\tau,\quad \frac{iz^{-1}+h'}{k}=\tau'$$

mit $J(\tau)>0$ setzt. Dann geht τ' aus τ durch die Modulsubstitution

$$\tau'=\frac{h'\tau+\dfrac{hh'+1}{k}}{k\tau-h} \tag{5}$$

hervor.

Führt man mit DEDEKIND die Funktion

$$\eta(\tau)=e^{\frac{\pi i\tau}{12}}\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i m\tau}) \tag{6}$$

ein und schreibt statt (5) kurz die Modulsubstitution

$$\tau'=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \tag{5a}$$

so hat man statt (2), zunächst für $c\neq 0$:

$$\log\eta(\tau')=\log\eta(\tau)+\frac{1}{2}\log(c\tau+d)-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sign}c+\frac{\pi i}{12}\Phi\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \tag{7a}$$

$$-\pi<J(\log(c\tau+d))<\pi,$$

(1)

was nach (6) auch noch für $c=0$, $d=+1$ gültig bleibt. Darin ist die Abkürzung gebraucht

$$\Phi\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{cases}\dfrac{b}{d} & \text{für } c=0\\[2ex] \dfrac{a+d}{c}-12\operatorname{sign}c\cdot s(d,|c|) & \text{für } c\neq 0.\end{cases} \tag{7b}$$

Setzt man zwei Modulsubstitutionen zusammen

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{12} & b_{12}\\ c_{12} & d_{12}\end{pmatrix}, \tag{8a}$$

so gilt für das Symbol Φ wegen (4) die Kompositionsregel:

$$\Phi\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}+\Phi\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}=\Phi\begin{pmatrix}a_{12} & b_{12}\\ c_{12} & d_{12}\end{pmatrix}+3\operatorname{sign}c_1c_2c_{12}. \tag{8b}$$

---

(1) Hierin ist $\operatorname{sign}x=\dfrac{x}{|x|}$ für reelle von Null verschiedene x und $\operatorname{sign}x=0$ für $x=0$ gemeint.

Neben $\eta(\tau)$ werde nun noch $\eta(n\tau)$ für ganzes n betrachtet. Indem man (5a) umformt in

$$n\tau' = \frac{a \cdot n\tau + bn}{\frac{c}{n} \cdot n\tau + d}, \tag{9}$$

erhält man eine Transformation von $n\tau$ in $n\tau'$, die für $c \equiv 0 \bmod n$ gleichfalls eine Modulsubstitution ist. Die Modulsubstitutionen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft $c \equiv 0 \bmod n$ bilden eine Untergruppe $\mathfrak{M}_n$ (« Kongruenzuntergruppe n-ter Stufe ») innerhalb der vollen Modulgruppe $\mathfrak{M}$.

Für diese Untergruppe gilt dann nach (7a)

$$\log \frac{\eta(n\tau')}{\eta(\tau')} = \log \frac{\eta(n\tau)}{\eta(\tau)} + \frac{\pi i}{12} \left\{ \Phi\begin{pmatrix} a & bn \\ \frac{c}{n} & d \end{pmatrix} - \Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}. \tag{10}$$

Für die zahlentheoretische Funktion

$$\Psi_n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} a & bn \\ \frac{c}{n} & d \end{pmatrix} - \Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{11}$$

gilt wegen (8b) die Kompositionsregel

$$\Psi_n\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \Psi_n\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \equiv \Psi_n\begin{pmatrix} a_{12} & b_{12} \\ c_{12} & d_{12} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Es lässt sich zeigen, dass Φ und Ψ_n stets ganze Zahlen sind, woraus unter anderm folgt, dass $\left(\frac{\eta(n\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{24}$ eine Invariante der betrachteten Kongruenzuntergruppe $\mathfrak{M}_n$ n ter Stufe ist.

Die Invarianzgruppe $\mathfrak{L}_n$ von $\log \frac{\eta(n\tau)}{\eta(\tau)}$ bildet eine Untergruppe von unendlichem Index innerhalb $\mathfrak{M}_n$. Um $\mathfrak{L}_n$ zu charakterisieren, heben wir zunächst hervor, dass wegen (12) die Ψ_n eine Abelsche Gruppe bilden, die zu $\mathfrak{M}_n$ isomorph ist. Die Gruppe der Ψ_n ist also einstufig isomorph mit einer Abelschen Faktorgruppe von $\mathfrak{M}_n$. Der diese Faktorgruppe erzeugende Normalteiler ist $\mathfrak{L}_n$; Folglich muss $\mathfrak{L}_n$ stets die Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_n$ von $\mathfrak{M}_n$ als Untergruppe enthalten.

Zur rechnerischen Bestimmung der Gruppen $\mathfrak{L}_n$ geht man am besten von der Aufstellung von (endlich vielen) Erzeugenden von $\mathfrak{M}_n$ aus. Solche Erzeugende findet man auch ohne Umweg über die Diskussion der Fundamentalpolygone auf Grund einer von Herrn REIDEMEISTER (1) angegebenen und von Herrn SCHREIER (2) ausgebauten Methode. Für Primzahlen n gestalten sich diese Rechnungen am leichtesten. Es stellt sich heraus, dass für $n = 2, 3, 5, 7, 11, 13$

---

(1) *Knoten und Gruppen*, Abhandlungen aus dem Hamburger Mathematischen Seminar, Bd 5 (1927), S. 7-23, insbesondere § 1.

(2) *Die Untergruppen der freien Gruppen*, ibid., Bd 5, S. 161-183, insbesondere § 3.

die Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_n$ in $\mathfrak{L}_n$ als Untergruppe bezw. mit den Indizes 2, 3, 4, 9, ∞, 36 enthalten ist. Für grössere primzahlige n ist der Indèx von $\mathfrak{C}_n$ in Bezug auf $\mathfrak{L}_n$ stets ∞.

Es dürfte auch an sich von Interesse sein, dass man durch die vorgetragenen Untersuchung von $\log \frac{\eta(n\tau)}{\eta(\tau)}$ Untergruppen der Modulgruppe kennen lernt, die bisher nicht diskutiert worden sind.

A. OSTROWSKI (Basel - Svizzera)

ANWENDUNGEN EINER LINDELÖFSCHEN TRANSFORMATION

Viele funktionentheoretische Abschätzungen beziehen sich ursprünglich auf ein System konzentrischer Kreise. Um sie auf beliebige Gebiete zu übertragen, kann man die Weierstrasssche Methode der Kreisketten benutzen, doch ergeben sich dabei oft wenig günstige Abschätzungen. Für Kreise von grosser relativer Breite gestattet nun die Benutzung der von Lindelöf zum Beweis des allgemeinen Picardschen Satzes verwendeten Abbildung $z = e^y$ auf einen Parallelstreifen oft bemerkenswert scharfe Abschätzungen zu erhalten. Zwei hierher gehörige Sätze aus dem Picardschen Ideenkreis sollen besprochen werden.

S. MANDELBROJT (Lille - Francia)

SUR LES SINGULARITÉS DES SÉRIES DE DIRICHLET

Considérons une série de Dirichlet

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s}, \qquad (s=\sigma+it)$$

avec $n<\lambda_n\leqslant n+1$ et soit $T(s)$ la fonction analytique représentée par cette série.

Considérons, d'autre part, la fonction $\psi(s)$ représentée par la série

$$\sum b_n e^{-\lambda_n s} \qquad (b_n\neq 0)$$

dont l'ensemble E de singularité est supposé connu et qui possède la propriété suivante:

Il existe un entier $k>0$ et un nombre réel μ inférieur à l'axe de convergence de cette dernière série, tels que quel que soit $\varepsilon>0$ on a dans la partie du demi plan $\sigma>\mu$ où on a exclu les cercles de rayons ε autour de tout point de E,

$$|\psi(s)|<M_\varepsilon t^{k-\varepsilon}$$

M_ε ne dépendant que de ε.

Posons, d'une part:

$$F(z)=\sum\frac{a_n}{b_n}z^n=\sum c_n z^n$$

$$f_1(z)=\sum\lambda_n z^n$$

. . . . . .

. . . . . .

$$f_l(z)=\sum\lambda_n^l z^n$$

. . . . . .

. . . . . .

$$f_k(z)=\sum\lambda_n^k z^n$$

et d'autre part:

$$a_q^q=1 \qquad (q=1, 2,\ldots k)$$

$$a_{q-t}^q=\sum_{r=t+1}^{q}(r-t)a_{r-t}^{r-1} \qquad q>t,\ r>t>0.$$

Considérons alors l'équation intégro-différentielle

$$(1)\quad \frac{2\pi i}{k!}\int \frac{1}{z(1-z)}\Big\{ f_k\Big(\frac{x}{z}\Big)\varphi(z) - kf_{k-1}\Big(\frac{x}{z}\Big)\varphi'(z) \dots + C_k^{k-l}(-1)^l f_{k-l}\Big(\frac{x}{z}\Big)[a_l^l z^l \varphi_{(z)}^{(l)}$$
$$+ a_{l-1}^l z^{l-1}\varphi^{(l-1)}(z) \dots + a_1^l z\varphi'(z)] \dots + (-1)^k[a_k^k z^k \varphi^{(k)}(z) \dots + a_1^k z\varphi'(z)]\Big\} dz = F(x);$$
$$\Big(C_k^{k-l} = \frac{k(k-1)\dots(k-l+1)}{l!}\Big)$$

l'intégrale étant étendue sur un cercle de rayon assez petit autour de l'origine, la fonction inconnue étant $\varphi(z)$.

On peut démontrer que $T(s)$ ne possède pas dans le demi-plan $\sigma > \mu$ d'autres points singuliers que ceux de la forme $\alpha+\beta$ et α et leurs points limites, où α est un point quelconque de l'ensemble connu E et où $\beta = -\log\gamma + 2k\pi i$ où γ est un point singulier quelconque de $\varphi(z)$.

L'équation (1) est de la forme

$$(2)\quad \int \sum_{i=0}^{k-1}\Big\{ f_{k-i}\Big(\frac{x}{z}\Big)\sum_{\varrho=0}^{i} R_\varrho^i(z)\varphi^{(\varrho)}(z)\Big\} dz = F(x)$$

où les $R_\varrho^i(z)$ sont des fonctions rationnelles connues et où $\varphi(z)$ est l'inconnue.

Or, l'égalité de Parseval qui sert à la démonstration du théorème bien connu de M. HADAMARD sur la multiplication des singularités de deux séries de Taylor est bien un cas très particulier de l'égalité (2) où $\varphi(z)$ et $f_1(z)$ sent les deux fonctions qu'uon compose et où

$$(3)\quad F(z) = H(\varphi(z), f_1(z))$$

dans ce cas $k=1$, $R_0^0(z) = \frac{1}{2\pi i z}$.

Différents auteurs ont étudié le cas où $f_1(z)$ n'admettant que le point *un* comme point singulier sur le cercle de convergence quelles que soient les fonctions $F(z)$ et $\varphi(z)$ liées par (3) elles admettent le même ensemble de points singuliers sur le cercle de convergence (qui est le même pour ces deux séries).

M. SOULA par exemple appelle alors le point *un* « singulier principal » de $f_1(z)$.

Nous appellerons ce « point singulier principal » de $f_1(z)$ par rapport à la fonction $R_0^0 = \frac{1}{2\pi i z}$.

En général, nous dirons que le point *un* est « singulier principal » de $f_1(z)$ par rapport à l'ensemble des fonctions $R_i^j (i \leqslant j\,;\, j = 1,\dots k)$ si ce point est le seul point singulier sur le cercle de convergence de $f_1(z)$ et si, quelles que soient les fonctions $\varphi(z)$ et $F(z)$ liées par (2) elles possèdent sur leur cercle de convergence commun le même ensemble de points singuliers.

On peut facilement construire des fonctions $f_1(z)$ admettant le point *un* comme « singulier principal » par rapport à l'ensemble $R_i^j(z)$ de fonctions rationnelles données; une telle fonction est, par exemple $f_1(z) = \sum_n Q\left(\frac{1}{n}\right)z^n$ où $Q(x)$ est un polynome, ou $f_1(z) = \sum\Big[Q\Big(\frac{1}{n}\Big) + P_1(n)\Big]z^n$ où P_1 est aussi un polynome.

Dans ce dernier cas d'ailleurs l'équation (2) devient une équation différentielle.

Du théorême énoncé plus haut, il résulte que:

Si *un* est un point « singulier principal » de $f_1(z)$ par rapport à l'ensemble $R_i^j(z)$ où

$$R_\varrho^i(z)=\frac{a_\varrho^i z^{\varrho-1}}{(1-z)},$$

(où les $a_\varrho^i(\varrho\leqslant i)$ sont des constantes qu'on obtient en identifiant (1) et (2)), la fonction $T(s)$ n'a pas sur son axe de convergence d'autres points suinguliers que ceux de la forme $\alpha+\beta$ ou α et leurs polnts limites où α est un point de l'ensemble connu E et où $\beta=-\log\delta+2k\pi i$ où δ est un point singulier quelconque de $F(z)$.

C'est un exemple où l'on arrive à séparer les influences d'une part de la suite λ_n et, d'autre part, de la suite a_n sur les singularités de $T(s)$.

Des résultats plus généraux sont établis dans mes Mémoires que je ferai paraître bientôt dont un au Bulletin de la Société Mathématique de France et l'autre aux Acta Mathématica.

M. PLANCHEREL (Zürich - Svizzera)

SUR LES VALEURS ASYMPTOTIQUES DES POLYNOMES D'HERMITE

L'étude du développement d'une fonction arbitraire en série de polynomes d'Hermite

$$H_n(x)=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

conduit naturellement à rechercher des expressions asymptotiques de ces polynomes pour les grandes valeurs de x et de n. Les résultats obtenus jusqu'à ce jour sont fragmentaires. L'auteur, en collaboration avec M. ROTACH, a obtenu des résultats complets, embrassant tous les cas (1). La méthode employée, celle du col, part de la représentation

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}H_{n-1}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{-\frac{z^2}{2}-zx}}{z^n}\,dz$$

où l'intégrale est à prendre le long d'un lacet positif autour de $z=0$. x est supposé réel positif. La relation $H_n(-x)=(-1)^n H_n(x)$ ramène à ce cas le cas de x négatif.

Trois cas sont à distinguer, selon que $\frac{x^2}{4n}$ est petit, grand ou voisin de l'unité. Dans ce qui suit $a_{\mu\nu}$ désigne le coefficient de x^μ dans le développement en série de $\frac{1}{\nu!}\left(\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}x^{k-2}\right)^\nu$ et k un entier positif quelconque.

I. $\frac{x^2}{4n}<1\cdot\frac{x}{2\sqrt{n}}=\cos\psi,\ 0<\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$

$$H_{n-1}(x)=\frac{(n-1)!}{\sqrt{\pi}\,n^{\frac{n}{2}}}\frac{e^{\frac{n}{2}+\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{\sin\psi}}\left[\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{\mu}\frac{1+(-1)^\mu}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{\mu+2\nu-1}{2}\frac{a_{\mu\nu}}{n^{\frac{\mu}{2}}(\sin\psi)^{\nu+\frac{\mu}{2}}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sin\left\{n\left(\psi-\frac{1}{2}\sin 2\psi\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right)-(2\nu+\mu)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)\right\}+0\left((n\sin^3\psi)^{-\frac{k}{2}}\right)\right].$$

(1) Voir le mémoire paru depuis dans les *Commentarii mathematici helvetici*, 1 (1929), p. 227-254.

II. $\frac{x^2}{4n} > 1 \cdot \frac{x}{2\sqrt{n}} = \operatorname{ch}\psi,\ 0 < \psi < \infty$

$$H_{n-1}(x) = \frac{(n-1)!}{2\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}} \frac{\sqrt{n}}{\left(1-\sqrt{1-\frac{4n}{x^2}}\right)^n \sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4n}{x^2}}}} \cdot \frac{e^{\frac{n}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{4}\sqrt{1-\frac{4n}{x^2}}}}{\sqrt[4]{1-\frac{4n}{x^2}}} \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{1+(-1)^\mu}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{\mu+2\nu-1}{2} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{(-1)^{\nu+\frac{\mu}{2}}}{n^{\frac{\mu}{2}} [sh\psi(ch\psi - sh\psi)]^{\nu+\frac{\mu}{2}}} + 0([nsh^3\psi(ch\psi - sh\psi)^3]^{-\frac{k}{2}}) \right]$$

III. $\frac{x^2}{4n} \sim 1.\ t = -\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\left(1-\frac{4n}{x^2}\right)$

$$H_{n-1}(x) = \frac{(n-1)!\, e^{\frac{3x^2}{8}}}{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{n-\frac{1}{3}}} [A_0(x) + A_1(x)t + A_2(x)t^2 + \ldots.]$$

$$A_k(x) = \frac{3^{\frac{k-2}{3}}\Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right)}{k!} \cdot \sin\frac{(k+1)\pi}{3} + 0\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right).$$

Les formules des cas I et II se raccordent à celle du cas III.

U. BROGGI (Milano - Italia)

SU DI UNA CLASSE DI SVILUPPI IN SERIE DI POLINOMI DI HERMITE

$f(r)=a_r$ sia una funzione reale della variabile intera $r(r=0,\pm 1,\pm 2,...)$.

Se l'insieme $b_r=a_r e^{-kr^2}$, $\left(0\leqslant k<\frac{1}{2}\right)$, è limitato, si possono formare infinite funzioni intere $F(z)$ tali che, se

$$H_n(x)=e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \quad H_0(x)=1, \qquad (n=0,\ 1,\ 2,....)$$

$$2^n\cdot\sqrt{\pi}\cdot n!\,c_n=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-x^2}H_n(x)dx$$

la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n H_n(r)e^{-r^2}$$

converge uniformemente verso $e^{-r^2}a_r$ in $-\infty<r<\infty$ (e tale quindi che

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty}c_n H_n(r)$$

converge uniformemente verso a_r in ogni intervallo finito).

1. - Sia $|b_r|<M$

$$\Delta b_r=b_{r+1}-b_r, \quad \nabla b_r=\frac{b_r+b_{r+1}}{2}$$

$$\overset{s}{\Delta} b_r=\Delta(\overset{s-1}{\Delta} b_r)=\sum_{k=0}^{s}(-1)^{s-k}\binom{s}{k}b_{r+k}.$$

È

$$|\overset{s}{\Delta} b_r|\leqslant 2^s M$$

$$|\nabla\overset{s}{\Delta} b_r|\leqslant 2^s M$$

e le serie

$$\sum_{s=0}^{\infty}|z^2(z^2-1^2)....(z^2-(s-1)^2)|\frac{2^{2s}}{(2s)!}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}|z(z^2-1^2)....(z^2-s^2)|\frac{2^{2s+1}}{(2s+1)!}$$

convergono: ove si indichi infatti con n_s il loro termine generale è per entrambe

$$\lim s\left(\frac{n_s}{n_{s+1}}-1\right)=\infty .$$

Converge la serie di STIRLING

$$(2)\qquad \sum_{s=0}^{\infty}\frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-(s-1)^2)}{(2s)!}\,{}^{2s}\Delta b_{-s}-\sum_{s=0}^{\infty}\frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-s^2)}{(2s+1)!}\,\nabla\,{}^{2s+1}\Delta\, b_{-s-1}$$

e definisce pertanto (1) una funzione intera $\varphi(z)$, uguale a b_r se $z=r$, di ordine $\varrho\leqslant 1$.

Tale cioè che, se

$$\varphi(z)=\gamma_0+\gamma_1 z+\ldots .$$

e, a partire di un certo valore di n

$$|\gamma_n|\leqslant\frac{1}{(n!)^{\alpha}}$$

non solo, per un noto teorema di HADAMARD

$$\limsup \alpha=\frac{1}{\varrho}$$

ma anche

$$|(n+1)\gamma_{n+1}|\leqslant\frac{1}{(n!)^{\alpha}}$$

l'ordine di $\varphi'(z)$ è al più uguale a ϱ. L'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\left[-\frac{d(e^{kx^2}\varphi(x))}{dx}+2xe^{kx^2}\varphi(x)\right]^2dx$$

converge, e la serie

$$\sum e^{-x^2}c_nH_n(x)$$

converge uniformemente verso $e^{-x^2}F(x)$ in $-\infty<x<\infty$, se

$$F(x)=e^{+kx^2}\varphi(x).$$

Perchè una funzione $\psi(x)$, della variabile reale x sia sviluppabile in serie di polinomi di HERMITE è infatti sufficente che

$$\psi(x)=0(e^{\lambda x^2}),\quad \lambda<1,$$

che per ogni valore di x

$$\psi(x)=\psi(0)+\int_0^x\psi'(x)dx$$

e che converga l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}[-\psi'(x)+2x\psi(x)]^2dx\ (2).$$

---

(1) Cfr. N. E. NÖRLUND, *Leçon sur les séries d'interpolation*, Paris 1926, pag. 33.

(2) Cfr. M. H. STONE, *Developments in Hermite polynomials*, Annals of Mathematics, Second Series. Vol 29, pag. 1-13 e per una bibliografia degli sviluppi in serie di polinomi di HERMITE, E. HILLE, *A classe of reciprocal fonctions*, l. c. 27, pag. 427-464.

2. - La funzione intera

$$\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty}(-1)^r\left[\frac{b_r}{z-r}-g_r(z)\right] \qquad g_0(z)=0$$

è uguale a b_r se $z=r$. Il sommando generatore di convergenza $g_r(z)$ può non essere la funzione razionale intera di cui è menzione nella formulazione tradizionale del classico teorema di MITTAG-LEFFLER, ma uguale invece, ad esempio, a

$$g_r(z)=\frac{rb_r-zF(z)}{r(z-r)},$$

dove $F(z)$ è la funzione intera definita dalla serie di STIRLING (2). La serie

$$\sum_{r=\pm1,\pm2,\ldots}\frac{(-1)^r}{r(z-r)}$$

è assolutamente convergente se $z\neq r$. Lo è infatti l'altra $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}$ ed è

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r(z+r)}{r^2}=-\lim_{r\to\infty}\frac{r(z-r)}{r^2}=1.$$

Può quindi scriversi, se

$$h(z)=\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{b_r}{z-r}-g_r(z)\right\}$$

$$h(z)=\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi}\left\{\frac{F(0)}{z}+zF(z)\sum_{r=\pm1,\pm2,\ldots}\frac{(-1)^r}{r(z-r)}\right\}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi}\left\{\frac{F(0)}{z}+2zF(z)\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{z^2-r^2}\right\}$$

$$=F(z)+\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi z}[F(0)-F(z)]$$

poichè

$$\frac{1}{z}+2z\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{z^2-r^2}=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}.$$

La funzione

$$H(x)=e^{kx^2}h(x)$$

uguale ad a_r se $x=r$ è, come $F(x)$, sviluppabile in serie di polinomi di Hermite.

K. DUSL (Praha - Cecoslovacchia)

QUELQUES REMARQUES SUR LES POLYNOMES D'HERMITE

Dans la présente communication je trouve en premier lieu par la méthode élémentaire la limite inférieure et supérieure pour la plus grande racine d'un polynome d'Hermite annulé $H_n(x)=0$ et la limite inférieure pour la première (c'est à dire la plus petite, positive) racine de la même équation algebrique. D'autre part je donne des formules explicites, qui expriment les coefficients des séries de Fourier par ceux des développements en série de polynomes d'Hermite pour la même fonction développée.

1. - J'introduis les polynomes d'Hermite par le développement de la fonction génératrice:

$$e^{ax-\frac{a^2}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}H_n(x) \quad (1)$$

$H_n(x)$ est un polynome d'Hermite de degré n.

L'une des propriétés remarquables des polynomes $H_n(x)$ est que la dérivée de l'un d'eux est égale au polynome antécédent multiplié par un facteur constant, c'est à dire:

$$\frac{dH_n}{dx}=nH_{n-1} \tag{1}$$

et l'autre est une relation de récurrence liant trois polynomes consécutifs:

$$H_n(x)-xH_{n-1}(x)+(n-1)H_{n-2}(x)=0. \tag{2}$$

L'ensemble des deux relations est caractéristique des polynomes d'Hermite; la seule suite des polynomes qui vérifie les deux équations est la suite des polynomes d'Hermite.

---

(1) P. APPEL - J. KAMPÉ DE FÉRIET: *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite.* Paris, 1926, p. 331.

G. SZEGÖ: *Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome.* Math. Zeitschrift, 1926. Bd. 25.

W. ROTACH: *Reihenentwicklungen einer willkürlichen Function nach Hermite'schen. Polynomen.* Genf, 1925.

2. - Si l'on pose

$$x^2 = z \tag{3}$$

dans les expressions explicites (1) des polynomes d'Hermite (selon la parité du degré n: on divise d'avance par x les polynomes impairs) on calcule tout simplement les fonctions symmétriques des carrés de racines d'équation algébrique $H_k(x)=0$.

Pour le degré:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} k=2n+2 & \text{on a: } z_1''+z_2''+\ldots+z''_{n+1}=(n+1)(2n+1) \\ k=2n+1 & z_1'+z_2'+\ldots+z_n'=n(2n+1) \\ k=2n & z_1+z_2+\ldots+z_n=n(2n-1) \\ k=2n-1 & {}'z_1+{}'z_2+\ldots+{}'z_{n-1}=(n-1)(2n-1) \end{cases}$$

en général pour k quelconque:

$$\text{(III)} \quad S_k^1 = z_1+z_2+\ldots+z_{\frac{k}{2}\left(\frac{k-1}{2}\right)} = \frac{k(k-1)}{2}$$

De la même manière résultent les fonctions:

$$z_1\ z_2\ z_3\ldots.\ z_{i-1}+z_2\ z_3\ z_4\ldots.\ z_i+\ldots+z_1\ z_2\ z_3\ldots.\ z_i$$

$$i=\frac{k}{2},\ \left(\frac{k-1}{2}\right) \tag{4}$$

pour les quatre polynomes consécutifs.

Il est à remarquer qu'on calcule pour les réciproques des racines:

$$\text{(5)} \quad \begin{cases} \frac{1}{z_1''}+\frac{1}{z_2''}+\ldots+\frac{1}{z_n''}+\frac{1}{z_{n+1}''}=n+1 \\ \frac{1}{z_1'}+\frac{1}{z_2'}+\ldots+\frac{1}{z_n'}=\frac{n}{3} \\ \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\ldots+\frac{1}{z_n}=n \\ \frac{1}{{}'z_1}+\frac{1}{{}'z_2}+\ldots+\frac{1}{{}'z_{n-1}}=\frac{n-1}{3} \end{cases}$$

3. - De la relation de récurrence:

$$H_{2n+1}(x)-xH_{2n}(x)+2nH_{2n-1}(x)=0 \tag{6}$$

il suit pour les racines du polynome $H_{2n-1}(x)=0$

$${}'x=\frac{H_{2n+1}({}'x)}{H_{2n}({}'x)} \tag{7}$$

ainsi que pour les racines du polynome $H_{2n+1}(x)=0$

$$\frac{2n}{x'}=\frac{H_{2n}(x')}{H_{2n-1}(x')} \tag{8}$$

---

(1) P. Appel - J. Kampé de Fériet: *Fonctions hypergéométriques*, p. 333.

tandis que pour les racines du troisième polynome en question il suit:

$$-2n = \frac{H_{2n+1}(x)}{H_{2n-1}(x)} \tag{9}$$

«Pour des valeurs positives des racines de polynome $H_{2n+1}(x)=0$ ($H_{2n-1}(x)=0$) les deux polynomes dans l'équation (6) ont en reste *le même signe*, tandis que

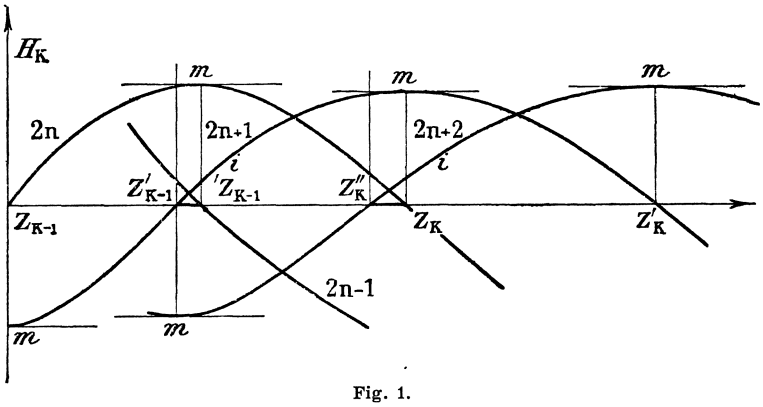


Fig. 1.

pour les racines du polynome $H_{2n}(x)=0$ *le signe contraire* ». La même circonstance se présente pour les trois polynomes consécutifs $H_{2n+2}(x)$, $H_{2n+1}(x)$, $H_{2n}(x)$ liés par la même formule de récurrence (2).

Quand on applique le fait connu, que les racines de l'équation $H_{n-1}(x)=0$ separent celles de $H_n(x)=0$ et à l'aide de l'équation fonctionelle (1) il se présente la position des racines $z=x^2$ de carrés des quatre polynomes consécutifs

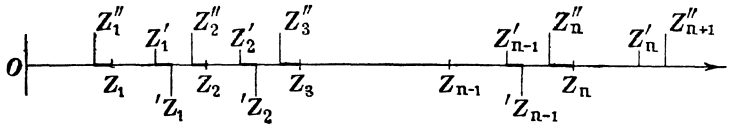


Fig. 2.

H_{2n+2}, H_{2n+1}, H_{2n}, H_{2n-1} et les courbes correspondantes aux valeurs de quatre polynomes ci-dessus comme il suit des figures 1 et 2.

Ce qui est le plus important, c'est que les différences:

$$'z_i - z_i'$$
$$z_i - z_i''$$
$$z_i'' - 'z_{i-1}$$

sont toujours positives.

4. - *Limite inférieure de la plus grande de racines de* $H_k(x)=0$.

Il résulte des expressions des sommes des carrés des racines (II) que l'on a:

$$z_n' - ['z_{n-1} - z'_{n-1} + 'z_{n-2} - z'_{n-2} + \ldots + 'z_1 - z_1'] = 4n - 1. \tag{10}$$

De la réprésentation des carrés des racines sur l'axe de z (fig. 1) on voit, que la somme Δ entre crochets est toujours positive (ou zéro) et il s'ensuit, que l'égalité

(11) $$z_n' - \Delta = 4n-1$$

entraîne:

(12) $$z_n' \geqq 4n-1.$$

De même on calcule par les équations (II):

(13) $$z''_{n+1} - [z_n - z_n'' + z_{n-1} - z''_{n-1} + \ldots + z_1 - z_1''] = 4n+1$$

ce que l'on écrit:

(14) $$z''_{n+1} - \Delta' = 4n+1.$$

La somme Δ' est positive (ou zéro) et l'inégalité:

(15) $$z''_{n+1} \geqq 4n+1$$

est alors établie.

De la substitution (3) il résulte pour la plus grande racine d'une équation:

$$H_k(x) = 0$$

l'inégalité:

(IV) $$x \geqq \sqrt{2k-3}$$

5. - *Limite supérieure pour la plus grande racine de l'equation* $H_k(x)=0$.

Puisque l'on a:

(16) $$\Delta \leqq z_n' - \frac{1}{2}{}'z_{n-1}$$
$$\Delta' < z''_{n+1} - \frac{1}{2}z_n$$

il résulte:

(17) $$'z_{n-1} < 8n-2$$
$$z_n < 8n+2$$

et pour la plus grande racine du polynome d'Hermite $H_k(x)$ il se présente en général l'inégalité:

(V) $$x < \sqrt{4k+2}$$

THÉORÈME: *La plus grande racine* x *du polynome d'Hermite* $H_k(x)$ *se trouve donc dans l'intervalle* $\sqrt{2k-3}$, $\sqrt{4k+2}$, *de sorte que l'on a:*

(VI) $$\sqrt{2k-3} \leqq x < \sqrt{4k+2}.$$

La limite supérieure, bien connue antérieurement, c'est à dire:

(VII) $$\sqrt{\frac{k(k-1)}{2}}$$

résulte aussi bien de l'equation (III) n. 1, la quantité sous la racine est la somme des carrés des racines de $H_k(x)=0$, mais cette limite est plus grande, en général, que la limite trouvée (V).

6. - *Limite supérieure de la première racine.*

Des expressions (5, n. 1) des sommes des carrés des racines il vient:

$$\frac{1}{z_1}-\left[\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}+\ldots.+\frac{1}{z_{n-1}}-\frac{1}{z_n}\right]=\frac{2n+1}{3}; \tag{18}$$

la somme entre crochets est positive et l'équation (18) entraîne l'inégalité:

$$z_1<\frac{3}{2n+1} \tag{19}$$

et de la même façon:

$$z_1''<\frac{3}{2n+3}.$$

La limite supérieure pour la premiere racine de $H_{2n}(x)=0$ *est alors représentée par l'inégalité:*

$$x_1<\sqrt{\frac{3}{2n+1}}. \tag{20}$$

7. - M. KOROUS de Prague pose:

$$e^{-a^2-2ax}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}H_n(x),\quad \varphi_n(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x) \tag{21}$$

et de l'équation différentielle pour la fonction $\varphi_n(x)$ écrite sous une forme convenable et de la substition:

$$\varphi_n(x)=\frac{\varphi_n'(a)}{2\sqrt{a^2-2n-1}}\sin h\sqrt{a^2-2n-1}(x-a)+\gamma_n(x) \tag{22}$$

où a signifie la plus grande racine de $H_n(x)=0$, il calcule $\gamma_n(x)$ par la méthode de la variation des constantes et il conclut à la fin que la supposition:

$$a\geqq\sqrt{2n+1} \tag{23}$$

n'est pas d'accord avec l'équation:

$$\lim_{x\to\infty}\varphi_n(x)=0 \tag{24}$$

en relation avec ce que je viens de dire dans le n. 6. Pour deux racines positives et consécutives:

$$\begin{cases} x_{k-1} \text{ et } x_k \\ x_{k-1}\geqq a\geqq 0 \\ x_k\leqq b<\sqrt{2n+1} \end{cases} \tag{25}$$

on pose

$$\varphi_n(x)=\frac{\varphi_n'(x_{k-1})}{\sqrt{2n+1-a^2}}\sin\sqrt{2n+1-a^2}(x-x_{k-1})+\delta_n(x). \tag{26}$$

Quand on effectue la substitution de (26) dans l'équation différentielle pour $\varphi_n(x)$, il résulte par la méthode de la variation des constantes:

$$\delta_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2n+1-a^2}}\int_{x_{k-1}}^{x}(t^2-a^2)\sin\sqrt{2n+1-a^2}(x-t)\varphi_n(t)dt. \tag{27}$$

Un calcul pareil se rapporte à la constante b.

M. KOROUS en conclut une inégalité très remarquable:

$$\text{(IX)} \qquad \frac{\pi}{\sqrt{2n+1-a^2}} < x_k - x_{k-1} < \frac{\pi}{\sqrt{2n+1-b^2}}.$$

La fonction $2n+1-x^2$ figure aussi dans une équation de récurrence:

$$\text{(28)} \qquad H_{2n+2}(x) + H_{2n}(x)(2n+1-x^2) + 2nxH_{2n-1}(x) = 0$$

qu'on déduit simplement de (2) et (6). Pour la première racine de $H_{2n}(x)=0$ M. KOROUS trouve:

$$\text{(29)} \qquad x_1 < \frac{\pi}{\sqrt{2n+1}}$$

tandis que j'ai trouvé:

$$\text{(30)} \qquad x_1 < \sqrt{\frac{3}{2n+1}}$$

8. - Les formules:

$$\text{(31)} \qquad \begin{cases} H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = O((2e^{-1}n)^{\frac{n+1}{2}}) \\ H_n(x) = O((2e^{-1}n)^{\frac{n}{2}}), \quad a<x<b \\ \int_a^b f(t)H_n(t)e^{-t^2}dt = o((2e^{-1}n)^{\frac{n}{2}}) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)H_n(t)e^{-t^2}dt = o((2e^{-1}n)^{\frac{n+1}{2}}) \\ \int_{c\pm c_0}^{\pm\infty} \frac{f(t)}{t-c} H_n(t)e^{-t^2}dt = o((2e^{-1}n)^{\frac{n}{2}}) \end{cases}$$

dans lesquelles l'indice n croît à l'infini et a, b, c réprésentent trois quantités indépendantes de n, $c_0>0$ et $f(t)$ est une fonction telle que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

est finie, se rapportent au théorème de convergence du développement d'une fonction en serie de polynomes $H_n(x)$ par la méthode de Fourier.

Si l'on pose:

$$\text{(32)} \qquad F(r,x) = a_0H_0(x) + a_1rH_1(x) + \ldots + a_nr^nH_n(x) + \ldots$$

on a par la méthode connue de Poisson:

$$\text{(33)} \qquad F(r,x) = \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)S_n(r,x,t)e^{-t^2}dt$$

et

$$S_n(r, x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{H_\nu(x) H_\nu(t)}{2^\nu \nu!} r^\nu. \tag{34}$$

A la fin on a:

$$\lim_{n=\infty} S_n(r, x, t) = S(r, x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-r^2)}} exp\left(-\frac{(x^2+y^2)r^2 - 2rxy}{1-r^2}\right). \tag{35}$$

M. KOROUS établit trois ou quatre théorèmes de convergence pour de telles séries. Voici en le principal:

« La condition nécessaire et suffisante pour que la série de polynomes d'Hermite ait au point x la somme S est, que la série de Fourier se rapportant à la fonction $F(x)$ avec la période 2π, qui aux environs du point considéré est égale à la fonction $f(x)$, ait la même somme S ».

Les sommes de n termes de la série de Fourier et la somme de n termes de la série correspondante de $H_n(x)$ sont liées par l'équation:

$$\sigma[\sqrt{2n}] = s_n \tag{36}$$

9. - J'ai établi entre les séries de Fourier et les développements correspondants en série de polynomes d'Hermite les expressions explicites que voici:

$$\sin kx = e^{-\frac{k^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n+1}}{(2n+1)!} H_{2n+1}(x). \tag{X$_1$}$$

Pour les deux développements d'une seule fonction

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n H_n(x) \tag{X$_2$}$$

il résulte:

$$(2n+1)!(-1)^n A_{2n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2}{2}} k^{2n+1}. \tag{X$_3$}$$

De la même manière:

$$\cos kx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{k^2}{2}} \frac{k^{2n}}{2n!} H_{2n}(x) \tag{X$_4$}$$

et

$$(2n)!(-1)^n A_{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2}{2}} k^{2n} \tag{X$_5$}$$

10. - Pour les polynomes de Laguerre se présentent des circonstances pareilles. On part de la fonction génératrice:

$$\frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n L_n^{(\alpha)}(x)$$

ou $L_n^{(\alpha)}(x)$ signifient les polynomes de Laguerre. A l'aide de l'équation fonctionnelle:

$$\frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx} = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \tag{37}$$

et tenant compte de rélations de récurrence:

$$\begin{cases} L_n^{(\alpha)} - L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha-1)}(x) \\ nL_n^{(\alpha)}(x) = (-x+2n+\alpha-1)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha-1)L_{n-2}^{(\alpha)}(x) \\ \qquad n>2 \\ L_0^{(\alpha)}(x)=1, \quad L_1^{(\alpha)}(x)=\alpha+1-x, \end{cases} \tag{38}$$

on s'inspire de la méthode suivie dans cette communication.

Les résultats sont assez remarquables et feront l'objet d'un mémoire ultérieur.

J. KAMPÉ DE FÉRIET (Lille - Francia)

SUR L'UNIFORMISATION DES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES DE DEUX VARIABLES

1. - La fonction hypergéométrique (1) $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$, prolongement analytique de la série

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} x^n,$$

est une fonction multiforme de x, admettant trois points singuliers: $x=0, 1, \infty$. Il est clair qu'en prenant pour x une fonction modulaire d'une variable auxiliaire τ, $x=\lambda(\tau)=\vartheta_2^4(0/\tau)\vartheta_3^{-4}(0/\tau)$, $\mathcal{F}$ devient une fonction uniforme de τ, dans tout le demi-plan $I(\tau)>0$, domaine d'existence de $\lambda(\tau)$. La remarque se trouve déjà (1881) dans une note de H. POINCARÉ (2); W. WIRTINGER (3) a fait faire un pas essentiel à la question en donnant une expression analytique élégante, représentant la fonction uniformisée dans tout son domaine d'existence:

$$(1) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \vartheta_1^{2\beta-1}(v/\tau)\vartheta_2^{2(\gamma-\beta)-1}(v/\tau)\vartheta_3^{1-2\alpha}(v/\tau)\vartheta_4^{1-2(\gamma-\alpha)}(v/\tau)\,dv.$$

En appliquant à cette intégrale les formules de transformation classiques des fonctions ϑ, K. PETR (4), A. ČERMAK (5), F. GRAF (6) ont pu retrouver par une voie naturelle les formules de transformation rationnelles ou algébriques (déjà connues) de $\mathcal{F}$.

---

(1) Voir le fascicule, sous presse, du Mém. des Sc. Math.: *La fonction hypergéométrique.*

(2) H. POINCARÉ: *Œuvres*, t. II, p. 7. Voir aussi: E. PAPPERITZ: *Ueber die Darstellung der hypergeometrischen Transcendenten durch eindeutige Functionen.* Math. Ann. t. 34, 1889, p. 247.

(3) W. WIRTINGER: *Zur Darstellung der hypergeometrischen Function durch bestimmte Integrale.* Sitz. ber. Akad. Wiss. Wien. (Abt. IIa), t. 111, 1902, p. 894.

(4) K. PETR: *Poznamka o integralech hypergeometricke differencialni rovnice.* Časopis Math. fys., t. 38, 1909, p. 294.

(5) A. ČERMAK: *Nektere poznamky k theorii hypergeometricke Funkce na zaklade theta-funkci.* Časopis Math. fys., t. 36, p. 441.

(6) F. GRAF: *O vseobecnem urceni čiselnych koefficientu grupy hypergeometricke rovnice differencialni.* Rozpr. České Akad., t. 17, 1908, p. 32.

2. - M. P. APPELL a introduit dans l'Analyse quatre fonctions de deux variables (1) qui généralisent la fonction de Gauss; par des transformations simples elles se ramènent toutes à la fonction $\mathfrak{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ que je considérerai seule ici; cette fonction est le prolongement analytique de la série

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n \tag{2}$$

absolument convergente dans le domaine $|x|<1$, $|y|<1$. En s'appuyant sur le système des trois équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre vérifiées par $\mathfrak{F}_1$, on établit aisément que c'est une fonction multiforme de x, y, admettant, dans l'espace à 4 dimensions, les 7 multiplicités singulières à 2 dimensions:

$$x=0, \quad x=1, \quad x=\infty, \quad y=0, \quad y=1, \quad y=\infty, \quad x=y; \tag{3}$$

entre 4 branches existe une relation linéaire à coefficients constants; dans le domaine d'un point d'une multiplicité singulière, 3 branches linéairement indépendantes ont des formes simples.

Je me propose d'établir qu'*en prenant pour* x *et* y *les fonctions modulaires de deux variables auxiliaires* ξ, η, *définies par M. É. Picard* (2),

$$x=X(\xi, \eta), \quad y=Y(\xi, \eta),$$

la fonction $\mathfrak{F}_1$ *devient une fonction uniforme de* ξ, η *dans le domaine:*

$$2R(\xi)+|\eta|^2<0, \tag{4}$$

domaine d'existence des fonctions X *et* Y. Pour le démontrer, je donnerai pour $\mathfrak{F}_1$ une expression analytique valable dans (4), analogue à (1) en introduisant des fonctions ϑ de trois variables.

Le point de départ est l'intégrale de M. É. PICARD (3)

$$C \cdot \int_i^{+\infty} t^{\beta+\beta'-\gamma}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}(t-x)^{-\beta}(t-y)^{-\beta'} dt \tag{5}$$

qui coïncide avec F_1 dans le domaine de convergence $|x|<1$, $|y|<1$ et qui reste uniforme tant que (x, y) n'a pas franchi l'une des deux multiplicités:

$$I(x)=0 \quad R(x)\geqslant 1; \qquad I(y)=0 \quad R(y)\geqslant 1.$$

Pour que l'intégrale conserve un sens quand (x, y) traverse ces coupures il suffit que $R(1-\beta)$ et $R(1-\beta')>0$; il faut en outre supposer $R(\beta+\beta'-\gamma+1)$

---

(1) Pour tout ce qui concerne ces fonctions voir P. APPELL et J. KAMPÉ DE FÉRIET: *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, polynomes d'Hermite.* (Gauthier Villars, 1926).

(2) É. PICARD: *Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires.* Acta Mathematica, t. II. 1883, p. 114.

(3) É. PICARD. Comptes Rendus Ac. Sc., t. 90, 1880, p. 1267.

et $R(\gamma-\alpha)>0$. Ces restrictions ne sont d'ailleurs pas gênantes puisqu'on peut toujours se ramener à ce cas grâce à des formules de récurrence. Pour s'en débarrasser on peut aussi remplacer le chemin rectiligne d'intégration par un double lacet de JORDAN-POCHHAMMER.

3. - Les fonctions ϑ donnant la solution du problème sont liées à la relation algébrique de genre 3 :

$$s^3=t(t-1)(t-x)(t-y), \tag{6}$$

qui a été étudiée en détail par J. THOMAE (1), avant d'être le point de départ des profondes recherches de M. É. PICARD (2) sur les fonctions modulaires. Soit (T) la surface de Riemann à 3 feuillets, (T') cette surface rendue simplement connexe par le système de 6 coupures a_k, b_k décrit par THOMAE.

Toute intégrale de 1e espèce est de la forme :

$$w(t,s)=\int_{(t_0,\,s_0)}^{(t,\,s)}\frac{as+bt+c}{s^2}\,dt$$

Désignons par $u_1(t,s)$, $u_2(t,s)$, $u_3(t,s)$ les trois intégrales normales de 1e espèce ; THOMAE a établi que leurs modules de périodicité τ_{ik} s'expriment en fonction de 2 variables ; en choisissant convenablement ces variables ξ, η nous donnerons (3) aux τ_{ik} une forme voisine de celle de M. É. PICARD :

$$\begin{vmatrix}\tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23}\\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}j(j-1)(2\xi+j\eta^2), & \frac{1}{3}(j-1)(-j\xi+\eta^2), & j^2\eta\\ \frac{1}{3}(j-1)(-j\xi+\eta^2), & \frac{1}{3}j(j-1)(2\xi+\eta^2), & \eta\\ j^2\eta, & \eta, & -j^2\end{vmatrix}$$

THOMAE a donné les valeurs de $u_k(t,s)$ aux points de ramification (4) de (T') en fonction des τ_{ik} ; il ressort de son tableau que :

$$\xi=(j-1)u_1(y,0)+(j^2-1)u_2(y,0),\quad \eta=(j-1)u_3(y,0).$$

M. PICARD a démontré d'autre part que ces fonctions $\xi(x,y)$ et $\eta(x,y)$ étaient multiformes ; quand (x,y) décrit un circuit autour d'une des multiplicités (3) elles se transforment par une substitution linéaire d'un groupe G, dont il a construit les substitutions fondamentales.

---

(1) J. THOMAE : *Ueber eine specielle Klasse Abelscher Functionen vom Geschlecht drei.* Halle (L. Nebert) 1879 ; il désigne les racines du polynomes en t par k, k_1, k_2, k_3 ; je traduis dans la suite toutes les formules de THOMAE en prenant $k=1$, $k_1=0$, $k_2=x$, $k_3=y$.

(2) É. PICARD : *Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires.* Acta Mathematica, t. II, 1883, p. 114.

(3) j désigne la racine cubique de 1 : $j=e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

(4) Il suppose que l'on a $u_k(\infty,\infty)=0$.

Construisons avec les τ_{ik} la fonction ϑ de 3 variables:

$$\vartheta(v_1, v_2, v_3) = \sum e^{\pi i \varphi(m_1, m_2, m_3) + 2\pi i(m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3)} \tag{7}$$

$$\varphi(m_1, m_2, m_3) = \sum \tau_{ik} m_i m_k;$$

posons pour abréger:

$$\Theta(v_1, v_2, v_3) = e^{\pi i\left(v_3 + \frac{1}{2} + \frac{\tau_{33}}{4}\right)} \vartheta\left(v_1 + \frac{\tau_{13}}{2},\ v_2 + \frac{\tau_{23}}{2},\ v_3 + \frac{1+\tau_{33}}{2}\right), \tag{8}$$

fonction que nous désignerons encore plus brièvement par $\Theta\{v_k\}$. La condition nécessaire et suffisante pour que la série (7) soit absolument convergente, c'est que la forme quadratique $\sum I(\tau_{ik}) m_i m_k$ soit définie positive. M. PICARD a démontré qu'il faut et il suffit pour cela que ξ, η vérifient la condition (4). *La fonction Θ est donc une fonction entière de* v_1, v_2, v_3, *une fonction régulière et uniforme de ξ, η dans tout le domaine défini par la condition* (4).

4. - Si on forme le quotient de 2 fonctions Θ où les v sont des combinaisons d'intégrales de 1e espèce, on obtient des formules dont les plus importantes ont été écrites par THOMAE; par exemple:

$$-\sqrt[3]{\frac{(t_1-1)(t_2-1)(t_3-1)}{(x-1)(y-1)}} = \frac{\Theta\{u_k(t_1, s_1) + u_k(t_2, s_2) + u_k(t_3, s_3) - u_k(1, 0)\}}{\Theta\{u_k(t_1, s_1) + u_k(t_2, s_2) + u_k(t_3, s_3)\}}. \tag{9}$$

Si dans cette formule on fait $t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = x$, on obtient en tenant compte des valeurs de $u_k(t, s)$ aux points de ramification:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{y-1}} = \frac{\Theta\left(\frac{2+2\tau_{13}}{3}, \frac{2+2\tau_{23}}{3}, \frac{2+2\tau_{33}}{3}\right)}{\Theta\left(\frac{2\tau_{13}}{3}, \frac{2\tau_{22}}{3}, \frac{2+2\tau_{33}}{3}\right)}. \tag{10}$$

De cette expression et de celles qu'on obtient par des procédés semblables on déduit ce résultat fondamental: *les fonctions* $\sqrt[2]{x}$, $\sqrt[3]{y}$, $\sqrt[3]{x-1}$, $\sqrt[3]{y-1}$, $\sqrt[3]{x-y}$ *sont des fonctions régulières et uniformes de* (ξ, η) *dans tout le domaine* (4); *quand* (ξ, η) *décrit une courbe intérieure à ce domaine,* (x, y) *décrit une courbe ne passant par aucune des multiplicités singulières* (3); *pour que* (x, y) *décrive une courbe fermée il faut que* (ξ, η) *décrive ou une courbe fermée ou une courbe joignant deux points déduits l'un de l'autre par une substitution du groupe* G. Les fonctions uniformes $x = X(\xi, \eta)$, $y = Y(\xi, \eta)$ sont précisément les fonctions modulaires de M. PICARD, invariantes par les substitution de G.

5. - Revenons maintenant à l'intégrale (5); les expressions:

$$\frac{t}{\sqrt[3]{xy}},\quad \frac{t-1}{\sqrt[3]{(x-1)(y-1)}},\quad \frac{t-x}{\sqrt[3]{x(x-1)(x-y)}},\quad \frac{t-y}{\sqrt[3]{y(y-1)(y-x)}}$$

peuvent se représenter par des quotients de fonctions Θ; par exemple, en faisant $t_1=t_2=t_3=t$ dans (9) il vient:

$$\frac{t-1}{\sqrt[3]{(x-1)(y-1)}}=\frac{\Theta\{3u_k(t,s)-u_k(1,0)\}}{\Theta\{3u_k(t,s)\}}. \tag{11}$$

On obtient en outre facilement:

$$dt=A(\xi,\eta)\sqrt[3]{t(t-1)(t-x)(t-y)}[du_1-jdu_2+\eta du_3].$$

En posant $u_k=u_k(t,s)$, on établit une correspondance entre le point (t,s) et le point (u_1,u_2,u_3) d'un espace à 6 dimensions. Quand t décrit le segment $(1,+\infty)$, le point (u_1,u_2,u_3) décrit une courbe C ayant pour origine et extrémité les points $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$ et $(0,0,0)$. La correspondance entre la courbe et le segment est biunivoque, puisque (t,s) ne sort pas de (T').

En remplaçant dans (5): t, $t-1$, $t-x$, $t-y$ par leurs expressions telles que (11), la fonction $\mathfrak{F}_1$ se trouve donc exprimée par une intégrale curviligne:

$$\Psi(\xi,\eta)\int_C G(u_1,u_2,u_3,\xi,\eta)(du_1-jdu_2+\eta du_3);$$

on montre ensuite facilement que, dans l'espace (u_1,u_2,u_3), on peut remplacer la courbe C, qui dépend de (ξ,η) par la droite fixe D, joignant les deux points $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$ et $(0,0,0)$, le long de laquelle on peut prendre:

$$u_1=u_2=v \quad u_3=0 \qquad \left(v \text{ réel variant de } 0 \text{ à } \frac{1}{3}\right);$$

d'où l'expression finale de $\mathfrak{F}_1$:

$$(j-1)\Psi(\xi,\eta)\int_0^{\frac{1}{3}} G(v,v,0,\xi,\eta)dv; \tag{12}$$

il est clair d'après leur expression au moyen des quotients de fonction Θ que $\Psi(\xi,\eta)$ et $G(v,v,0,\xi,\eta)$ $\left(\text{pour } 0\leqslant v\leqslant\frac{1}{3}\right)$ sont des fonctions uniformes et régulières de (ξ,η) dans tout le domaine (4).

Donc quand on exprime paramétriquement x *et* y *par les fonctions modulaires de M. Picard* $x=X(\xi,\eta)$, $y=Y(\xi,\eta)$ *la fonction hypergéométrique* $\mathfrak{F}_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y)$ *devient une fonction uniforme de* (ξ,η) *dans le domaine* (4), *représentée dans tout ce domaine par l'intégrale* (12) *portant sur un produit de puissances des fonctions* Θ *de trois variables, liées à la relation algébrique* (6) *de genre trois.*

L'analogie de ce résultat avec celui de W. WIRTINGER dans le cas d'une variable est évidente; il n'est donc pas impossible que l'étude du groupe G et de ses sous-groupes conduise à découvrir des formules de transformation rationnelles ou algébriques de $\mathfrak{F}_1$, dont on ne connait que fort peu jusqu'à présent.

A. C. DIXON (Belfast - Irlanda)

CONSTRUCTION OF A PAIR OF FUNCTIONS φ, ψ, SATISFYING THE EQUATIONS

$$\begin{cases} \varphi(z+i\pi)-\varphi(z-i\pi)\pm\{\psi'(z)+\psi''(z)\}=0 \\ \psi(z+i\pi)-\psi(z-i\pi)\pm\{\varphi'(z)-\varphi''(z)\}=0 \end{cases}$$

WHERE THE UPPER SIGN APPLIES TO THE RIGHT HALF-PLANE, AND THE LOWER TO THE LEFT

The most familiar example of a function of the complex variable satisfying different functional equations in different parts of the plane is probably a power of a binomial. For instance $(z+1)^q$ satisfies the equation

$$\varphi(ze^{i\pi})-\varphi(ze^{-i\pi})=0$$

inside the unit circle, but outside

$$\varphi(ze^{i\pi})-e^{2qi\pi}\varphi(ze^{-i\pi})=0.$$

Thus $(e^{-z}+1)^q$ is reduced to zero by the operator
$e^{i\pi D}-e^{-i\pi D}$ in the right half-plane but by
$e^{i\pi(D+q)}-e^{-i\pi(D+q)}$ in the left $(D=d/dz)$.

The resolution of these operators into factors introduces Γ functions, and Γ functions of the indices appear as factors in the coefficients when $(z+1)^q$ is expanded in powers of z.

In the case of the hypergeometric functions a row of two functions is reduced to zero by a matrix of operations, different in different regions. A case is here considered as an illustration of a general method, where the matrices are given and the functions are to be constructed. Let

$$\Delta_1(\lambda)=\begin{pmatrix} e^{\lambda i\pi}-e^{-\lambda i\pi}, & \lambda+\lambda^2 \\ \lambda-\lambda^2, & e^{\lambda i\pi}-e^{-\lambda i\pi} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2(\lambda)=\begin{pmatrix} e^{\lambda i\pi}-e^{-\lambda i\pi}, & -\lambda-\lambda^2 \\ -\lambda+\lambda^2, & e^{\lambda i\pi}-e^{-\lambda i\pi} \end{pmatrix}$$

then the functions φ, ψ are to be such that
$\Delta_1(D)(\varphi,\psi)=0$ in the right half-plane
$\Delta_2(D)(\varphi,\psi)=0$ in the left half-plane.

The first step is to reduce Δ_1, Δ_2 to the forms KU_1L, KU_2L where K, L are matrices and U_1, U_2 are diagonals, that is, matrices in which all constituents vanish except those of the dexter diagonal.

Here $K(\lambda)=\begin{pmatrix}1, & 1\\ -\mu, & \mu\end{pmatrix}$, $L(\lambda)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1, & -1/\mu\\ 1, & 1/\mu\end{pmatrix}$ where $\mu=\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$U_1(\lambda)=\begin{pmatrix}e^{\lambda i\pi}-e^{-\lambda i\pi}-\lambda(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}, & 0\\ 0, & e^{\lambda i\pi}-e^{-\lambda i\pi}+\lambda(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}$$

and $U_2(\lambda)$ differs from $U_1(\lambda)$ only in the sign of the surd.

The problem is made soluble by the fact that $U_1(\lambda)$, $U_2(\lambda)$ are uniform on a simply-connected Riemann surface of two sheets, with branch points at ± 1: they are in fact uniform functions of μ.

We have

$$\lambda=\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2},\quad (1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{2\mu}{1+\mu^2}$$

and we put also

$$z=\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2},\quad (1-z^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{2\zeta}{1+\zeta^2},$$

the surds being unambiguous when μ, ζ are known.

Then if $|\zeta|\gtrless 1$, z is in the $\begin{matrix}\text{left}\\ \text{right}\end{matrix}$ half-plane. When z travels along the lateral axis in either sheet, $1-z^2$ and $(e^{zi\pi}-e^{-zi\pi})/zi$ are always positive so that the points $\frac{e^{zi\pi}-e^{-zi\pi}}{z}\pm(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ never approach the axes.

Hence the net change in the logarithm of $\frac{e^{zi\pi}-e^{-zi\pi}+z(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}{e^{zi\pi}-e^{-zi\pi}-z(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$ is zero when z runs from $-i\infty$ to $+i\infty$ and in each sheet one value of this logarithm, which value we shall call $\log F(\zeta)$, is of the order of $\exp|z|(-\pi+0)$ when $z\to\pm i\infty$. $F(\zeta)$ is a uniform function of ζ. Let $\log F(\zeta)\div(\zeta-\mu)$ be integrated with respect to ζ along the paths described when z travels from $-i\infty$ to $i\infty$ in the two sheets. The limits for ζ are $\pm i$ and the two paths are the two halves of the unit circle. Hence the whole result is

$$\int \log F(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-\mu}$$

round the whole of the unit circle in the negative sense.

The integral converges and represents a regular analytical function of μ so long as μ does not approach the unit circle. If we denote this function by

$$2i\pi\log\frac{\vartheta(\mu)}{e^{\lambda i\pi}-e^{-\lambda i\pi}+\lambda(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}$$

so long as μ is inside the circle, that is, so long as λ is in the right half-plane in either sheet, then when λ is in the left half-plane the value of the integral is

$$2i\pi\log\frac{\vartheta(\mu)}{e^{\lambda i\pi}-e^{-\lambda i\pi}-\lambda(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}$$

and $\vartheta(\mu)$ is a regular function of μ or μ^{-1} except near the two essential singularities at $\pm i$; it vanishes with $e^{\lambda i\pi}-e^{-\lambda i\pi}+\lambda(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ when μ is inside the circle but with $e^{\lambda i\pi}-e^{-\lambda i\pi}-\lambda(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ when μ is outside.

Also $\log F(\zeta)$ is an odd function of ζ and

$$2i\pi \log \frac{\vartheta(-\mu)}{e^{\lambda i\pi} - e^{-\lambda i\pi} - \lambda(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}} = \int \log F(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta + \mu}$$

round the unit circle, μ being inside. This is therefore

$$-\int \log F(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta + \mu}$$

and

$$\vartheta(-\mu)\vartheta(\mu) = (e^{\lambda i\pi} - e^{-\lambda i\pi})^2 - \lambda^2(1-\lambda^2).$$

Now let $U_{12}(\lambda)$ be written for $\begin{pmatrix} \vartheta(\mu), & 0 \\ 0, & \vartheta(-\mu) \end{pmatrix}$ so that

$$K(\lambda) U_{12}(\lambda) L(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vartheta(\mu) + \vartheta(-\mu), & \{-\vartheta(\mu) + \vartheta(-\mu)\}/\mu \\ \{-\vartheta(\mu) + \vartheta(-\mu)\}\mu, & \vartheta(\mu) + \vartheta(-\mu) \end{pmatrix}$$

which is a matrix of uniform functions of λ, say $\Theta(\lambda)$. Then $\Theta(\lambda)$ is $O(e^{\mp\lambda i\pi})$ when $\lambda \to \pm i\infty$ and therefore

(X) $$\int_{-i\infty}^{i\infty} \{\Theta(\lambda)\}^{-1} e^{\lambda z} d\lambda$$

is convergent in the strip $|Iz| < \pi$ and represents a matrix of functions regular in that strip.

If the path of integration is bent to the left so as to tend to ∞ in the second and third quadrants the region of validity is widened out on the right and if $z \pm i\pi$ are in the region the result of operating with $\Delta_1(D)$ is

$$\int \Delta_1(\lambda) \{\Theta(\lambda)\}^{-1} e^{\lambda z} d\lambda$$

or

$$\int K(\lambda) U_1(\lambda) \{U_{12}(\lambda)\}^{-1} \{K(\lambda)\}^{-1} e^{\lambda z} d\lambda.$$

Now all the zeros of $U_{12}(\lambda)$ to the left of the path are also zeros of $U_1(\lambda)$ and thus the path may be moved off to infinity on the left and the integral vanishes, that is, the matrix (X) is reduced to zero by the operation $\Delta_1(D)$ if z is in the right half-plane or similarly by $\Delta_2(D)$ if z is in the left half-plane.

Thus in each column of the matrix (X) we have a pair of functions satisfying the prescribed conditions.

[For the development of the theory see Proceedings of the « London Mat. Soc. » (2) 30 (1929) 433-468].

M. AKIMOFF (Leningrad - U. R. S. S.)

UEBER DIE BESSEL'SCHEN FUNKTIONEN MEHRERER VARIABELN

Den Gegenstand der Arbeit bildet die Untersuchung der Integrale

$$(1) \qquad I_k(x_1, x_2, \ldots) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\,(kv - x_1 \sin v - x_2 \sin 2v - \ldots) dv,$$

welche als Coefficienten der trigonometrischen Entwicklung

$$(2) \qquad u = \zeta + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} I_k(ke_1, ke_2, \ldots) \sin k\zeta$$

vorkommen, die bei Umkehrung der trigonometrischen Reihe

$$(3) \qquad u - e_1 \sin u - e_2 \sin 2u - \ldots = \zeta$$

ensteht.

Das älteste Problem, welches zu dieser Umkehrung führt, ist das bekannte Kepler'sche Problem, wo man die Entwickelung $w - \zeta = a_1 \sin \zeta + a_2 \sin 2\zeta + \ldots$ der Mittelpunktsgleichung $w - \zeta$ (w ist die wahre und ζ die mittlere Anomalie eines Planeten) sucht.

Schlömilch war der erste, der im Jahre 1849 in seiner Monographie « Die allgemeine Umkehrung gegebener Funktionen » die Lösung der Gleichung (3) in der Form der Reihe (2) gegeben hat, wo die Coefficienten die oben angeführten Integrale (1) sind.

Darauf hat Weierstrass im Jahre 1866 in seiner Abhandlung « Ueber eine Gattung reell periodischer Funktionen » das Problem der Umkehrung der Reihe (3) mit dem Problem der Umkehrung des Integrals

$$(4) \qquad \int_{-1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \cdot f(x)}} = t$$

in Zusammenhang gebracht.

Hier ist $f(x)$ eine stetige im Intervalle $-1 \leqslant x \leqslant 1$ wesentlich positive Funktion der reellen Veränderlichen x.

Nach Weierstrass wird

$$(5) \qquad x = \cos u = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos k\zeta$$

und allgemeiner

$$G(x)=\sum_{p=0}^{\infty} G_p \cos pu=\sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos k\zeta,$$

wo ζ eine lineare Funktion von t ist und A_k, B_k sich aus den in der Formel (1) enthaltenen bestimmten Integralen zusammensetzen lassen.

Endlich haben O. Staude (Journal für Mathematik, Bd. 105, 1889, p. 298) und P. Stäckel (Habilitationsschrift, Halle, 1891, § 5) die Ideen von Weierstrass auf das System der Integrale

$$\int_{-1}^{x} \frac{f(x)dx}{\sqrt{(1-x^2)\cdot F(x)}}+\int_{-1}^{y} \frac{f_1(y)dy}{\sqrt{(1-y^2)\cdot F_1(y)}}+\ldots.=t$$

$$\int_{-1}^{x} \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{(1-x^2)\cdot \Phi(x)}}+\int_{-1}^{y} \frac{\varphi_1(y)dy}{\sqrt{(1-y^2)\cdot \Phi_1(y)}}+\ldots.=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

verallgemeinert.

Wenn man $x=\cos u$, $y=\cos u'$,.... setzt, so erhält man hieraus, unter bestimmten Voraussetzungen für f, f_1, φ, φ_1, F, F_1, Φ, Φ_1, die sogenannten bedingt periodischen Entwickelungen

$$(6)\qquad x=\sum_{k,k',\ldots.=-\infty}^{+\infty} A_{kk'\ldots.}e^{i(k\zeta+k'\zeta'+\ldots.)},\qquad y=\sum_{k,k',\ldots.=-\infty}^{+\infty} A'_{kk'\ldots.}e^{i(k\zeta+k'\zeta'+\ldots.)},\ldots.$$

wo ζ, ζ',.... lineare Funktionen von t sind und A, A',.... sich wieder durch die oben angeführten Integrale ausdrücken lassen.

Das Ausrechnen dieser Integrale bietet grosse Schwierigkeiten. Weierstrass selbst hat dafür in der oben citierten Abhandlung eine Methode gegeben, ohne sie jedoch an Beispielen zu erläutern.

J. Horn hat sich in seinen Aufsätzen in der Zeitschrift für Mathematik und Physik (Bd. 49, 1903, p. 246), im Archiv der Mathematik und Physik (Bd. 10, 1905, p. 1) und im Journal für Mathematik (Bd. 126, 1903, p. 194), wo er die Weierstrass'sche Methode auf mehrere mechanische Probleme angewandt hat, mehrfach mit Ausrechnung dieser Integrale auf elementare Weise beschäftigt.

Eine Methode für ein solches Ausrechnen im Falle specieller Argumente, die im Kepler'schen Problem vorkommen, gibt auch Gyldén in seinem « Traité analytique des orbites absolues.... » (t. I, 1893, p. 93, 99) an.

P. Appell hat im Jahre 1915 in einer Note in Comptes rendus (t. 160, 1915, p. 419) vorgeschlagen die Integrale (1) als verallgemeinerte Bessel'sche Funktionen mehrerer Variabeln x_1, x_2,.... zu studieren (1).

---

(1) P. Appell macht die erste Annäherung vor der Umkehrung des Integrals (4), indem er die Funktion $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ durch ein Polynom $P(x)$ ersetzt.

J. Pérès hat darauf (Comptes rendus, t. 161, 1915, p. 168) die Rekursionsformeln

$$\frac{\partial I_k}{\partial x_m} = \frac{1}{2}(I_{k-m} - I_{k+m}), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$kI_k = \frac{1}{2}[x_1(I_{k-1} + I_{k+1}) + 2x_2(I_{k-2} + I_{k+2}) + \ldots]$$

und daraus entspringendes System der partiellen Differentialgleichungen angegeben, welchen diese verallgemeinerte Bessel'sche Funktionen Genüge leisten.

Endlich hat B. Jekhowsky (Comptes rendus, t. 162, 1916, p. 318. Bulletin des sciences mathématiques, 2e série, t. 41, 1917, p. 58) die Formel gegeben

$$I_k(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_{k-np}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) I_p(x_n)$$

und einige Eigenschaften dieser Funktionen untersucht (Comptes rendus, 1917-1921. Bulletin astronomique, 1917, 1918. Thèse (1), Paris, 1927).

Ich habe in meiner autographierten (2) Dissertation (Petrograd, 1922, russisch) und in mehreren Noten in Comptes rendus (1916-1927) die in Rede stehenden Bessel'schen Funktionen mehrerer Variabeln systematisch untersucht und folgende Resultate erhalten.

Der Kürze halber beschränke ich mich hier, wie ich es in meinem Vortrag auf dem Moskauer Congress der russischen Mathematiker (3 Mai 1927) getan habe, auf den Fall zweier Variabeln, obwohl in meiner Dissertation der allgemeine Fall n Variabeln behandelt worden ist.

Es existiert hier die erzeugende Funktion und die fundamentale Entwickelung

$$e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})+\frac{y}{2}(t^2-t^{-2})} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(x, y) t^k$$

Daraus hat man folgende Darstellungen der Funktion $I_k(x, y)$ in der Form der unendlichen Reihen

$$I_k(x, y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_{k-2p}(x) I_p(y),$$

$$I_k(x, y) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{v_{k+s}(x, y) \cdot v_s(-x, -y)}{2^{k+2s}(k+s)!\, s!},$$

$$I_k(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]} \frac{w_r^{(k)}(x, y)}{r!},$$

$$I_k(x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} N_{-k, m, n} \frac{x^m y^n}{2^{m+n} m!\, n!},$$

---

(1) Die zweite Hälfte dieser Thèse ist bis auf einige Fehler eine wörtliche Uebersetzung der entsprechenden §§ meiner Dissertation (1922), welche Herrn Jekhowsky wohl bekannt war. Siehe meine Abhandlung « Sur les fonctions de Bessel à plusieurs variables » im Journal de la Société Physico-Mathématique de Léningrad, t. 2, 1928, fasc. 1, p. 1.

(2) Abgedruckt in Annales de l'Institut des Mines à Léningrad, t. VII, fasc. 2, 3; 1928, 1929.

wo $v_r(x, y)$ die Polynome sind, welche sich leicht durch die Tschebyscheff-Hermite'schen Polynome ausdrücken lassen und die erzeugende Funktion besitzen

$$e^{\frac{x}{2}t+\frac{y}{2}t^2}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{v_r(x, y)}{2^r\cdot r!}t^r,$$

$(-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]}\frac{w_r^{(k)}(x, y)}{2\cdot r!}$ die homogenen Polynome von der Form

$$\frac{1}{2^r}\sum_{m, n=0}^{r}N_{-k, m, n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

sind, welche sich auf Grund der Entwickelungen

$$(x\sin\varphi+y\sin 2\varphi)^{2s}=\frac{1}{2}w_{2s}^{(0)}+\sum_{k=1, 2, \ldots.}w_{2s}^{(k)}\cos k\varphi,$$

$$(x\sin\varphi+y\sin 2\varphi)^{2s+1}=\sum_{k=1, 2, \ldots.}w_{2s+1}^{(k)}\sin k\varphi$$

definieren lassen, und $N_{-k, m, n}$ die Zahlen von Cauchy sind.

J. Pérès hat in der oben erwähnten Note in Comptes rendus gezeigt, dass die Rekursionsformeln und die partiellen Differentialgleichungen, welchen $I_k(x, y)$ genügt, vier linear unabhängige Lösungen besitzen, durch welche jede ihre Lösung sich linear ausdrücken lässt. Ich habe alle diese Lösungen für beliebigen Index k in der Form des Schleifenintegrals

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})+\frac{y}{2}(t^2-t^{-2})}t^{-k-1}dt$$

dargestellt.

Für den Fall der gewöhnlichen Bessel'schen Funktionen ($y=0$) hat man, (wenn man der Kürze halber x reellen und positiv voraussetzt), wie es zuerst Sonin (Collection mathématique, t. 5, 1870, Moscou) und Schläfli (Annali di Matematica, 2e série, t. 5, 1873, p. 204) vorgeschlagen haben, die zwei Wege C_1 und C_2 zu betrachten (man sehe die Figur 1), indem man die t Ebene vermittelst der imaginären Axe in zwei Halbebenen zerlegt und C_1 oder C_2 in der entsprechenden Halbebene dem Punkte ∞ oder 0 sich unbegrenzt nähern bezw. von ihm auslaufen lässt.

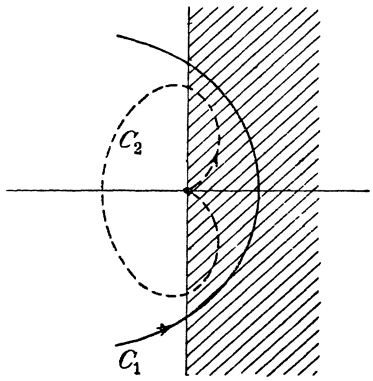


Fig. 1.

Dem entsprechend kann man für den Fall zweier Variabeln unter der Voraussetzung $y>0$ die vier Integrationswege C_1, C_2, C_3, C_4 betrachten, die sich dem Punkte ∞ oder 0 innerhalb der entsprechenden auf der Figur 2 gezeichneten Sectoren unbegrenzt nähern bezw. von ihm auslaufen.

Man erhält auf diese Weise die vier linear unabhängige Lösungen $I_k^{(1)}, I_k^{(2)}, I_k^{(3)}, I_k^{(4)}$ der Pérès'schen Rekursionsformeln oder des Systems der partiellen Differentialgleichugen für die verallgemeinerte Bessel'sche Funktion.

Alle diese vier Funktionen kann man, wie im Falle einer Veränderlichen, aus einer von ihnen auf folgende Art erhalten. Die zwei Funktionen $I_k^{(3)}$, $I_k^{(4)}$ entstehen jede aus der entsprechenden anderen $I_k^{(1)}$, $I_k^{(2)}$ vermittelst der Inversion mit Wechseln des Zeichens in der t Ebene, das heisst durch die Substitution $t=-\frac{1}{t_1}$ im Integralausdruck

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})+\frac{y}{2}(t^2-t^{-2})}t^{-k-1}dt.$$

Ausserdem, gehen die Funktionen $I_k^{(1)}$, $I_k^{(3)}$ respective in $I_k^{(2)}$, $I_k^{(4)}$ über, wenn die Variable y in ihrer Ebene in der negativen Richtung um den Punkt $y=0$ herumgeht. Denn dann wächst in Folge der immer stattfindenden Bedingung (1) $R(yt^2)<0$ (für die Integrationswege C_1, C_2) oder $R(yt^{-2})>0$ (für die Integrationswege C_3, C_4) das Argument von t um π oder $-\pi$.

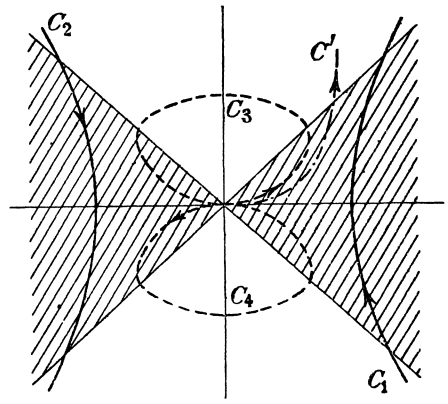


Fig. 2.

Die Punkte $x=\infty$, $y=\infty$ und $y=0$ sind die einzigen singulären und dabei wesentlich singulären Punkte der Funktionen $I_k^{(m)}$, $m=1, 2, 3, 4$, welche ganze Funktionen von x sind.

Die Substitutionen, welche diese Funktionen bei der Umkreisung in der y Ebene der Punkte $y=0$ oder $y=\infty$ erleiden, führen leicht zu der Fuchs'schen Fundamentalgleichung und zu dem Fuchs'schen Fundamentalsystem der Integrale, in der Umgebung der Punkte $y=0$ oder $y=\infty$, für das System der partiellen Differentialgleichungen, welchem die verallgemeinerten Bessel'schen Funktionen genügen.

Für den ganzen Index k werden die vier Funktionen $I_k^{(m)}(x, y)$, $m=1, 2, 3, 4$, nicht mehr linear unabhängig, denn dann wird $I_k^{(1)}+I_k^{(2)}=I_k$ und $I_k^{(3)}+I_k^{(4)}=I_k$, weil die beiden aneinander schliessenden Wege C_1, C_2 oder C_3, C_4 einen einzigen geschlossenen Weg um den Punkt $t=0$ herum bilden.

Der Integrationsweg C' (Fig. 2) gibt dann, wie im Falle einer Veränderlichen, eine neue Lösung, welche zu der Verallgemeinerung der Hankel'schen Funktion

$$H_k(x, y)=\frac{I_{-k}(x, -y)-e^{k\pi i}I_k(x, y)}{2i\sin k\pi}$$

(1) Mit $R(z)$ ist der reelle Teil von z bezeichnet.

oder der Neumann'schen Funktion

$$Y_k(x, y) = \frac{\cos k\pi I_k(x, y) - I_{-k}(x, -y)}{\sin k\pi}$$

führt.

Für die Funktionen $I_k^{(1)}(x, y)$, $H_k(x, y)$ hat man sehr einfache Entwickelungen

$$I_k^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_p(x) I_{\frac{k-p}{2}}(y), \qquad H_k(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_p(x) H_{\frac{k-p}{2}}(y),$$

welche als ein specieller Fall der Additionsformel für diese Funktionen

$$I_k^{(1)}(x+x', y+y') = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_p(x, y) I_{k-p}^{(1)}(x', y'),$$

$$H_k(x+x', y+y') = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_p(x, y) H_{k-p}(x', y')$$

zu betrachten sind.

Man kann hier noch die folgende interessante Verallgemeinerung der Neumann'schen Formel anführen

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} I_{2k}(x \cos \alpha, y \cos 2\alpha) d\alpha = [I_k(x, y)]^2.$$

Ich schliesse meine Arbeit mit dem Hinweis auf mehrere Anwendungen, welche die betrachteten Funktionen bei Problemen der Mechanik finden, wo man nämlich mit der Umkehrung des Integrals (4) zu tun hat. So führt, zum Beispiel, das bekannteste Problem über kleine Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad im widerstehenden Mittel, dessen Widerstand proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit ist, welches von Poisson (Traité de mécanique, t. 1, 1833, p. 353) und in neuer Zeit von J. Horn (Zeitschrift für Math. und Phys., Bd. 49, 1903, p. 265) und Burkhardt (ibid., Bd. 63, 1915, p. 303) behandelt worden ist, zu der Gleichung

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1 - 2k^2\gamma x - (1 + 2k^2\gamma a) e^{-2k^2\gamma(x+a)}}{2k^2\gamma^2}$$

und folglich zur Umkehrung des Integrals von der Form (4) und dann zur rein trigonometrischen (ohne seculäre Glieder) Entwicklung (5). Ich erwähne noch das Problem der ebenen elastischen Linie, welches zu der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{e^2 - y^2}\sqrt{4c^2 - e^2 + y^2}}{2c^2 - e^2 + y^2}$$

führt, deren Integral durch die Reihe (5) dargestellt wird.

Es genügt hier schon die ersten Glieder der gewöhnlichen Bessel'schen Funktionen zu benutzen, um das angenäherte klassische Resultat von Poisson

(a. a. O.) und Lord Kelvin (Treatise on Natural Philosophy, P. II, Art. 612) zu erhalten (1).

In meiner Dissertation (1922) habe ich auch die anderen Anwendungen der Funktionen $I_k(x_1, x_2,....)$, auf die Gyldén'sche Theorie der Störungen und auf die bedingt periodische Entwickelungen (6) betrachtet (Man sehe auch meinen Artikel in Annales du Laboratoire mathématique de l'Université de Crimée, t. 3, 1921, p. 64 und Comptes rendus, t. 183, 1926, p. 333).

---

(1) Vgl. meinen Artikel in Messenger of Mechanics and applied Mathematics, Vol. I, Leningrad, 1929.

R. TAMBS LYCHE (Trondhjem - Norvegia)

SUR LA CONVERGENCE DE LA SÉRIE $\sum_{r=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} x \\ r \end{matrix}\right] z^r$

1. - Désignons par $z_1 = f(z)$ une substitution holomorphe autour de l'origine qui admet ce point comme point double indifférent, c'est-à-dire que le développement de $f(z)$ en série entière a la forme

$$f(z) = sz + a_1 z + a_3 z^2 + \ldots,$$

où le module de la quantité s est égal à 1.

Dans le cas où s est une racine de l'unité on sait (1) qu'il existe des domaines, contenant l'origine sur leur frontière, dans lesquels la suite des itérées $f_n(z)$ tend uniformément vers zéro, en passant d'un de ces domaines à un autre, exception faite pour le cas particulier, où pour un certain indice p on a identiquement $f_p(z) = z$.

Dans le cas où s n'est pas une racine de l'unité, donc $s = e^{i\alpha}$, α étant une quantité réelle incommensurable à π, on ne sait que très peu sur le problème de l'itération de la fonction $f(z)$. Si $f(z) = sz$ les itérées sont reparties d'une manière dense sur des cercles ayant l'origine pour centre. On en déduit, par une substitution $Z = \varphi(z)$, $Z_1 = \varphi(z_1)$, $\varphi(z)$ étant holomorphe et s'annulant à l'origine, qu'il existe une infinité de fonctions $f(z)$, telles que les itérées $f_n(z)$ sont distribuées d'une manière dense sur certaines courbes enfermant l'origine. Mais étant donnée une fonction $f(z)$, on n'a pas, en général, de moyen pour décider si elle entre dans cette catégorie. D'après M. CREMER (2) il existe, si $f(z)$ est une fonction rationnelle non linéaire, un ensemble de valeurs de a de la puissance du continu, tel que la fonction $f(z)$ pour ces valeurs de a, n'est pas une fonction à centre: les itérées $f_n(z)$ ne sont pas distribuées sur de telles courbes fermées autour de l'origine.

2. - En supposant la fonction holomorphe dans un cercle $|z| < \varrho_1$ et zéro a l'origine, il existe évidemment pour tout n naturel un certain cercle $|z| < \varrho_n$, tel que $f_n(z)$ admet un développement en série de Taylor de la forme

$$f_n(z) = s^n z + a_2^{(n)} z^2 + a_3^{(n)} z^3 + \ldots. \tag{1}$$

(1) P. FATOU: *Sur les équations fonctionnelles* (Bull. Soc. Math. de France, t. 47 (1919), p. 161-271 et t. 48 (1920), p. 33-94 et p. 208-314).

(2) H. CREMER: *Zum Zentrumproblem* (Math. Ann., B. 98 (1927), p. 151-163).

Pour les coefficients $a_p^{(n)}$ de ce développement on trouve (1) la formule

$$(2) \qquad a_p^{(n)} = \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p-r-1} s^{n-r+\frac{1}{2}(p-r)(p-r-1)} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{bmatrix} a_p^{(r)},$$

qui exprime le coefficient de z^p dans $f_n(z)$ au moyen des coefficients de z^p dans $f(z)$,...., $f_{p-1}(z)$. Le symbole $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ est défini par la formule

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{(s^n-1)(s^{n-1}-1)\ldots.(s^{n-r+1}-1)}{(s-1)(s^2-1)\ldots.(s^r-1)}$$

à cause de ses analogies avec le coefficient du binome. Cette définition s'étendra sans peine au cas de n réel quelconque, si s n'est pas une racine de l'unité. En posant donc, pour un x réel quelconque

$$(4) \qquad a_p^{(x)} = \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p-r-1} s^{x-r+\frac{1}{2}(p-r)(p-r-1)} \begin{bmatrix} x \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-r-1 \\ p-r-1 \end{bmatrix} a_p^{(r)}$$

et

$$(5) \qquad \Phi(x, z) = s^x z + a_2^{(x)} z^2 + a_3^{(x)} z^3 + \ldots.,$$

on constatera sans peine qu'on obtient par la formule (5) la solution du problème de l'itération analytique si $|s| \neq 1$. En supposant d'autre part $|s| = 1$, la convergence de la série (5) pour les x appartenant à l'intervalle $0 \leqq x < \frac{2\pi}{\alpha}$ entraîne que $f(z)$ est une fonction à centre. En effet, $a_p^{(x)}$ étant dans ce cas une fonction périodique de x de période $\frac{2\pi}{\alpha}$, les itérées $f_n(z)$ seront distribuées sur certaines courbes analytiques fermées entourant l'origine (2).

3. - Or, pour étudier la convergence de la série (5) il est d'abord nécessaire de trouver une limitation pour le module de la quantité $\begin{bmatrix} x \\ r \end{bmatrix}$. C'est le but de cet article d'en trouver la limitation la plus précise. D'après le mémoire cité de M. CREMER on sait déjà qu'il existe des valeurs de α — l'ensemble de ces valeurs ayant même la puissance du continu — telles que $\overline{\lim_{-\infty<x<\infty}} \left| \begin{bmatrix} x \\ r \end{bmatrix} \right|$ croît avec r aussi vite que l'on voudra.

Désignons d'autre part par

$$(6) \qquad \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{|a_1|} + \frac{1}{|a_2|} + \frac{1}{|a_3|} + \ldots.$$

le développement en fraction continue de $\frac{\alpha}{2\pi}$, et posons

$$(7) \qquad T_n = \left| a_{n+1}^{\frac{1}{Q_n}} \right|, \quad T = \overline{\lim} T_n,$$

en désignant par $\frac{P_n}{Q_n}$ la n-ième réduite de la fraction continue (6).

---

(1) *Une formule d'itération* (Bull. Soc. Math. de France, t. 55 (1927), p. 102-113).

(2) *Les fonctions limites d'une fonction à centre* (Comptes Rendus, t. 187 (1928), p. 102-104).

Il va s'ensuivre qu'on a

$$\overline{\lim} \left| \sqrt[r]{\begin{bmatrix} x \\ r \end{bmatrix}} \right| \leqq T,$$

le signe d'égalité étant réalisé, sauf pour certaines valeurs exceptionnelles de x.

Posons

$$\pi_r = |(s-1)(s^2-1)\ldots(s^r-1)|. \tag{8}$$

On peut d'abord établir (1), qu'il existe, dans le cas où $\overline{\lim}\, T_n$ est fini, une quantité positive A telle que

$$\pi_r > A^r.$$

Si, d'autre part, $\overline{\lim}\, T_n = \infty$ on peut constater (2) que $\left| \sqrt[r]{\begin{bmatrix} x \\ r \end{bmatrix}} \right|$ n'est pas borné uniformément en x.

Ces résultats ont été obtenus en étudiant la distribution, modulo 1, des quantités $r\frac{a}{2\pi}$ pour $r = 1, 2, 3, \ldots$. Mais les résultats les plus précis s'obtiendront en utilisant certaines identités que vérifie le symbole $\begin{bmatrix} x \\ r \end{bmatrix}$.

4. - En désignant par s une quantité complexe quelconque qui n'est pas racine de l'unité, posons

$$\psi(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r s^{\frac{r(r-1)}{2}} \frac{z^r}{(1-s)(1-s^2)\ldots(1-s^r)}. \tag{9}$$

Si $|s|<1$ cette série converge pour toute valeur de z et l'on a

$$\psi(z) = \prod_{r=0}^{\infty} (1-s^r z). \tag{10}$$

On trouve, en effet,

$$\psi(z) = (1-z)(1-sz)\ldots(1-s^{r-1}z)\psi(s^r z), \tag{11}$$

et s^r tendant vers zéro si l'on fait croître r, on obtient la formule (10). La fonction $\psi(z)$ n'ayant pas de zéro dans le cercle $|z|<1$ on aura

$$\log \psi(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \log (1-s^r z).$$

En mettant d'autre part dans la formule

$$\log (1-x) = -(x + \tfrac{1}{2}x^2 + \ldots + \tfrac{1}{p}x^p) - x^{p+1} \int_0^1 \frac{u^p du}{1-ux},$$

---

(1) *Sur la convergence de la série* $\sum_{r=0}^{\infty} \begin{bmatrix} x \\ r \end{bmatrix} z^r$ (Comptes Rendus, t. 186, (1928), p. 1810-1813).

(2) *Sur le symbole* $\begin{bmatrix} x \\ r \end{bmatrix}$ (Det kgl. Norske Vid. Selsk. Forh., B. 1, (1928), p. 100-102).

où p est un nombre naturel quelconque, $s^r z$ au lieu de x et en faisant la somme de $r=0$ à $r=k$ il s'ensuit

$$\sum_{r=0}^{k} \log(1-s^r z) = -\frac{1-s^k}{1-s} z - \frac{1-s^{2k}}{1-s^2}\frac{z^2}{2} - \ldots - \frac{1-s^{pk}}{1-s^p}\frac{z^p}{p} - R_p.$$

En supposant donc $|z|<1$ on constatera sans peine que $|R_p|$ tend vers zéro, si l'on fait tendre d'abord k, alors p vers l'infini, ce qui donne la formule

$$\log \psi(z) = -\frac{1}{1-s} z - \frac{1}{1-s^2}\frac{z^2}{2} - \ldots - \frac{1}{1-s^r}\frac{z^r}{r} - \ldots, \tag{12}$$

valable pour $|z|<1$.

En prenant d'autre part le logarithme des deux côtés de (9) on obtient un développement de $\log \psi(z)$ en série entière, dont les coefficients s'expriment en fonction de s. La comparaison avec (12) donne alors une identité de la forme

$$\frac{1}{p}\frac{1}{1-s^p} = \sum_{q=1}^{p} (-1)^{p+q-1} \sum_{\alpha} \frac{(q-1)!}{a_1!\ldots a_q!} s^{a_2+\ldots+\frac{q(q-1)}{2}a_q} \frac{1}{(1-s)^q(1-s^2)^{q-a_1}\ldots(1-s^q)^{a_q}}, \tag{13}$$

la somme intérieure s'étendant à toutes les valeurs entières non négatives des a, satisfaisant aux conditions

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_q = q \\ a_1 + 2a_2 + \ldots + q a_q = p. \end{cases}$$

Or, l'identité (13) étant établie sous la condition $|s|<1$, subsistera évidemment pour s quelconque, l'équation (13) étant une équation algébrique en s.

5. - Désignons par $\varphi(x, z)$, x étant une quantité réelle quelconque, la somme de la série

$$\varphi(x, z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r s^{\frac{r(r-1)}{2}} \begin{bmatrix} x \\ r \end{bmatrix} z^r. \tag{14}$$

Pour $|s|<1$ cette série converge si $|z|<|s^{-x}|$. On vérifie d'autre part la formule

$$\varphi(x, z) = \frac{\psi(z)}{\psi(s^x z)}. \tag{15}$$

En chassant le dénominateur et en remplaçant les fonctions par leurs séries, on aura, en effet, une identité qui a déja été démontrée (1).

Il s'ensuit donc

$$\log \varphi(x, z) = -\frac{1-s^x}{1-s} z - \frac{1-s^{2x}}{1-s^2}\frac{z^2}{2} - \ldots - \frac{1-s^{rx}}{1-s^r}\frac{x^r}{r} - \ldots \tag{16}$$

6. - Passons alors au cas $|s|=1$. Pourvu que la série (12) converge pour $|z|<A$, A étant une quantité positive, il sera de même pour la série (9) en vertu

---

(1) *En generalisasjon av binomialkoeffisienten* (Norsk Mat. Tidsskr., B. 8 (1926), p. 93-102).

de l'identité (13). Donc la fonction $\psi(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z|<A$. D'autre part, elle n'a pas de zéro dans ce cercle. Car, avec z_0 le point $s^r z_0$ serait un zéro en vertu de (11). Il y aurait alors une infinité de zéros sur le cercle $|z|=|z_0|$. (Il s'ensuit de même de (11) qu'on a $A \geqq 1$). Donc la série (14) a son rayon de convergence au moins égal à A en vertu de la relation (15).

De (11) et (15) on tire encore la formule

$$\varphi(x,z)=\frac{(1-z)(1-sz)\ldots(1-s^{r-1}z)}{(1-s^x z)(1-s^{x+1}z)\ldots(1-s^{x+r-1}z)}\,\varphi(x,s^r z). \tag{17}$$

Or, si x est la somme d'un nombre entier et un multiple de $\frac{2\pi}{\alpha}$, $\varphi(x,z)$ se réduit à une fonction rationnelle. Sinon, il est d'abord impossible que $\varphi(x,z)$ soit holomorphe dans un cercle de rayon plus grand que l'unité avec l'origine pour centre. Si d'autre part le rayon de convergence de la série (14) est $B \geqq 1$, il suit de (17) que $\varphi(x,z)$ n'a pas de zéro à l'intérieur du cercle $|z|<B$. Donc les deux séries (14) et (16) ont le même rayon de convergence $B \geqq A$, sauf peut-être dans le cas où x est la somme d'un nombre entier et un multiple de $\frac{2\pi}{\alpha}$.

7. - Le rayon de convergence A des séries (9) et (12) est facile à déterminer. On aura en effet

$$A=\underline{\lim}\,\left|\sqrt[r]{1-s^r}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(1-s^{Q_n})^{\frac{1}{Q_n}}\right|=\frac{1}{T},$$

ce qui donne aussi

$$\underline{\lim}\,\left|\sqrt[r]{(s-1)(s^2-1)\ldots(s^r-1)}\right|=\frac{1}{T}. \tag{18}$$

Cherchons alors à déterminer le rayon de convergence B de la série (16) en mettant de côté le cas où x est la somme d'un nombre entier et un multiple de $\frac{2\pi}{\alpha}$. Dans le cas où x a la forme

$$x=\frac{p}{q}\cdot\frac{2\pi}{\alpha},$$

p et q étant des nombres naturels et $q>1$ on constatera sans peine qu'on a $B=\frac{1}{T}$.

Supposons donc $\frac{\alpha x}{2\pi}$ irrationnel et posons

$$\frac{\alpha x}{2\pi}=b+\frac{1|}{b_1}+\frac{1|}{|b_2}+\frac{1|}{|b_3}+\ldots.$$

Désignons par $\frac{P_{n'}}{Q_{n'}}$ la n-ième réduite de la fraction continue à droite, et soit

$$U=\overline{\lim}\,\left|b_{n+1}^{\frac{1}{Q_{n'}}}\right|.$$

On verra qu'on a encore $B=A=\frac{1}{T}$, si l'on peut affirmer que

$$\underline{\lim}\,\left|(1-s^{Q_n x})^{\frac{1}{Q_n}}\right|=1.$$

Or, on constatera sans peine que le seul cas où cela n'aurait pas lieu, serait le suivant:

(A) - Il existe une suite de couples d'entiers positifs (p, p_i), telle qu'on a à la fois pour $p \to \infty$:

$$p_i \to \infty, \quad |a_{p+1}^{\frac{1}{Q_p}}| \to T, \quad |b_{p_i+1}^{\frac{1}{Q'_{p_i}}}| \to U > 1,$$

tandis que pour tous les p

$$Q_p = q\, Q'_{p_i}$$

q étant un entier positif.

Il reste à décider si cette condition peut jamais être réalisée.

Pour la limitation cherchée de la quantité $\left|\left[\frac{x}{r}\right]\right|$ on aura donc: On a

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \left| \sqrt[r]{\left[\frac{x}{r}\right]} \right| = T,$$

sauf pour certaines valeurs de x, soit que x est la somme d'un nombre entier et un multiple de $\frac{2\pi}{a}$, dans quel cas la limite en question est zéro ou 1 suivant les cas, soit que x est une quantité satisfaisant à la condition (A), si cela est possible; dans ce dernier cas la limite cherchée est contenue entre 1 et T.

F. LEJA (Warszawa - Polonia)

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS FRONTIÈRES DES SÉRIES ENTIÈRES DOUBLES

1. - Soit

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu} \tag{1}$$

une série entière double absolument convergente dans un domaine de deux variables complexes ne se réduisant pas à l'espace entier.

À une telle série on peut toujours faire correspondre un nombre positif $R \leqq \infty$ et une fonction positive non croissante et continue [1]

$$\varphi(\xi), \quad 0 \leqq \xi \leqq R,$$

telle que la série (1) converge absolument dans le domaine

$$|x| < R \text{ et } |y| < \varphi(|x|) \tag{2}$$

et qu'elle diverge absolument si [2]

$$|x| > R \text{ ou } |y| > \varphi(|x|).$$

Les points (x, y) satisfaisant à l'une des équations

$$\begin{aligned} &(a) && |y| = \varphi(|x|), \text{ pour } |x| \leqq R \\ &(b) && |x| = R, \text{ pour } |y| < \varphi(R) \end{aligned} \tag{3}$$

---

[1] V. F. HARTOGS: *Zur Theorie der anal. F.* (Mat. Ann., t. 62, 1906). F. LEJA: *Séries entières doubles et multiples.* (Prace mat. fiz. t. 33, Varsovie, 1925).

[2] Le nombre R représente la limite supérieure de tous les $\xi > 0$ pour lesquels toutes les séries simples

$$A_\nu(\xi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} |a_{\mu\nu}| \xi^{\mu}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

convergent et, en même temps, le rayon de convergence de la série entière simple

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(\xi) y^{\nu} \tag{α}$$

est positif. La fonction $\varphi(\xi)$ représente, pour $0 < \xi < R$, le rayon de convergence de la série (α) et, pour $\xi = 0$ et $\xi = R$, on a $\varphi(0) = \varphi(+0)$, $\varphi(R) = \varphi(R-0)$.

Il suit de cette définition que $\varphi(\xi)$ peut prendre des valeurs infinies.

constituent la frontière du domaine de la convergence absolue de la série (1) (1). Appelons *point frontière de convergence* (divergence) un point (x, y) situé sur la frontière (3) du domaine (2) en lequel la série (1) converge (2) (diverge).

Le but de ma communication est d'examiner les deux problèmes que voici:

1) La somme

$$f(xy)=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}x^{\mu}y^{\nu} \tag{4}$$

de la série (1) est-elle continue en un point frontière de convergence?

2) Quelle est la structure de l'ensemble des points frontières de divergence?

Ces deux problèmes seront appelés respectivement *problème d'Abel* et *problème de la structure*. Le premier d'eux a été déjà résolu dans un cas spécial par T. BROMWICH et G. HARDY (3); ici sera donnée sa résolution générale. Le second problème présente des difficultés très sérieuses; il n'est pas encore résolu même dans le cas des séries entières simples. Mon but sera d'attirer l'attention sur une différence essentielle, concernant ce problème, qui existe entre les séries entières simples et doubles.

2. - Problème d'Abel. Supposons què $x=y=1$ soit un point frontière de convergence de la série (1) et posons

$$g_j(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}x^i, \qquad j=0, 1, 2,....$$

$$h_i(y)=\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}y^j, \qquad i=0, 1, 2,....$$

On sait que, la série (1) étant absolument convergente dans le domaine $|x|<1$, $|y|<1$, les séries $g_j(x)$ et $h_i(y)$, appelées respectivement lignes et colonnes de la série double (1), convergent dans le cercle unité.

Désignons par Δ_a, a étant un nombre positif $\geqq 1$, le domaine du plan complexe défini par les inégalités

$$\Delta_a \left\{ |x|<1, \quad \frac{|1-x|}{1-|x|}<a \right\}$$

---

(1) L'équation (3*b*) dévient superflue si $R=\infty$ ou si $\varphi(R)=0$.

(2) Une série double $\sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu}$ converge vers s si à tout $\varepsilon<0$ correspond un indice p tel que la somme partielle

$$s_{\mu\nu}=\sum_{i=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{\nu} a_{ij}$$

diffère de s de moins de ε pour $\mu>p$ et $\nu>p$.

(3) Proceed. of London Math. Soc. (2) t. 2, 1905.

et posons

$$\limsup_{x\to 1,\ x\varepsilon\Delta_\alpha} |g_j(x)| = A_j$$

$$\limsup_{y\to 1,\ y\varepsilon\Delta_\beta} |h_i(y)| = B_i,$$

α et β étant deux nombres fixes $\geqq 1$.

THÉORÈME 1. - *Si* x=y=1 *est un point frontière de convergence de la série* (4) *tel que*

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} = s, \tag{5}$$

les conditions

$$A_j \neq \infty, \quad B_i \neq \infty, \qquad i,j = 0,1,2,.... \tag{6}$$

sont toutes nécessaires et suffisantes pour que la limite double

$$\lim_{\substack{x\to 1,\ x\varepsilon\Delta_\alpha \\ y\to 1,\ y\varepsilon\Delta_\beta}} f(xy) = s \tag{7}$$

existe, quels que soient α et β fixes.

Démonstration. Supposons que la série (4) converge au point frontière $x=y=1$ et posons

$$s_{\mu\nu} \to s, \text{ pour } \mu,\nu \to \infty$$

où

$$s_{\mu\nu} = \sum_{i=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{\nu} a_{ij}.$$

Dans le domaine $\{|x|<1,\ |y|<1\}$ on aura

$$f(xy) - s = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \lambda(s_{ij}-s)x^i y^j$$

où

$$\lambda = (1-x)(1-y).$$

Partageons le second membre de la dernière série en quatre parties suivantes

$$\begin{aligned} f(xy) - s &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{q} + \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty} + \sum_{i=p+1}^{\infty}\sum_{j=q+1}^{\infty} - \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} \\ &= A + B + C + D, \end{aligned} \tag{8}$$

p et q étant deux nombres naturels qui seront fixés plus tard, et posons

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= (1-y)\sum_{j=0}^{q} [g_0(x) + ... + g_j(x)]y^j, \\ \psi(xy) &= (1-x)\sum_{i=0}^{p} [h_0(y) + ... + h_i(y)]x^i. \end{aligned} \tag{9}$$

On aura

$$A=\lambda\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{q}(s_{ij}-s)x^iy^j=\varphi(xy)+s(y^{q+1}-1),$$

$$B=\lambda\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}(s_{ij}-s)x^iy^j=\psi(xy)+s(x^{p+1}-1),$$

donc

$$f(xy)-s=\varphi+\psi+K \tag{10}$$

où

$$K=C+D+s(y^{q+1}-1)+s(x^{p+1}-1).$$

Considérons un $\varepsilon>0$ et fixons p et q de sorte qu'on ait

$$|s_{\mu\nu}-s|<\frac{\varepsilon}{\alpha\beta},\ \text{pour}\ \mu>p\ \text{et}\ \nu>q; \tag{11}$$

on aura évidemment $|C|<\varepsilon$ si $x\,\varepsilon\,\Delta_\alpha$ et $y\,\varepsilon\,\Delta_\beta$ et, par suite,

$$|K|<2\varepsilon \tag{12}$$

si $|1-x|$ et $|1-y|$ sont suffisamment petits et $x\,\varepsilon\,\Delta_\alpha$, $y\,\varepsilon\,\Delta_\beta$, car D tend vers zéro avec $|1-x|$ et $|1-y|$. Or, si les conditions (6) sont satisfaites, il est évident d'après (9) que

$$\lim_{x\to 1,\ y\to 1}(\varphi+\psi)=0,\ \text{pour}\ x\,\varepsilon\,\Delta_\alpha,\ y\,\varepsilon\,\Delta_\beta,$$

donc, en vertu de (10), on aura

$$|f(xy)-s|<3\varepsilon,$$

pourvu que les modules de $1-x$ et $1-y$ soient suffisamment petits et $x\,\varepsilon\,\Delta_\alpha$, $y\,\varepsilon\,\Delta_\beta$, ce qui prouve l'existence de la limite (7).

Pour terminer la démonstration, il suffit de démontrer la proposition suivante:

THÉORÈME 2. - *Si* x=y=1 *est un point frontière de convergence de la série* (4) *et si les conditions* (6) *ne sont pas toutes satisfaites, on a toujours*

$$\limsup_{\substack{x\to 1,\ x\,\varepsilon\,\Delta_\alpha\\ y\to 1,\ y\,\varepsilon\,\Delta_\beta}}|f(xy)|=\infty. \tag{13}$$

Démonstration. Supposons qu'on ait, par exemple, $A_k=\infty$ et fixons dans la formule (8) les entiers p et q de sorte que l'inégalité (11) soit satisfaite et que $k<q$. L'inégalité (12) restera vraie et, en vertu de (10), on aura pour $x\,\varepsilon\,\Delta_\alpha$ et $y\,\varepsilon\,\Delta_\beta$

$$|f(xy)|\geqq|\varphi+\psi|-|s+2\varepsilon| \tag{14}$$

si le module de $1-x$ est suffisamment petit.

Mais, étant $k<q$, $A_k=\infty$, au moins une des fonctions

$$G_j(x)=g_o(x)+\ldots.+g_j(x),\qquad j=0,1,\ldots,q$$

n'est pas bornée dans la partie Δ_α du voisinage de $x=1$. Il en resulte immédiatement que, quel petit que soit $\varepsilon>0$, il existe dans le domaine

$$|1-y|<\varepsilon, \quad y \varepsilon \Delta_\beta$$

un y tel pour lequel la fonction de x

$$\varphi(xy)=(1-y)\sum_{j=0}^{q} G_j(x)y^j$$

n'est pas bornée dans la partie Δ_α du voisinage de $x=1$ et, par suite, la fonction $(\varphi+\psi)$ n'est pas bornée dans ce voisinage car, quel que soit y, $\psi(xy)\to 0$ si $x\to 1$. Cela entraîne la formule (13) en vertu de (14), c. q. f. d.

Remarquons que la limite (7) peut exister sans que les conditions (6) soient toutes satisfaites, si la série (5) est divergente, comme le montre l'exemple suivant

$$f(xy)=(1-y)^{\frac{1}{1-r}}.$$

La limite (7) de cette fonction (sa détermination étant convenablement choisie) est égale à zéro, bien que toutes les limites A_k, $k>1$, de la série entière double correspondante sont infinies.

3. - On distingue plusieurs modes de convergence d'une série double $\sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu}$ qui diffèrent de la convergence considérée plus haut. Par exemple, si toutes les séries simples $\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$, $\nu=0, 1,\ldots$ convergent et si la série réitérée

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\Big) \tag{15}$$

converge, on dit que la série double (5) *converge par lignes*. D'autre part, si la série simple

$$\sum_{N=0}^{\infty}\Big(\sum_{p\mu+q\nu=N} a_{\mu\nu}\Big) \tag{16}$$

converge, p et q étant deux nombres naturels fixes, nous dirons que la série (5) *converge par la diagonale* (p, q).

La convergence des séries (15) et (16) n'entraîne nullement la convergence proprement dite de la série (5). Par exemple, si l'on pose:

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}, \text{ pour } |\mu-\nu|=2k \\ &= 1, \text{ pour } \mu=\nu \\ &= 0, \text{ dans tous les autres cas,} \end{aligned}$$

k étant un entier fixe, la série $\sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu}$ sera divergente, tandis que les séries

réitérées $\sum_{\mu}\left(\sum_{\nu} a_{\mu\nu}\right)$, $\sum_{\mu}\left(\sum_{\nu} a_{\mu\nu}\right)$ et les $(2k-1)$ séries diagonales (16), où

$$p=2k-q, \quad q=1, 2, \ldots, 2k-1$$

convergent toutes vers la même somme $s=k$.

De même, la convergence des séries (15) et (16) n'entraine nullement l'existence de la limite (7). Néanmoins elle entraîne l'existence de certaines limites plus restrictives que voici:

1) *Si la série diagonale* (16) *converge vers* s, *et si* x=y=1 *est un point frontière de la série* (4), *on a*

$$\lim_{x^p=y^q\to 1} f(xy)=s, \text{ pour } x\varepsilon\Delta_\alpha,$$

où α *est un nombre quelconque* $\geqq 1$.

2) *Si la série réitérée* (15) *converge vers* s, *et si* x=y=1 *est un point frontière de* (4), *il existe la limite*

$$\lim_{\substack{y\to 1\\ y\varepsilon\Delta_\beta}}\left\{\lim_{\substack{x\to 1\\ x\varepsilon\Delta_\alpha}} f(xy)\right\}=s \ (^1), \ \alpha \text{ et } \beta \text{ quelconques} \geqq 1, \tag{17}$$

lorsque la condition additionelle suivante est satisfaite:

$$|g_j(x)|<M, \text{ pour } |1-x|<S, \ x\varepsilon\Delta_\alpha \tag{18}$$

où j=0, 1, 2,.... *et* M *et* S *sont des nombres positifs quelconques.*

La première de ces propositions est évidente et la seconde resulte de la formule

$$\begin{aligned} f(xy)&=\sum_{j=0}^{q} f_j(x)\cdot y^j+\sum_{j=q+1}^{\infty} f_j(x)y^j+\sum_{j=0}^{\infty} l_j y^j \\ &=A+B+C, \end{aligned}$$

où $l_j=\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$, $f_j(x)=g_j(x)-l_j$, car si $x\varepsilon\Delta_\alpha$ et $y\varepsilon\Delta_\beta$, C tend vers s pour $y\to 1$, B est arbitrairement petit si y est fixe, $|1-x|<\delta$ et q est suffisamment grand, et enfin A tend vers zéro avec $|1-x|$, quel que soit y et q fixe.

Observons que la condition (18) n'est pas nécessaire pour l'existence de la limite (17); elle peut être remplacée par une autre que voici:

$$\limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|g_j(x)|}\leqq 1, \tag{19}$$

cette inégalité étant *uniformement* satisfaite dans le voisinage de $x=1$, $x\varepsilon\Delta_\alpha$, c'est-à-dire, à tout $\varepsilon>0$ doivent correspondre un p et un δ tels qu'on ait

$$|g_j(x)|<(1+\varepsilon)^j, \text{ pour } j>p, \ |1-x|<\delta, \ x\varepsilon\Delta_\alpha.$$

---

(1) C'est-à-dire, quel que soit $\varepsilon>0$, il existe un $\delta(\varepsilon)$ tel qu'à tout y appartenant au domaine $|1-y|<\delta$, $y\varepsilon\Delta_\beta$, correspond un $\delta'(y)$ tel qu'on a (pour ce y)

$$|f(xy)-s|<\varepsilon, \text{ si } |1-x|<\delta', \ x\varepsilon\Delta_\alpha.$$

Mais cette dernière condition, moins restrictive que la condition (18), n'est pas non plus nécessaire, comme le montre l'exemple suivant:

$$f(xy)=\sum_{j=0}^{\infty}(1-x)x^{j\cdot a_j}(1+x^{a_j})^{a_j}y^{a_j}(1-y)^{a_j},$$

où a_0 est un entier quelconque et

$$a_{j+1}=2a_j+1.$$

La série (4) correspondante à cette fonction converge par lignes vers zéro au point frontière $x=y=1$ et sa limite (17) est $=0$ bien que les conditions (18) et (19) ne sont pas satisfaites car, étant

$$g_{a_j}(x)=(1-x)x^{j\cdot a_j}(1+x^{a_j})^{a_j},$$

on a

$$\sqrt[a_j]{g_{a_j}\left(1-\frac{1}{ja_j}\right)}\to 2, \text{ pour } j\to\infty.$$

Néanmoins, sans la condition (18) ou (19) la proposition 2° peut être fausse comme le montre l'exemple

$$f(xy)=\sum_{j=0}^{\infty}(1-x)(1+x^j)^jy^j$$

dans lequel la limite (17) n'existe pas bien que la série réitérée (15) correspondante converge au point $x=y=1$ vers zéro.

4. - Problème de la structure. Soit (F) l'ensemble de tous les points frontières de la série (1). Posons

$$F=C+D$$

où (C) désigne l'ensemble des points frontières de convergence et $D=F-C$.

L'ensemble (F) est composé de tous les points (x, y) satisfaisant à une des équations (3). J'ai démontré ailleurs la proposition suivante:

THÉORÈME 3. - *L'ensemble* (D) *n'a jamais des points isolés dans la partie* (3b) *de* (F).

Ce théorème est une conséquence des deux lemmes suivants: Appelons *ensemble d'unicité* chaque ensemble (E) des points du plan tels que deux séries

$$\sum a_nx^n, \quad \sum b_nx^n$$

doivent être toujours identiques si elles convergent et prennent les mêmes valeurs aux points de (E).

LEMME 1. *Si la série double*

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}a_{\mu\nu}y^{\nu} \tag{20}$$

converge pour chaque y *appartenant à un ensemble d'unicité, toutes les lignes* $\sum_{\nu} a_{\mu\nu}$, $\nu=0, 1,\ldots$ *de la série* (20) *convergent, elles aussi* (1).

LEMME 2. *Si la série* (20) *converge au point* y_0 *et si toutes ses lignes convergent elles aussi, la série* (20) *converge pour chaque* $|y|<|y_0|$ (1).

Le théorème 3 resulte immédiatement de ces lemmes; d'après eux la série (4) ne peut pas converger aux points $x=x_0$, $0<|y-y_0|<\varepsilon$ et diverger au point (x_0, y_0).

La propriété de l'ensemble (D) énoncée dans le théorème 3 est assez remarquable car, d'une part, elle n'a pas son correspondant dans la théorie des séries entières simples et, d'autre part, on peut montrer que l'ensemble (C) peut avoir des points isolés dans la partie $(3b)$ de (F). Les structures des ensembles (C) et (D) sont donc différentes. Il est naturel de se demander:

Le théorème 3 *peut-il être élargi à la partie* (3a) *de* (F)*?*

Ce probleme reste à résoudre. Je vais seulement indiquer qu'il reste dans une étroite liaison avec un autre problème que voici: Soit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z} \tag{21}$$

une série de Dirichlet généralisée, où $\lambda_0, \lambda_1,\ldots$ sont des nombres réels tout à fait quelconques.

Si une telle série converge sur une courbe fermée entourant le point z_0, *peut-elle diverger au point* z_0*?*

La réponse négative de ce problème (2) peut être utile dans la résolution du problème précédent. En effet, on sait que, si une courbe de la forme

$$\xi^{\alpha}\eta^{\beta}=c, \text{ où } \alpha+\beta=1, \qquad \alpha>0, \ \beta>0,$$

dite courbe hyperbolique, a trois points A, B et C communs avec la courbe $(3a)$

$$\eta=\varphi(\xi), \quad 0\leqq\xi\leqq R, \tag{22}$$

l'arc ABC de la courbe (22) est un arc hyperbolique.

Céla posé, supposons que la courbe $(3a)$ correspondant à une série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\mu_k} y^{\nu_k}, \quad \mu_k, \nu_k \text{ entiers croissant avec } k, \tag{23}$$

plus spéciale que la série (1), ait la forme d'un arc hyperbolique

$$|x|^{\alpha}|y|^{\beta}=c, \text{ pour } r_1<|y|<r_2, \tag{24}$$

---

(1) F. LEJA. C. R. t. 185, p. 1103, 1927.

(2) F. HARTOGS. *Dissertation*, München 1904.

(3) Il suffirait même de savoir que la série (21) n'a pas des points de divergence isolés.

et que cet arc contienne un point de divergence $(x_0 y_0)$ de la série (23). Posons dans (23)

$$x^\alpha y^\beta = c, \quad y = e^z;$$

on obtient la série de Dirichlet généralisée

$$\sum_k (a_k c^{\frac{\mu_k}{\alpha}}) e^{\lambda_k z}, \text{ où } \lambda_k = \nu_k - \frac{\beta}{\alpha}\mu_k, \tag{25}$$

divergente au point $z_0 = \lg y_0$ et on voit tout de suite que, si la série (25) n'a pas des points de divergence isolés, la série (23) n'en a pas tels qui soient isolés dans la partie (24) de la frontière.

L. M. MILNE-THOMSON (Greenwich - Inghilterra)

A SEVEN-DECIMAL TABLE OF INVERSE HYPERBOLIC COTANGENTS

If $x = \coth y = \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}$.

Then $y = \coth^{-1} x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$

y is thus a many valued function of x.

In the case where x is a real positive number not less than unity the real value of y is

$$\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$$

denoting by $\ln z$ the real natural logarithm of the positive real number z.

The table gives the real value of y for values of x between 1.001 and 60: for the following ranges of the argument x:

$$1.001-1.150, \quad 1.15-5.00, \quad 5.0-15.0, \quad 15-60.$$

It may be observed that $\coth^{-1} x$ is also the value of the definite integral

$$\int_x^\infty \frac{dx}{x^2-1}.$$

The values of $\coth^{-1} x$ were calculated individually from the formula

$$\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$$

using the seven decimal table of natural logarithms calculated by Dase (1).

Since the rounding-off error in Dase's Table does not exceed 0.5 units of the last decimal the error of the present table may exceptionally attain, but should not exced, 1 unit in the last decimal.

The table was constructed by calculating the individual values as described, transcribing to difference sheets and differencing until a smooth difference was obtained. Any want of smoothness in the differences, pointing to errors in transcription, or calculation was examined thus giving a satisfactory check on the correctness of the values.

---

(1) Annalen d. k. k. Sternwarte in Wien. Neuer Folge. 14ten Band. 1851.

The table was then built up from the second differences on a Burrough's adding machine which printed all the figures and thus checked the correctness of the differencing and gave a faithful transcription of the values. This method eliminated the possibility of errors in the leading figures.

The first 25 values of the table could not be checked in this manner owing to the large value of the higher differences. The necessary check was obtained by noting that the numerical difference between the first differences of $\coth^{-1} x$ and $\frac{1}{2} \ln (x-1)$ over this range is smooth, varying only between 2498 and 2469. This difference was formed on the adding machine and the function built up from the first differences so checked.

x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +	x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +
1.001	3.8 007 012			1.027	2.1 592 376		6 863
		3 463 238				179 372	
1.002	3.4 543 774			1.028	2.1 413 004		6 380
		2 024 829				172 992	
1.003	3.2 518 945			1.029	2.1 240 012		5 948
		1 435 915				167 044	
1.004	3.1 083 030			1.030	2.1 072 968		5 558
		1 113 223				161 486	
1.005	2.9 969 807			1.031	2.0 911 482		5 204
		909 115				156 282	
1.006	2.9 060 692			1.032	2.0 755 200		4 883
		768 261				151 399	
1.007	2.8 292 431			1.033	2.0 603 801		4 594
		665 166				146 805	
1.008	2.7 627 265			1.034	2.0 456 996		4 324
		586 426				142 481	
1.009	2.7 040 839			1.035	2.0 314 515		4 084
		524 315				138 397	
1.010	2.6 516 524			1.036	2.0 176 118		3 856
		474 064				134 541	
1.011	2.6 042 460			1.037	2.0 041 577		3 654
		432 570				130 887	
1.012	2.5 609 890			1.038	1.9 910 690		3 463
		397 730				127 424	
1.013	2,5 212 160			1.039	1.9 783 266		3 286
		368 056				124 138	
1.014	2.4 844 104			1.040	1.9 659 128		3 126
		342 482				121 012	
1.015	2.4 501 622			1.041	1.9 538 116		2 973
		320 212				118 039	
1.016	2.4 181 410			1.042	1.9 420 077		2 834
		300 644				115 205	
1.017	2.3 880 766			1.043	1.9 304 872		2 705
		283 314				112 500	
1.018	2.3 597 452			1.044	1.9 192 372		2 581
		267 859				109,919	
1.019	2.3 329 593			1.045	1.9 082 453		2 468
		253 991				107 451	
1.020	2.3 075 602			1.046	1.8 975 002		2 364
		241 476				105 087	
1.021	2.2 834 126			1.047	1.8 869 915		2 262
		230 126				102 825	
1.022	2.2 604 000			1.048	1.8 767 090		2 169
		219 787				100 656	
1.023	2.2 384 213			1.049	1.8 666 434		2 082
		210 327				98 574	
1.024	2.2 173 886			1.050	1.8 567 860		2 000
		201 640				96 574	
1.025	2.1 972 246		8 005	1.051	1.8 471 286		1 920
		193 635				94 654	
1.026	2.1 778 611		7 400	1.052	1.8 376 632		1 850
		186 235				92 804	

x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +	x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +
1.053	1.8 283 828		1 778	1.079	1.6 350 972		801
		91 026				60 489	
1.054	1.8 192 802		1 714	1.080	1.6 290 483		779
		89 312				59 710	
1.055	1.8 103 490		1 652	1.081	1.6 230 773		762
		87 660				58 948	
1.056	1.8 015 830		1 593	1.082	1.6 171 825		742
		86 067				58 206	
1.057	1.7 929 763		1 538	1.083	1.6 113 619		725
		84 529				57 481	
1.058	1.7 845 234		1 487	1.084	1.6 056 138		707
		83 042				56 774	
1.059	1.7 762 192		1 434	1.085	1.5 999 364		692
		81 608				56 082	
1.060	1.7 680 584		1 388	1.086	1.5 943 282		674
		80 220				55 408	
1.061	1.7 600 364		1 342	1.087	1.5 887 874		660
		78 878				54 748	
1.062	1.7 521 486		1 301	1.088	1.5 833 126		644
		77 577				54 104	
1.063	1.7 443 909		1 258	1.089	1.5 779 022		630
		76 319				53 474	
1.064	1.7 367 590		1 220	1.090	1.5 725 548		617
		75 099				52 857	
1.065	1.7 292 491		1 182	1.091	1.5 672 691		602
		73 917				52 255	
1.066	1.7 218 574		1 148	1.092	1.5 620 436		590
		72 769				51 665	
1.067	1.7 145 805		1 112	1.093	1.5 568 771		577
		71 657				51 088	
1.068	1.7 074 148		1 080	1.094	1.5 517 683		565
		70 577				50 523	
1.069	1.7 003 571		1 050	1.095	1.5 467 160		552
		69 527				49 971	
1.070	1.6 934 044		1 018	1.096	1.5 417 189		542
		68 509				49 429	
1.071	1.6 865 535		992	1.097	1.5 367 760		531
		67 517				48 898	
1.072	1,6 798 018		963	1.098	1.5 318 862		518
		66 554				48 380	
1.073	1.6 731 464		936	1.099	1.5 270 482		510
		65 618				47 870	
1.074	1.6 665 846		914	1.100	1,5 222 612		499
		64 704				47 371	
1.075	1.6 601 142		886	1.101	1.5 175 241		489
		63 818				46 882	
1.076	1.6 537 324		866	1.102	1.5 128 359		479
		62 952				46 403	
1.077	1.6 474 372		842	1.103	1.5 081 956		471
		62 110				45 932	
1.078	1.6 412 262		820	1.104	1.5 036 024		460
		61 290				45 472	

x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +	x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +
1.105	1.4 990 552		453	1.131	1.3 945 746		292
		45 019				35 676	
1.106	1.4 945 533		444	1.132	1.3 910 070		284
		44 575				35 392	
1.107	1.4 900 958		435	1.133	1.3 874 678		282
		44 140				35 110	
1.108	1.4 856 818		428	1.134	1.3 839 568		278
		43 712				34 832	
1.109	1.4 813 106		420	1.135	1.3 804 736		272
		43 292				34 560	
1.110	1.4 769 814		412	1.136	1.3 770 176		271
		42 880				34 289	
1.111	1.4 726 934		404	1.137	1.3 735 887		264
		42 476				34 025	
1.112	1.4 684 458		399	1.138	1.3 701 862		262
		42 077				33 763	
1.113	1.4 642 381		390	1.139	1.3 668 099		258
		41 687				33 505	
1.114	1.4 600 694		383	1.140	1.3 634 594		253
		41 304				33 252	
1.115	1.4 559 390		377	1.141	1.3 601 342		251
		40 927				33 001	
1.116	1.4 518 463		371	1.142	1.3 568 341		247
		40 556				32 754	
1.117	1.4 477 907		363	1.143	1.3 535 587		243
		40 193				32 511	
1.118	1.4 437 714		359	1.144	1.3 503 076		241
		39 834				32 270	
1.119	1.4 397 880		352	1.145	1.3 470 806		236
		39 482				32 034	
1.120	1.4 358 398		346	1.146	1.3 438 772		233
		39 136				31 801	
1.121	1.4 319 262		340	1.147	1.3 406 971		231
		38 796				31 570	
1.122	1.4 280 466		336	1.148	1.3 375 401		227
		38 460				31 343	
1.123	1.4 242 006		328	1.149	1.3 344 058		224
		38 132				31 119	
1.124	1.4 203 874		325	1.15	1.3 312 939		22 164
		37 807				299 491	
1.125	1.4 166 067		318	1.16	1.3 013 448		19 463
		37 489				280 028	
1.126	1.4 128 578		315	1.17	1.2 733 420		17 224
		37 174				262 804	
1.127	1.4 091 404		308	1.18	1.2 470 616		15 352
		36 866				247 452	
1.128	1.4 054 538		304	1.19	1.2 223 164		13 764
		36 562				233 688	
1.129	1.4 017 976		300	1.20	1.1 989 476		12 414
		36 262				221 274	
1.130	1.3 981 714		294	1.21	1.1 768 202		11 246
		35 968				210 028	

x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +	x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +
1.22	1.1 558 174		10 242	1.48	0.8 211 138		2 091
		199 786				82 975	
1.23	1.1 358 388		9 360	1.49	0.8 128 163		2 002
		190 426				80 973	
1.24	1.1 167 962		8 587	1.50	0.8 047 190		1 919
		181 839				79 054	
1.25	1.0 986 123		7 908	1.51	0.7 968 136		1 845
		173 931				77 209	
1.26	1.0 812 192		7 305	1.52	0.7 890 927		1 770
		166 626				75 439	
1.27	1.0 645 566		6 766	1.53	0.7 815 488		1 703
		159 860				73 736	
1.28	1.0 485 706		6 285	1.54	0.7 741 752		1 636
		153 575				72 100	
1.29	1.0 332 131		5 854	1.55	0.7 669 652		1 576
		147 721				70 524	
1.30	1.0 184 410		5 463	1.56	0.7 599 128		1 520
		142 258				69 004	
1.31	1.0 042 152		5 114	1.57	0.7 530 124		1 463
		137 144				67 541	
1.32	0.9 905 008		4 790	1.58	0.7 462 583		1 412
		132 354				66 129	
1.33	0.9 772 654		4 503	1.59	0.7 396 454		1 360
		127 851				64 769	
1.34	0.9 644 803		4 235	1.60	0.7 331 685		1 316
		123 616				63 453	
1.35	0.9 521 187		3 993	1.61	0.7 268 232		1 271
		119 623				62 182	
1.36	0.9 401 564		3 770	1.62	0.7 206 050		1 228
		115 853				60 954	
1.37	0.9 285 711		3 564	1.63	0.7 145 096		1 188
		112 289				59 766	
1.38	0.9 173 422		3 377	1.64	0.7 085 330		1 148
		108 912				58 618	
1.39	0.9 064 510		3 199	1.65	0.7 026 712		1 114
		105 713				57 504	
1.40	0.8 958 797		3 040	1.66	0.6 969 208		1 076
		102 673				56 428	
1.41	0.8 856 124		2 889	1.67	0.6 912 780		1 044
		99 784				55 384	
1.42	0.8 756 340		2 750	1.68	0.6 857 396		1 014
		97 034				54 370	
1.43	0.8 659 306		2 621	1.69	0.6 803 026		978
		94 413				53 392	
1.44	0.8 564 893		2 498	1.70	0.6 749 634		952
		91 915				52 440	
1.45	0.8 472 978		2 387	1.71	0.6 697 194		926
		89 528				51 514	
1.46	0.8 383 450		2 282	1.72	0.6 645 680		896
		87 246				50 618	
1.47	0.8 296 204		2 180	1.73	0.6 595 062		871
		85 066				49 747	

x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +	x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +
1.74	0.6 545 315		847	2.00	0.5 493 062		443
		48 900				33 113	
1.75	0.6 496 415		823	2.01	0.5 459 949		435
		48 077				32 678	
1.76	0.6 448 338		799	2.02	0.5 427 271		426
		47 278				32 252	
1.77	0.6 401 060		780	2.03	0.5 395 019		417
		46 498				31 835	
1.78	0.6 354 562		756	2.04	0.5 363 184		408
		45 742				31 427	
1.79	0.6 308 820		737	2.05	0.5 331 757		400
		45 005				31 027	
1.80	0.6 263 815		718	2.06	0.5 300 730		391
		44 287				30 636	
1.81	0.6 219 528		699	2.07	0.5 270 094		385
		43 588				30 251	
1.82	0.6 175 940		680	2.08	0.5 239 843		375
		42 908				29 876	
1.83	0.6 133 032		663	2.09	0.5 209 967		369
		42 245				29 507	
1.84	0.6 090 787		648	2.10	0.5 180 460		361
		41 597				29 146	
1.85	0.6 049 190		629	2.11	0.5 151 314		354
		40 968				28 792	
1.86	0.6 008 222		616	2.12	0.5 122 522		347
		40 352				28 445	
1.87	0.5 967 870		600	2.13	0.5 094 077		341
		39 752				28 104	
1.88	0.5 928 118		586	2.14	0.5 065 973		333
		39 166				27 771	
1.89	0.5 888 952		570	2.15	0.5 038 202		329
		38 596				27 442	
1.90	0.5 850 356		559	2.16	0.5 010 760		322
		38 037				27 120	
1.91	0.5 812 319		544	2.17	0.4 983 640		314
		37 493				26 806	
1.92	0.5 774 826		533	2.18	0.4 956 834		310
		36 960				26 496	
1.93	0.5 737 866		519	2.19	0.4 930 338		304
		36 441				26 192	
1.94	0.5 701 425		508	2.20	0.4 904 146		299
		35 933				25 893	
1.95	0.5 665 492		497	2.21	0.4 878 253		292
		35 436				25 601	
1.96	0.5 630 056		486	2.22	0.4 852 652		289
		34 950				25 312	
1.97	0.5 595 106		474	2.23	0.4 827 340		282
		34 476				25 030	
1.98	0.5 560 630		464	2.24	0.4 802 310		278
		34 012				24 752	
1.99	0.5 526 618		456	2.25	0.4 777 558		272
		33 556				24 480	

x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +	x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +
2.26	0.4 753 078		268	2.52	0.4 198 754		175
		24 212				18 603	
2.27	0.4 728 866		262	2.53	0.4 180 151		174
		23 950				18 429	
2.28	0.4 704 916		261	2.54	0.4 161 722		171
		23 689				18 258	
2.29	0.4 681 227		253	2.55	0.4 143 464		168
		23 436				18 090	
2.30	0.4 657 791		251	2.56	0.4 125 374		166
		23 185				17 924	
2.31	0.4 634 606		245	2.57	0.4 107 450		164
		22 940				17 760	
2.32	0.4 611 666		241	2.58	0.4 089 690		161
		22 699				17 599	
2.33	0.4 588 967		238	2.59	0.4 072 091		159
		22 461				17 440	
2.34	0.4 566 506		233	2.60	0.4 054 651		157
		22 228				17 283	
2.35	0.4 544 278		232	2.61	0.4 037 368		155
		21 996				17 128	
2.36	0.4 522 282		224	2.62	0.4 020 240		151
		21 772				16 977	
2.37	0.4 500 510		223	2.63	0.4 003 263		152
		21 549				16 825	
2.38	0.4 478 961		219	2.64	0.3 986 438		147
		21 330				16 678	
2.39	0.4 457 631		215	2.65	0.3 969 760		146
		21 115				16 532	
2.40	0.4 436 516		212	2.66	0.3 953 228		144
		20 903				16 388	
2.41	0.4 415 613		208	2.67	0.3 936 840		142
		20 695				16 246	
2.42	0.4 394 918		206	2.68	0.3 920 594		142
		20 489				16 104	
2.43	0.4 374 429		202	2.69	0.3 904 490		137
		20 287				15 967	
2.44	0.4 354 142		199	2.70	0.3 888 523		136
		20 088				15 831	
2.45	0.4 334 054		195	2.71	0.3 872 692		136
		19 893				15 695	
2.46	0.4 314 161		193	2.72	0.3 856 997		132
		19 700				15 563	
2.47	0.4 294 461		190	2.73	0.3 841 434		131
		19 510				15 432	
2.48	0.4 274 951		187	2.74	0.3 826 002		130
		19 323				15 302	
2.49	0.4 255 628		185	2.75	0.3 810 700		128
		19 138				15 174	
2.50	0.4 236 490		180	2.76	0.3 795 526		126
		18 958				15 048	
2.51	0.4 217 532		180	2.77	0.3 780 478		123
		18 778				14 925	

x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +	x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +
2.78	0.3 765 553		124	3.04	0.3 416 474		91
		14 801				12 088	
2.79	0.3 750 752		121	3.05	0.3 404 386		87
		14 680				12 001	
2.80	0.3 736 072		120	3.06	0.3 392 385		88
		14 560				11 913	
2.81	0.3 721 512		118	3.07	0.3 380 472		87
		14 442				11 826	
2.82	0.3 707 070		116	3.08	0.3 368 646		84
		14 326				11 742	
2.83	0.3 692 744		116	3.09	0.3 356 904		86
		14 210				11 656	
2.84	0.3 678 534		114	3.10	0.3 345 248		84
		14 096				11 572	
2.85	0.3 664 438		112	3.11	0.3 333 676		81
		13 984				11 491	
2.86	0.3 650 454		110	3.12	0.3 322 185		83
		13 874				11 408	
2.87	0.3 636 580		110	3.13	0.3 310 777		81
		13 764				11 327	
2.88	0.3 622 816		110	3.14	0.3 299 450		79
		13 654				11 248	
2.89	0.3 609 162		105	3.15	0.3 288 202		80
		13 549				11 168	
2.90	0.3 595 613		107	3.16	0.3 277 034		78
		13 442				11 090	
2.91	0.3 582 171		103	3.17	0.3 265 944		78
		13 339				11 012	
2.92	0.3 568 832		104	3.18	0.3 254 932		76
		13 235				10 936	
2.93	0.3 555 597		102	3.19	0.3 243 996		76
		13 133				10 860	
2.94	0.3 542 464		100	3.20	0.3 233 136		74
		13 033				10 786	
2.95	0.3 529 431		100	3.21	0.3 222 350		76
		12 933				10 710	
2.96	0.3 516 498		98	3.22	0.3 211 640		72
		12 835				10 638	
2.97	0.3 503 663		97	3.23	0.3 201 002		73
		12 738				10 565	
2.98	0.3 490 925		96	3.24	0.3 190 437		72
		12 642				10 493	
2.99	0.3 478 283		95	3.25	0.3 179 944		71
		12 547				10 422	
3.00	0.3 465 736		94	3.26	0.3 169 522		70
		12 453				10 352	
3.01	0.3 453 283		92	3.27	0.3 159 170		70
		12 361				10 282	
3.02	0.3 440 922		92	3.28	0.3 148 888		68
		12 269				10 214	
3.03	0.3 428 653		90	3.29	0.3 138 674		70
		12 179				10 144	

x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +	x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +
3.30	0.3 128 530		66	3.56	0.2 886 577		52
		10 078				8 541	
3.31	0.3 118 452		67	3.57	0.2 878 036		53
		10 011				8 488	
3.32	0.3 108 441		66	3.58	0.2 869 548		50
		9 945				8 438	
3.33	0.3 098 496		66	3.59	0.2 861 110		52
		9 879				8 386	
3.34	0.3 088 617		64	3.60	0.2 852 724		50
		9 815				8 336	
3.35	0.3 078 802		65	3.61	0.2 844 388		50
		9 750				8 286	
3.36	0.3 069 052		64	3.62	0.2 836 102		50
		9 686				8 236	
3.37	0.3 059 366		61	3.63	0.2 827 866		48
		9 625				8 188	
3.38	0.3 049 741		63	3.64	0.2 819 678		48
		9 562				8 140	
3.39	0.3 040 179		62	3.65	0.2 811 538		48
		9 500				8 092	
3.40	0.3 030 679		61	3.66	0.2 803 446		49
		9 439				8 043	
3.41	0.3 021 240		60	3.67	0.2 795 403		46
		9 379				7 997	
3.42	0.3 011 861		60	3.68	0.2 787 406		48
		9 319				7 949	
3.43	0.3 002 542		59	3.69	0.2 779 457		46
		9 260				7 903	
3.44	0.2 993 282		58	3.70	0.2 771 554		45
		9 202				7 858	
3.45	0.2 984 080		60	3.71	0.2 763 696		46
		9 142				7 812	
3.46	0.2 974 938		56	3.72	0.2 755 884		46
		9 086				7 766	
3.47	0.2 965 852		56	3.73	0.2 748 118		44
		9 030				7 722	
3.48	0.2 956 822		58	3.74	0.2 740 396		44
		8 972				7 678	
3.49	0.2 947 850		56	3.75	0.2 732 718		
		8 916				7 633	
3.50	0.2 938 934		54	3.76	0.2 725 085		
		8 862				7 590	
3.51	0.2 930 072		56	3.77	0.2 717 495		
		8 806				7 547	
3.52	0.2 921 266		53	3.78	0.2 709 948		
		8 753				7 504	
3.53	0.2 912 513		54	3.79	0.2 702 444		
		8 699				7 462	
3.54	0.2 903 814		55	3.80	0.2 694 982		
		8 644				7 419	
3.55	0.2 895 170		51	3.81	0.2 687 563		
		8 593				7 378	

x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +	x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +
3.82	0.2 680 185			4.08	0.2 501 908		
		7 336				6 374	
3.83	0.2 672 849			4.09	0.2 495 534		
		7 295				6 342	
3.84	0.2 665 554			4.10	0.2 489 192		
		7 256				6 308	
3.85	0.2 658 298			4.11	0.2 482 884		
		7 214				6 277	
3.86	0.2 651 084			4.12	0.2 476 607		
		7 174				6 244	
3.87	0.2 643 910			4.13	0.2 470 363		
		7 136				6 211	
3.88	0.2 636 774			4.14	0.2 464 152		
		7 095				6 180	
3.89	0.2 629 679			4.15	0.2 457 972		
		7 057				6 149	
3.90	0.2 622 622			4.16	0.2 451 823		
		7 018				6 117	
3.91	0.2 615 604			4.17	0.2 445 706		
		6 980				6 087	
3.92	0.2 608 624			4.18	0.2 439 619		
		6 941				6 055	
3.93	0.2 601 683			4.19	0.2 433 564		
		6 905				6 025	
3.94	0.2 594 778			4.20	0.2 427 539		
		6 866				5 995	
3.95	0.2 587 912			4.21	0.2 421 544		
		6 830				5 964	
3.96	0.2 581 082			4.22	0.2 415 580		
		6 792				5 934	
3.97	0.2 574 290			4.23	0.2 409 646		
		6 757				5 905	
3.98	0.2 567 533			4.24	0.2 403 741		
		6 721				5 876	
3.99	0.2 560 812			4.25	0.2 397 865		
		6 684				5 846	
4.00	0.2 554 128			4.26	0.2 392 019		
		6 649				5 817	
4.01	0.2 547 479			4.27	0.2 386 202		
		6 613				5 788	
4.02	0.2 540 866			4.28	0.2 380 414		
		6 579				5 761	
4.03	0.2 534 287			4.29	0.2 374 653		
		6 544				5 731	
4.04	0.2 527 743			4.30	0.2 368 922		
		6 510				5 704	
4.05	0.2 521 233			4.31	0.2 363 218		
		6 475				5 676	
4.06	0.2 514 758			4.32	0.2 357 542		
		6 442				5 648	
4.07	0.2 508 316			4.33	0.2 351 894		
		6 408				5 620	

x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +	x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +
4.34	0.2 346 274			4.60	0.2 209 164		
		5 593				4 950	
4.35	0.2 340 681			4.61	0.2 204 214		
		5 566				4 926	
4.36	0.2 335 115			4.62	0.2 199 288		
		5 539				4 904	
4.37	0.2 329 576			4.63	0.2 194 384		
		5 512				4 882	
4.38	0.2 324 064			4.64	0.2 189 502		
		5 486				4 860	
4.39	0.2 318 578			4.65	0.2 184 642		
		5 460				4 838	
4.40	0.2 313 118			4.66	0.2 179 804		
		5 434				4 816	
4.41	0.2 307 684			4.67	0.2 174 988		
		5 408				4 796	
4.42	0.2 302 276			4.68	0.2 170 192		
		5 382				4 773	
4.43	0.2 296 894			4.69	0.2 165 419		
		5 356				4 752	
4.44	0.2 291 538			4.70	0.2 160 667		
		5 331				4 731	
4.45	0.2 286 207			4.71	0.2 155 936		
		5 306				4 710	
4.46	0.2 280 901			4.72	0.2 151 226		
		5 281				4 690	
4.47	0.2 275 620			4.73	0.2 146 536		
		5 256				4 668	
4.48	0.2 270 364			4.74	0.2 141 868		
		5 232				4 648	
4.49	0.2 265 132			4.75	0.2 137 220		
		5 206				4 627	
4.50	0.2 259 926			4.76	0.2 132 593		
		5 183				4 607	
4.51	0.2 254 743			4.77	0.2 127 986		
		5 159				4 588	
4.52	0.2 249 584			4.78	0.2 123 398		
		5 134				4 566	
4.53	0.2 244 450			4.79	0.2 118 832		
		5 111				4 548	
4.54	0.2 239 339			4.80	0.2 114 284		
		5 087				4 527	
4.55	0.2 234 252			4.81	0.2 109 757		
		5 064				4 508	
4.56	0.2 229 188			4.82	0.2 105 249		
		5 041				4 488	
4.57	0.2 224 147			4.83	0.2 100 761		
		5 017				4 469	
4.58	0.2 219 130			4.84	0.2 096 292		
		4 994				4 450	
4.59	0.2 214 136			4.85	0.2 091 842		
		4 972				4 430	

x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +	x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +
4.86	0.2 087 412			6.2	0.1 627 112		886
		4 412				26 274	
4.87	0.2 083 000			6.3	0.1 600 838		841
		4 392				25 433	
4.88	0.2 078 608			6.4	0.1 575 405		802
		4 374				24 631	
4.89	0.2 074 234			6.5	0.1 550 774		765
		4 355				23 866	
4.90	0.2 069 879			6.6	0.1 526 908		728
		4 337				23 138	
4.91	0.2 065 542			6.7	0.1 503 770		697
		4 318				22 441	
4.92	0.2 061 224			6.8	0.1 481 329		664
		4 300				21 777	
4.93	0.2 056 924			6.9	0.1 459 552		635
		4 282				21 142	
4.94	0.2 052 642			7.0	0.1 438 410		608
		4 264				20 534	
4.95	0.2 048 378			7.1	0.1 417 876		582
		4 246				19 952	
4.96	0.2 044 132			7.2	0.1 397 924		558
		4 228				19 394	
4.97	0.2 039 904			7.3	0.1 378 530		532
		4 210				18 862	
4.98	0.2 035 694			7.4	0.1 359 668		514
		4 193				18 348	
4.99	0.2 031 501			7.5	0.1 341 320		491
		4 175				17 857	
5.0	0.2 027 326		1 736	7.6	0.1 323 463		471
		40 817				17 386	
5.1	0.1 986 509		1 632	7.7	0.1 306 077		455
		39 185				16 931	
5.2	0.1 947 324		1 534	7.8	0.1 289 146		435
		37 651				16 496	
5.3	0.1 909 673		1 446	7.9	0.1 272 650		418
		36 205				16 078	
5.4	0.1 873 468		1 361	8.0	0.1 256 572		404
		34 844				15 674	
5.5	0.1 838 624		1 286	8.1	0.1 240 898		388
		33 558				15 286	
5.6	0.1 805 066		1 217	8.2	0.1 225 612		374
		32 341				14 912	
5.7	0.1 772 725		1 150	8.3	0.1 210 700		360
		31 191				14 552	
5.8	0.1 741 534		1 088	8.4	0.1 196 148		348
		30 103				14 204	
5.9	0.1 711 431		1 033	8.5	0.1 181 944		334
		29 070				13 870	
6.0	0.1 682 361		981	8.6	0.1 168 074		324
		28 089				13 546	
6.1	0.1 654 272		929	8.7	0.1 154 528		312
		27 160				13 234	

x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +	x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +
8.8	0.1 141 294		300	11.5	0.0 871 766		136
		12 934				7 552	
8.9	0.1 128 360		292	11.6	0.0 864 214		129
		12 642				7 423	
9.0	0.1 115 718		280	11.7	0.0 856 791		128
		12 362				7 295	
9.1	0.1 103 356		274	11.8	0.0 849 496		121
		12 088				7 174	
9.2	0.1 091 268		262	11.9	0.0 842 322		122
		11 826				7 052	
9.3	0.1 079 442		254	12.0	0.0 835 270		118
		11 572				6 934	
9.4	0.1 067 870		248	12.1	0.0 828 336		113
		11 324				6 821	
9.5	0.1 056 546		237	12.2	0.0 821 515		112
		11 087				6 709	
9.6	0.1 045 459		232	12.3	0.0 814 806		110
		10 855				6 599	
9.7	0.1 034 604		223	12.4	0.0 808 207		105
		10 632				6 494	
9.8	0.1 023 972		218	12.5	0.0 801 713		105
		10 414				6 389	
9.9	0.1 013 558		210	12.6	0.0 795 324		100
		10 204				6 289	
10.0	0.1 003 354		204	12.7	0.0 789 035		100
		10 000				6 189	
10.1	0.0 993 354		198	12.8	0.0 782 846		95
		9 802				6 094	
10.2	0.0 983 552		192	12.9	0.0 776 752		96
		9 610				5 998	
10.3	0.0 973 942		186	13.0	0.0 770 754		91
		9 424				5 907	
10.4	0.0 964 518		182	13.1	0.0 764 847		90
		9 242				5 817	
10.5	0.0 955 276		176	13.2	0.0 759 030		88
		9 066				5 729	
10.6	0.0 946 210		170	13.3	0.0 753 301		86
		8 896				5 643	
10.7	0.0 937 314		168	13.4	0.0 747 658		85
		8 728				5 558	
10.8	0.0 928 586		160	13.5	0.0 742 100		82
		8 568				5 476	
10.9	0.0 920 018		158	13.6	0.0 736 624		80
		8 410				5 396	
11.0	0.0 911 608		152	13.7	0.0 731 228		78
		8 258				5 318	
11.1	0.0 903 350		149	13.8	0.0 725 910		78
		8 109				5 240	
11.2	0.0 895 241		145	13.9	0.0 720 670		74
		7 964				5 166	
11.3	0.0 887 277		141	14.0	0.0 715 504		74
		7 823				5 092	
11.4	0.0 879 454		135	14.1	0.0 710 412		73
		7 688				5 019	

x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +	x	$\coth^{-1} x$	Δ' −	Δ'' +
14.2	0.0 705 393		70	34	0.0 294 202		511
		4 949				8 410	
14.3	0.0 700 444		69	35	0.0 285 792		467
		4 880				7 943	
14.4	0.0 695 564		67	36	0.0 277 849		430
		4 813				7 513	
14.5	0.0 690 751		68	37	0.0 270 336		395
		4 745				7 118	
14.6	0.0 686 006		63	38	0.0 263 218		366
		4 682				6 752	
14.7	0.0 681 324		64	39	0.0 256 466		338
		4 618				6 414	
14.8	0.0 676 706		64	40	0.0 250 052		312
		4 554				6 102	
14.9	0.0 672 152		59	41	0.0 243 950		292
		4 495				5 810	
15	0.0 667 657		6 006	42	0.0 238 140		270
		41 841				5 540	
16	0.0 625 816		4 940	43	0.0 232 600		252
		36 901				5 288	
17	0.0 588 915		4 114	44	0.0 227 312		235
		32 787				5 053	
18	0.0 556 128		3 461	45	0.0 222 259		220
		29 326				4 833	
19	0.0 526 802		2 941	46	0.0 217 426		205
		26 385				4 628	
20	0.0 500 417		2 519	47	0.0 212 798		194
		23 866				4 434	
21	0.0 476 551		2 174	48	0.0 208 364		180
		21 692				4 254	
22	0.0 454 859		1 889	49	0.0 204 110		170
		19 803				4 084	
23	0.0 435 056		1 655	50	0.0 200 026		162
		18 148				3 922	
24	0.0 416 908		1 454	51	0.0 196 104		150
		16 694				3 772	
25	0.0 400 214		1 286	52	0.0 192 332		142
		15 408				3 630	
26	0.0 384 806		1 142	53	0.0 188 702		134
		14 266				3 496	
27	0.0 370 540		1 020	54	0.0 185 206		128
		13 246				3 368	
28	0.0 357 294		916	55	0.0 181 838		120
		12 330				3 248	
29	0.0 344 964		823	56	0.0 178 590		114
		11 507				3 134	
30	0.0 333 457		742	57	0.0 175 456		108
		10 765				3 026	
31	0.0 322 692		675	58	0.0 172 430		104
		10 090				2 922	
32	0.0 312 602		611	59	0.0 169 508		96
		9 479				2 826	
33	0.0 303 123		558	60	0.0 166 682		93
		8 921				—	

Sezione Sesta

L. CHWISTEK (Kraków - Polonia)

NOUVELLES RECHERCHES SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES

L'histoire des mathématiques nous fait observer les phases suivantes. D'abord il n'y avait que des nombres. Ensuite sont venues les classes. Une phase nouvelle semble commencer à présent. C'est celle des symboles. En effet, nous sommes aujourd'hui obligés de faire de la sémantique rationnelle. Comme précurseurs de cette science on devrait nommer d'une part M. HILBERT, de l'autre RICHARD et POINCARÉ. Il est intéressant de voir que les logiciens se sont motrés réfractaires à la sémantique et qu'ils ont souvent négligé l'antinomie de Richard.

C'est en 1912 que j'ai insisté pour la première fois sur l'importance de la sémantique et de l'antinomie de Richard. Aujourd'hui je vais vous présenter un système de logique embrassant la sémantique rationnelle et tel qu'il serait facile d'en obtenir l'antinomie de Richard, si l'on ne voulait pas y tenir compte des limitations dues à la pure théorie des types.

La tâche que j'ai entreprise dans ma *Theory of constructive Types* (Cracovie, 1925) était la suivante.

1°) D'abord il fallait construire l'idée d'une classe, qui a été introduite par WHITEHEAD et RUSSELL d'une façon équivoque. J'ai fini par constater qu'une classe est sûrement une fonction propositionnelle. L'idée d'une classe peut être considerée d'une façon plus large ou plus étroite. Vous pouvez regarder les classes comme des fonctions extensionnelles, vous pouvez aussi pousser les limitations jusqu'au point de réduire l'axiome du choix à l'absurde, comme j'ai fait dans *Hypothesen der Mengenlehre* (Mathem. Zeitschrift, 1926).

2°) Il fallait éliminer l'axiome de réductibilité.

D'abord il semble qu'il sera impossible d'obtenir dans ce cas un système de mathématiques.

J'ai fini cependant par constater que c'est seulement le problème d'existence qui entre en jeu. Dans le système de Whitehead et Russell on prouve qu'il y a $\aleph_n$, s'il y a $\aleph_0$, mais on ne peut pas prouver qu'il y a $\aleph_\omega$. Dans mon système, l'existence du continuum et de tous les alephs est indépendante de l'existence de $\aleph_0$ et doit être assurée par une hypothèse spéciale. Il est évident que c'est là une supériorité de mon système de saisir le problème d'existence d'une façon uniforme pour tous les nombres transfinis.

3°) Il fallait encore réduire la théorie des types aux règles sémantiques concernant la construction des expressions. Il est vrai que mes règles sont un peu longues et difficiles à saisir, mais il ne faut pas oublier que c'était là le premier essai de construction des règles sémantiques pour la théorie des classes.

Le résultat de ce travail nous a montré qu'il est possible de baser les mathématiques sur la logique indépendamment de toute métaphysique et de toute hypothèse. Ainsi l'idée d'un système de la logique et des mathématiques, qui, il y a encore vingt ans, semblait une utopie, commençait à se réaliser peu à peu. Il restait seulement à chercher la précision absolue et le plus grand degré de simplicité possible. C'était justement le but de l'ouvrage que je vais vous présenter. Vous verrez qu'on a fini par construire une sorte de machine logique, qui constitue à la fois une nouvelle partie des mathématiques.

Je commence par des règles sémantiques suivantes:

a) *Lettres.*

c, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, ξ, η, ζ, θ, ι, λ, μ, ν, ϱ, ω, *d*, *h*, *l*, *m*, *n*, sont des *lettres*;

$\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ sont des *lettres élémentaires*;

ξ, η, ζ, θ, ι, λ, μ, ν, ϱ, ω, *d*, *h*, *l*, *m*, *n* sont des *lettres sémantiques*;

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{z}$ sont des *variables apparentes.*

b) *Expressions.*

Si *E* est une lettre, *E* est une *expression*

$\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, ξ, η, ζ, θ, ι, λ, μ, ν, ϱ, ω, *l*, *m*, *n*, *d*, *h* sont des *expressions proprement dites.*

Si *E*, *F*, *G*, *H*, *I* sont des expressions, **EFGHI* est une expression.

Si *E*, *F*, *G*, *H*, *I* sont des expressions, **EFGHI* est une expression proprement dite.

Ces règles nous montrent que toute expression mathématique doit être de la forme **EFGHI*, les expressions *E*, *F*, *G*, *H*, *I* étant des lettres ou bien d'autres expressions de la même forme. On verra que les expressions purement logico-mathématiques ne contiendront que la lettre *c*, le système des mathématiques sera donc contruit à l'aide de 2 symboles seulement, c'est à dire *c* et *. On voit que c'est là une sorte d'alphabet de Morse.

c) *Les abréviations.*

Dans un système parfait de logique et de mathématiques il n'y a pas de place pour les définitions. La machine nous construit des expressions de plus en plus compliquées à l'aide de * et de *c* seulement. Tout ce que nous pouvons faire, c'est de nous servir des abréviations: 1°) pour simplifier les calculs, 2°) pour noter la correspondance entre nos idées et les expressions du système.

Je présente ici quelques abréviations:

En désignant par E, F, G, H, I, L, M, N des expressions proprement dites, j'écris:

$\cdot E$ pour $*Ecccc$;

$,E$ pour $*ccccE$.

J'introduis ensuite de nouvelles lettres à l'aide des abréviations suivantes:

a pour $\cdot *ccccc$;

b pour $\cdot a$

de la même manière, j'introduis des lettres suivantes:

d, f, g, φ, ψ, χ, Φ, Ψ, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, α, β, γ, δ, $\varkappa$, σ, τ, $\tilde{\omega}$, P, Q, R, S, T, X, Y, Z.

Ces lettres ne sont donc que des expressions écrites à l'aide des symboles c et $*$. Elles sont reservées pour la construction des expressions purement logiques. En cherchant de différentes façons la position de c dans le symbole $*EFGHI$, j'arrive facilement à construire d'abord l'idée d'un théorème purement logique ainsi que celle d'un théorème sémantique, tout en écrivant:

$\vdash E$ pour $*cEccc$ (lisez: E est un théorème purement logique);

$\models E$ pour $*cccEc$ (lisez: E est un théorème sémantique).

Les idées fondamentales du calcul logique s'obtiendrons facilement à l'aide du même symbole de la façon suivante j'écris:

$/EF$ pour $*cEccF$	(négation alternée)
$\sim E$ pour $/EE$	(négation)
$\supset EF$ pour $/E\sim F$	(implication)
$\vee EF$ pour $/\sim E\sim F$	(somme logique)
$\wedge EF$ pour $\sim /EF$	(produit logique)
$\equiv EF$ pour $\wedge\supset EF\supset FE$	(équivalence).

Cette manière d'écrire est due à M. LUKASIEWICZ. Elle nous dispense de l'emploi des points et des parenthèses. Elle pourrait être employée encore à l'école.

Je n'emploie pas d'abréviation du symbole $*cfaxp$. Dans la symbolique de la *Theory of constructive types* ce symbole signifie:

$$\cdot f_a\{x\}/p.$$

Ensuite j'écris:

$$\Pi EF[M] \text{ pour } *E\sim FME\sim F,$$

ce symbole désignant la classe d'éléments E du type M tels que F,

ΠEF pour $\Pi EF[E]$ (lisez: pour tous les E nous avons F),

$\exists EF$ pour $\sim\Pi E\sim F$ (lisez: il y a un E tel qu'on a F).

Les équivalences suivantes nous montrent les liens étroits subsistant entre la manière d'écrire actuelle et celle de la *Theory of constructive types.*

$$\equiv \cdot p/q \cdot {}^*cpccq$$
$$\equiv \cdot f_a\{x\}/q \cdot {}^*cfaxq$$
$$\equiv (\bar{x}) \cdot f_a\{\bar{x}\}/q \cdot \Pi x {}^*cfaxq$$
$$\equiv (\exists \bar{x}) \cdot f_a\{\bar{x}\}/q \cdot \exists x {}^*cfaxq$$
$$\equiv \cdot \widehat{x}[f_a\{\widehat{x}\}]\{z\}/q {}^*c\Pi x {}^*cfaxq[a]azq.$$

La sémantique est basée sur des notions suivantes que je donne en même temps que leurs abréviations; j'écris:

$<EF$ pour $^*cEcFc$ (lisez: E précède F)

$(EFGH)$ pour $^*EFGHc$ (lisez: H est le résultat de la substitution de G pour F en E)

et E pour $<E{}^*ccccc$

ce qu'on peut lire: E précède $^*ccccc$ ou bien encore, en tenant compte des axiomes sémantiques que je donne ensuite: E est une proposition élémentaire (sémantique).

Les directives élémentaires.

La sémantique rationnelle doit se baser sur des directives et sur des axiomes. Les directives de la sémantique se réduisent aux suivantes:

1. *Modus ponens.*

Si l'on a $\models E$ et $\models |E|GH$, on a aussi $\models H$.

2. *Substitution.*

a) Substitution pour une lettre sémantique.

Si l'on a $\models G$, si E est une lettre sémantique, F une expression proprement dite et H le résultat de substitution de F pour E dans G, on a $\models H$.

b) Substitution pour une lettre élémentaire.

α) Si l'on a $\models G$, si E, F sont des lettres élémentaires et si H est le résultat de substitution de F pour E dans G, on a $\models H$.

β) Si l'on a $\models G$, $\models$ el F, si E est une lettre élémentaire et si H est le résultat de substitution de F pour E dans G, on a $\models H$.

γ) Si l'on a $\models G$, $\models$ et M, si E est une lettre élémentaire, I une variable apparente, qui n'est pas contenue dans M, si N est le résultat de substitution de I pour une lettre sémantique K contenue dans M et si H est le résultat de substitution de ΠIN pour E dans G, on a $\models H$.

c) Généralisation.

Si l'on a $\models \supset \vee \wedge M \sim G \wedge NG \wedge NG$, $\models$ el ΠFH, si E n'est pas contenue dans M et si H est le résultat de substitution de F pour E dans G, on a

$$\models \supset \vee \wedge M \sim \Pi FH \wedge N\Pi FH \wedge NG.$$

Ce dernier point nous présente une règle nouvelle de généralisation, qui nous permet de réduire tous les axiomes de la logique à celui de Nicod.

La vérification de cette règle ne présente aucun doute et elle est très facile. On en tire facilement la règle de généralisation ordinaire et les axiomes de *déduction* et de *disjonction.*

Les axiomes de la sémantique sont assez nombreux: nous avons 7 axiomes de l'ordre, qui nous servent à construire autant de lettres différentes que nous voulons, 4 axiomes sur les propositions élémentaires, 3 axiomes sur les expressions logiques, 12 axiomes sur l'identité d'expressions, 5 axiomes sur la substitution, 3 axiomes sur la subsomption et l'axiome de Nicod.

Je cite comme exemple les axiomes suivants:

$$\models < \lambda, \lambda$$
$$\models \text{el } \mathfrak{p}$$
$$\models \text{el } {}^{*}c\mathfrak{p}ccq$$
$$\models \supset \wedge (\lambda^{*}ccccc\,{}^{*}ccccc\mu) < \lambda\nu < \mu\nu$$
$$\models (\lambda\xi\xi\lambda)$$
$$\models \supset (\lambda\nu\lambda\lambda) \vee (\mu\nu\mu\mu)(\lambda\mu\lambda\lambda).$$

Voilà l'appareil de la sémantique, qui nous permet de fournir autant de propositions de la forme: $\models$ conform EF et $\models DEF$ que nous voulons.

Il m'est impossible du donner ici la construction explicite de ces propositions. Il suffit de dire qu'elles résument les règles de la pure théorie des types.

La sémantique étant donnée, le système de la logique et des mathématiques se réduit à l'axiome de Nicod et aux directives suivantes:

1. Modus ponens.

Si l'on a $\vdash E$ et $\vdash |E|GH$ et si l'on a $\models$ conform $/EGH$, on a $\vdash H$.

2. Substitution.

Si l'on a $\vdash E$ et $\models DEF$, on a $\vdash F$. On voit que ce sont là des directives bien simples, qu'un imprimeur ne se doutant même pas des mathématiques peut facilement saisir et réaliser. On voit donc que nous avons ici une sorte de machine logique.

La pure théorie des types et la théorie simplifiée.

L'essentiel de la pure théorie des types peut être compris facilement à l'aide de l'exemple suivant. Les entiers font un type bien défini. Envisageons tous les nombres construits à l'aide des entiers et des symboles $+$, $-$, $\times$, $:$, $\sqrt[n]{\ }$, où n est un entier.

Ces nombres constituent l'ensemble de nombres réels d'ordre 1.

Soit mantenant p un entier quelconque et $f(p)$ un nombre réel d'ordre 1.

Le nombre $\lim_{i/\infty} \sum_{k/0}^{i} f(k)$ sera d'ordre 2. En général, si $f(p)$ est d'ordre n, p étant un entier quelconque, $\lim_{i/\infty} \sum_{k/0}^{i} f(k)$ sera d'ordre $n+1$.

Les nombres réels étant certaines classes de nombres rationnels, on voit que les classes dont les éléments ont le même type, peuvent avoir d'ordres différents.

Si l'on ne tient pas compte de l'ordre des classes, on tombe, comme je l'ai remarqué il y a longtemps, sur une hiérarchie des types, qui constitue la théorie simplifiée.

Les inconvenients de la théorie simplifiée sont les suivants :

1°) Elle entraîne la contradiction de Richard dès qu'on se sert de la sémantique rationnelle générale.

2°) Elle n'est simple qu'au point de vue intuitif, étant au point de vue d'un système parfait presque aussi compliquée que la pure théorie des types.

3°) Elle est presque superflue, puisqu'on peut faire de la théorie des classes sans aucune théorie des types, si l'on veut admettre quelques limitations un peu artificielles.

Le type d'ordre ω.

Le système de la logique étant donné, l'idée d'une fonction appartenant à ce système devient bien claire. Toutes ces fonctions constituent un type nouveau, qu'on peut nommer le type ω, en retrouvant ainsi les idées anciennes de König. Le type ω peut servir comme base d'une nouvelle théorie du continuum et il est probable qu'une évolution radicale des mathématiques peut en sortir.

Les ensembles sur une sphère ne sont pas mesurables. Alors il n'y a pas de théorie générale de la mesure, donc il n'y a pas de mathématiques qui sauraient servir comme base solide à la physique. Mais si l'on adopte la théorie pure des types, les ensembles purement mathématiques sont probablement tous mesurables ; par conséquent une théorie générale de la mesure est possible et l'on peut songer à construire pour la physique une base mathématique bien solide.

A. PADOA (Genova - Italia)

PROPOSIZIONI ASSIOMATICHE

1. - Chiamiamo *assioma* ogni *proposizione* in cui è adoperato soltanto *il vocabolario logico*, cioè: *variabili, segni d'interpunzione* e *simboli logici.*

Ad es., A, B, C, D rappresentando *condizioni* di qualunque forma:

(Ass. 1) se A implica B e se B implica C, allora A implica C

che enuncia la proprietà *transitiva* dell'*implicazione* (chiamata anche « sillogismo ») ed in cui allo stesso simbolo « $\supset$ » usato dal *Formulario* (matematico di G. PEANO) abbiamo sostituito la frase « se...., allora.... » ovvero la parola « implica » secondochè *le due condizioni* fra le quali è posto hanno o non hanno *forma precisata.*

(Ass. 2) se A implica B e se C implica D, allora « A e C » implica « B e D »

che insegna a *comporre due implicazioni* in *una sola*, mediante *l'asserzione simultanea* delle *due ipotesi* e delle *due tesi.*

(Ass. 3) se A implica B, allora « A e C » implica B

il quale consente di *inserire* in un'*implicazione* qualunque una *premessa* qualunque, che in pratica va scelta *compatibile* con *l'ipotesi* ed atta a meglio *precisare* il significato della *tesi.*

(Ass. 4) « A equivale a B » quando « A implica B » e « B implica A »

che insegna a *comporre due implicazioni reciproche* ed in cui all'unico simbolo « $=$ » usato dal *Formulario* abbiamo sostituito la parola « quando » o la frase « equivale a » secondochè *le due condizioni* fra le quali è posto hanno o non hanno *forma precisata.*

Ed ancora, qualunque sia x,

(Ass. 5) $x=x$

che enuncia la proprietà *riflessiva* dell'*eguaglianza* (chiamata anche « principio d'identità ») ed in cui il simbolo « $=$ » si legge « è eguale a » (1).

---

(1) In simboli:

(Ass. 1) $A \supset B \cdot B \supset C : \supset \cdot A \supset C$

(Ass. 2) $A \supset B \cdot C \supset D : \supset \cdot A \circ C \supset B \circ D$

(Ass. 3) $A \supset B \cdot \supset \cdot A \circ C \supset B$

(Ass. 4) $A = B \cdot = : A \supset B \cdot B \supset A$

in cui « $\circ$ » è il simbolo di *asserzione simultanea*, il quale viene *sottinteso* fra condizioni precisate.

2. - Comunque lo si legga, nel *Formulario* e qui il segno « = » è usato per dire « ha lo stesso significato che » e perciò è sempre usato quale *simbolo logico*: la quale dichiarazione non è resa necessaria soltanto dal fatto che altrove codesto segno è usato quale *simbolo geometrico*, per dire « è sovrapponibile a ». Essa vuole escludere, inoltre, ogni allusione alla *forma grafica* dei *due membri* di ciascuna *eguaglianza*: altrimenti, la scrittura « $a=b$ », che per noi è una *condizione*, per un tipografo sarebbe un *errore*.

In ogni *definizione*, fra le scritture *definita* e *definente*, convien leggerlo « significa ». In tale *ufficio metodologico*, esso è *l'unico simbolo* che sia *indefinibile* per sua natura: mentre la *definibilità* d'ogni *altro simbolo* è subordinata all'*insieme dei simboli* il cui uso è concesso a tal fine. Anzi, in ogni *altro ufficio*, persino il simbolo « = » è *definibile*, com'è detto nel *Formulario* interpretando G. W. LEIBNIZ, così:

(Ass. 6) « $a=b$ » significa « a appartiene ad ogni classe cui appartiene b » [1] ovvero, con altro linguaggio:

(Ass. 7) « $a=b$ » significa « a verifica ogni condizione verificata da b ».

Ad es., qualunque sia il significato della scrittura « ub » (purchè abbia un significato, non allusivo alla forma grafica di b), « $ux=ub$ » è una *condizione* rispetto ad x, la quale è *verificata* da b (giacchè, per l'Ass. 5, « $ub=ub$ »). Quindi (Ass. 7, 4): se « $a=b$ », allora a verifica la condizione « $ux=ub$ », cioè « $ua=ub$ ». Or dunque:

(Ass. 8) se $a=b$, allora $ua=ub$

e similmente

(Ass. 9) se $a=b$, allora $av=bv$

ai quali due assiomi accenneremo brevemente con le frasi rispettive « anteponendo u » e « posponendo v ».

Nel *Formulario* essi sono enunciati con qualche *premessa*, avente lo scopo di evitare che « ub » o bv » sia una scrittura priva di senso; del che terremo conto di volta in volta, nelle *applicazioni* che stiamo per farne: dalle quali risulterà che, nemmeno nel *Formulario*, codesta *duplice proprietà dell'eguaglianza* è utilizzata quanto si potrebbe.

3. - Anzitutto, restando nel campo della Logica, da essa si deduce *ogni altra proprietà dell'eguaglianza*, fuorchè la *riflessiva* (Ass. 5).

Ad es., la *simmetrica*

(Ass. 10) se $y=x$, allora $x=y$

si dimostra anteponendo « $x=$ » ad ambo i membri dell'*ipotesi*, che diventa « $x=y$ » quando « $x=x$ »

da cui (Ass. 5) la *tesi*.

---

[1] In simboli: $a=b \cdot =: \therefore c \varepsilon \mathrm{Cls} \cdot a \varepsilon c : \supset \cdot b \varepsilon c$

Similmente, la *transitiva*

(Ass. 11) se $x=y$ ed $y=z$, allora $x=z$

si dimostra posponendo « $=z$ » ad ambo i membri della *prima premessa*, che diventa

$$\text{« } x=z \text{ » quando « } y=z \text{ »}$$

da cui, per la *seconda premessa*, la *tesi*.

Ma le tre proprietà (riflessiva, simmetrica e transitiva), comunemente attribuite all'*eguaglianza*, spettano anche ad *altre relazioni*: ad es., alle tre geometriche elementari di sovrapponibilità, di equivalenza e di similitudine. Invece, la duplice proprietà enunciata dagli Ass. 8 e 9 spetta *soltanto* all'*eguaglianza*. E perciò, chiamandola « proprietà *operativa* » (come proponiamo), non occorrerà soggiungere « dell'eguaglianza ».

4. - Della *duplice proprietà operativa* si può anche usare *simultaneamente* così:

(Ass. 12) se $a=b$, allora $uav=ubv$

Infatti, posponendo v,

$$\text{se } ua=ub, \text{ allora } uav=ubv.$$

Dall'Ass. 8 e da ciò, si deduce (Ass. 1) l'Ass. 12.

Ed ancora, date *due eguaglianze*, se ne può ricavare una *terza*, col *frapporre* una *medesima scrittura* fra i loro *primi membri* e fra i loro *secondi membri*. Cioè:

(Ass. 13) se $a=b$ e $c=d$, allora $auc=bud$.

Infatti, posponendo « uc »,

$$\text{se } a=b, \text{ allora } auc=buc$$

ed anteponendo « bu »,

$$\text{se } c=d, \text{ allora } buc=bud$$

da cui, componendo (Ass. 2),

$$\text{se } a=b \text{ e } c=d, \text{ allora } auc=buc \text{ e } buc=bud$$

mentre (Ass. 11)

$$\text{se } auc=buc \text{ e } buc=bud, \text{ allora } auc=bud$$

da cui (Ass. 1) l'Ass. 13.

Si potrà accennare all'Ass. 12 con la frase « anteponendo u e posponendo v » ed all'Ass. 13 con la frase « frapponendo u ».

5. - Ciò premesso come introduzione, proponiamo di chiamare *proposizione assiomatica* ogni *applicazione immediata* della duplice proprietà *operativa*

(Ass. 8, 9) o delle sue due *estensioni* (Ass. 12, 13), purchè vi sia adoperato almeno un *simbolo estraneo* alla Logica (sicchè *non sia un assioma*).

E ci accontentiamo di fornirne esempi *aritmetici*.

Anzitutto, posponendo la frase « è un numero » ([1]),

(P. ass. I) se $a=b$, allora a è un numero quando b è un numero

che si può scindere in due proposizioni:

(1) se a è un numero ed $a=b$, allora b è un numero

(2) se b è un numero ed $a=b$, allora a è un numero

le quali sono *reciprocamente deducibili*, mediante l'Ass. 10.

Malgrado la loro tenuità, codeste proposizioni sono utili. Ad es., sapendo che

(3) se a e b sono numeri, anche $a+b$ è un numero

(4) 1 è un numero

se ne deduce che

(5) « $1+1$ » è un numero.

Da ciò, sapendo che

(6) $2=1+1$

mediante la (2) si deduce che anche

(7) 2 è un numero.

6. - Anteponendo « $c+$ »:

se $a=b$, allora $c+a=c+b$.

Posponendo « $+c$ »:

se $a=b$, allora $a+c=b+c$.

Frapponendo « $+$ »:

se $a=b$ e $c=d$, allora $a+c=b+d$.

Ma codesti enunciati sono troppo vaghi: le *variabili*, anzichè *numeri*, potendo rappresentare *segmenti*, *angoli*, ecc. od avere *significati momentanei* per cui *la tesi* rimanga *priva di senso*. Quindi, *per precisare la tesi*, giova *inserirvi la premessa* (Ass. 3) che ciascuna variabile rappresenta un numero. Senonchè, la P. ass. I rende superfluo il dire che b e d sono numeri. Dunque:

(P. ass. II) se a e c sono numeri ed $a=b$, allora $c+a=c+b$

(P. ass. III) se a e c sono numeri ed $a=b$, allora $a+c=b+c$

(P. ass. IV) se a e c sono numeri ed $a=b$ e $c=d$, allora $a+c=b+d$.

E similmente per ciascuno dei segni « $-$ », « $\times$ », « $/$ », con la restrizione per quest'ultimo d'esser seguìto da un numero diverso da zero ([2]).

([1]) Circa il significato da attribuire qui alla parola « numero » vedasi il § 10.

([2]) Dalla P. ass. II e III si potrebbe *dedurre* la P. ass. IV nel modo in cui dagli Ass. 8 e 9 venne dedotto l'Ass. 13.

Inversamente, cambiando d in c nella P. ass. IV, la premessa « $c=d$ » diventa « $c=c$ »,

7. - In ciascuna delle *proposizioni assiomatiche* sin qui enunciate, oltre al *vocabolario logico*, è adoperato qualche *simbolo aritmetico*; sicchè non sono *assiomi* [§ 1], ma *proposizioni aritmetiche*: le quali perciò hanno diritto d'essere *enunciate* in qualsiasi trattato d'Aritmetica e non *presupposte* come vien fatto per gli *assiomi*.

Ma quale *ufficio metodologico* può esser affidato a ciascuna di esse?

Non di *definizione*, perchè sarebbe *tautologica* (essendo illusorio, ad es., il pretendere di definire « $a+c$ » con « $b+d$ »).

Non di *teorema*, perchè dovrebb'essere *conseguenza* di qualche *proposizione aritmetica* già enunciata, mentre è *conseguenza* soltanto della *proprietà operativa*, cioè di un *assioma*; e quindi ogni sua pretesa *dimostrazione*, che non si limita a dir ciò, altro non può essere che un *vaniloquio*: come purtroppo può rilevarsi in molti fra i migliori trattati.

E non di *postulato*, perchè lascia *impregiudicato* il *significato* d'ogni simbolo *aritmetico* in essa adoperato.

Sicchè, le *proposizioni assiomatiche* costituiscono una *categoria metodologica*, che *sfugge* alla consueta classificazione (definizioni, postulati e teoremi) e la *completa* (per ogni scienza, fuorchè la Logica).

Codesta categoria è *indipendente* dalla *volontà del trattatista*. E tale constatazione costituisce lo scopo principale di questo scritto.

8. - Tuttavia, per non accogliere *proposizioni assiomatiche*, le quali siano o possano sembrare *prive di senso*, ciascuna di esse dev'essere *preceduta* da qualche *altra proposizione aritmetica* (definizione o postulato o teorema), che ne *giustifichi* l'accoglimento: anzi ne porga *incitamento*.

Ad es., la I dev'essere preceduta da:

(8) vi è almeno un numero

o da una qualche proposizione come la (4) da cui possa dedursi la (8).

E la II dev'essere preceduta dalla (3) e similmente le altre.

9. - Oltre che per ciascuna *operazione*, occorre una *proposizione assiomatica* per ciascuna *relazione* o *funzione*. Ad es.,

(P. ass. V) se a e c sono numeri ed $a=b$ e $c=d$, allora $a>c$ quando $b>d$.

(P. ass. VI) se a è un numero ed $a=b$, allora « $\sin a=\sin b$ ».

---

cioè diventa *vera* (Ass. 5) e perciò *superflua*. Cancellandola, si ottiene la P. ass. III. E similmente, cambiando b in a nella P. ass. IV, cancellando « $a=a$ » e poi cambiando d in b e scambiando a con c, si ottiene la P. ass. II.

Ed ancora: da *ciascuna* delle P. ass. II e III si può *dedurre l'altra*, ricorrendo alla proprietà *commutativa* del segno « $+$ ». E similmente per il segno « $\times$ » (scritto e sottinteso), ma non per i segni « $-$ » e «/», che non hanno la proprietà commutativa.

10. - In ciascuna delle P. ass. enunciate, la parola « numero » può indicare « la più vasta classe di numeri, conosciuta dal lettore ».

E ciascuna di esse, in cui codesta parola intervenga soltanto nell'*ipotesi* (cioè tutte fuorchè la I), *implica* quel che la proposizione stessa diventa, allorchè la parola « numero » sia seguita da una delle parole « naturale », « razionale », « reale », ecc., usate a precisarne una *classe*, purchè vi si inserisca quale *premessa* l'eventuale *condizione di eseguibilità* (entro la classe considerata) dell'*operazione* indicata nella *tesi*. Ad es.,

(9) se a e c sono numeri naturali ed a non è minore di c ed $a=b$ e $c=d$, allora $a-c=b-d$.

Nella P. ass. I, invece, la parola « numero » interviene soltanto nella *tesi*. Quindi, ancorchè codesta parola vi indichi « la più vasta classe di numeri, conosciuta dal lettore », la I non dispensa dall'enunciarla *nuovamente* per *ciascuna classe di numeri* e sempre come P. ass.

Anzi, così facendo, si verranno a distinguere nettamente le vere *classi* di numeri delle loro *pseudo-classi*. Ad es., non si può dire che:

se $a=b$, allora a è una frazione irriducibile quando b è una frazione irriducibile; perchè, ad es., « $4/6=2/3$ » e « $2/3$ è una frazione irriducibile » e tuttavia « $4/6$ *non* è una frazione irriducibile ».

11. - La *reciproca* (*totale*, cioè ottenuta mediante lo scambio dell'*ipotesi* con la *tesi*) d'ogni *proposizione aritmetica* è *falsa* (1).

Ad es., la reciproca della I, cioè

se « a è un numero quando b è un numero », allora « $a=b$ »

è falsa: perchè, ad es.,

« $\sin x$ è un numero » quando « x è un numero »

e tuttavia

« $\sin x$ » è sempre diverso da « x ».

Quindi, parlando di una *proposizione assiomatica* (che non sia la I) potremo chiamare brevemente *sua reciproca* la sua *reciproca parziale*, ottenuta mediante lo scambio della *tesi* con *una sola premessa* del tipo « $a=b$ » (nel qual caso, bisogna anche *inserire* la nuova premessa « b è un numero »). In questo senso, *la reciproca* d'una *proposizione assiomatica* può essere *vera* o *falsa*. Ad es., è *vera* la reciproca della V, cioè

(10) se a, b, c sono numeri e $c=d$ ed « $a>c$ quando $b>d$ », allora $a=b$

ed è *falsa* invece la reciproca della VI, cioè

se a e b sono numeri e $\sin a=\sin b$, allora $a=b$.

---

(1) È *vera* la *reciproca* dell'Ass. 10, ma è un *altro enunciato* dall'Ass. stesso. Però, ad es., l'Ass. 6 *riassume* (Ass. 4) *due implicazioni reciproche*.

E perciò, quando *la reciproca* d'una *proposizione assiomatica* è *vera*, bisogna *postularla* o *dimostrarla*.

Ad es., *la reciproca* della IV, cioè

(11) se a, b, c sono numeri ed $a+c=b+d$ e $c=d$, allora $a=b$

si *dimostra* agevolmente, purchè si sappia che

(12) se a e b sono numeri, allora $(a+b)-b=a$

alla quale proposizione ed alle analoghe si accenna con la parola « semplificando ».

Or dunque: dall'*ipotesi* della (11) e dalla (3) segue che

$a+c$ e c sono numeri ed $a+c=b+d$ e $c=d$

da cui, per l'analoga alla IV,

$$(a+c)-c=(b+d)-d$$

da cui, semplificando, *la tesi* della (11).

Perciò, ad es., se

« $a=b$ » e « $c=d$ »

sono *equazioni*, allora, per stabilire che il loro sistema *equivale* ad

« $a+c=b+d$ » e « $c=d$ »,

basta *enunciare* la P. ass. IV (senza tentar di giustificarla con vaniloqui pseudo-algebrici) e *dimostrare* la (11) nel modo indicato.

H. HÄRLEN (Eislingen Fils - Germania)

UEBER AXIOMENSYSTEME ALS SATZFUNKTIONEN

Im folgenden wird der Begriff « Satzfunktion » (kurz *SF*) in etwas weiterem als dem üblichen Sinn gebraucht. Wir wollen deshalb lieber von « Variabelnaussagen » (kurz *VA*) sprechen. Eine *SF* entsteht aus einem Satz, wenn man an Stelle eines logischen Subjekts (oder mehrerer) einen unbestimmten Ausdruck, eine Veränderliche, einführt. Sie ist also eine Aussagenform, die, an sich sinnlos, durch Einsetzung, d. h. auf ein bestimmtes Ding bezogen, zu einem sinnvollen Satz wird. Dieses Ding spielt dann in dem Satz die Rolle eines logischen Subjekts. Wir erweitern den Begriff der *SF* in zweifacher Hinsicht. Es werde allgemein jede Aussagenform als *VA* bezeichnet, die durch Individualisierung — Bezugnahme auf ein bestimmtes Ding als logisches Subjekt oder anderer Art — zu einem sinnvollen Satz wird. Beispielsweise entstehen aus dem einfachen Satz *Pa*, der von dem bestimmten Ding *a* das Prädikat *P* aussagt, einerseits die *SF* *Px* und andererseits die *VA* *Px*, *Za*, *Zx*. Ausser durch Individualisierung wird eine *VA* zu einem Satz auch durch Bindung der Variabeln, d. h. wenn man die freien oder wirklichen Veränderlichen durch gebundene oder scheinbare ersetzt (« Es gibt... » & « Alle »). Die so entstehenden Sätze sollen auch als *VA* gelten. Wir unterscheiden demgemäss freie und gebundene *VA*; erstere sind Funktionen, letztere nicht.

Ein Axiomensystem (kurz *AS*) ist ein System von Sätzen über die Elemente eines bestimmten Bereiches. Anstelle der logischen Subjekte stehen Veränderliche, für die die Elemente des Bereiches eingesetzt werden können. Wir haben es deshalb mit *VA* zu tun, und zwar mit gebundenen *VA*. Ein *AS* ist also zunächst eine *VA* mit den Elementen des Bereiches als Argumentwerten. Hierbei haben wir aber nicht berücksichtigt, dass i. a. der Elementenbereich nicht eindeutig bestimmt ist. Ein *AS* gestattet i. a. mehrere Deutungen (Interpretationen), d. h. es kann als System von Sätzen über die Elemente verschiedener Bereiche aufgefasst werden. Für das *AS* sind nicht die individuellen Eigenschaften eines Deutungsbereiches charakteristisch, sondern die Beziehungen, die zwischen den Elementen des Bereiches bestehen und die durch die Grundrelationen des *AS* ausgedrückt werden. Man wird so dazu geführt, die Interpretationen als Argumentwerte des *AS* anzusehen. *AS* sind also *VA* komplizierterer Art, in denen

zweierlei wesentlich verschiedene Veränderliche vorkommen; wir wollen sie Grundvariable und Untervariable nennen. Durch Individualisierung der Grundvariabeln, wenn man also eine bestimmte Interpretation betrachtet, geht das AS in eine einfache VA über, deren Argumentbereich aus den Elementen der Interpretation besteht.

Kommt in dem AS nur eine Grundvariable vor, wie das bei den AS der Logik von SCHEFFER, der Arithmetik von PEANO, der Geometrie von PIERI der Fall ist, dann kann man offenbar statt der Interpretationen auch die Realisierungen der Grundrelation als Argumentwerte ansehen. Wir betrachten als Beispiel ein AS der Arithmetik, das mit dem von PEANO äquivalent ist:

I. Zu jedem a aus Z gibt es genau ein b aus Z mit aNb.

II. Aus aNb, cNd und $b=d$ folgt $a=c$.

III. Es gibt genau ein a aus Z, für das kein x aus Z mit xNa existiert.

IV. Kein echter Teil von Z genügt Axiom I und III unter Festhaltung des in III ausgezeichneten Elementes.

N ist die Nachfolgerbeziehung, Z das Feld ihrer Vorderglieder, also die Menge der natürlichen Zahlen. Axiom I ist ein relatives, Axiom III ein absolutes Existentialaxiom; Axiom II ist relational, Axiom IV ein Beschränktheitsaxiom der gleichen Art wie das HILBERTsche Vollständigkeitsaxiom. Die Beziehung N ist Grundvariable, Z der Argumentbereich der Untervariabeln.

Für eine einfache VA bietet die Betrachtung des Argumentbereiches i. a. kein besonderes Interesse. Die Menge der roten Dinge hat für die Eigenschaft « rot » keine Bedeutung. Anders ist es bei den AS, wo der Argumentbereich der Untervariabeln für die möglichen Werte der Grundvariabeln aufschlussreich sein kann. Es interessieren hier diejenigen Eigenschaften einer Interpretation, die allen anderen Interpretationen ebenso zukommen. Es kann z. B. für alle möglichen Werte der Grundvariabeln der Argumentbereich der Untervariabeln leer, oder endlich, oder abzählbar unendlich, oder nichtabzählbar sein. Daraus, dass der Argumentbereich bei keiner Interpretation erweiterbar oder reduzierbar (im Sinne des HILBERT schen Vollständigkeitsaxioms oder des obigen Beschränktheitsaxioms IV) ist, lassen sich Schlüsse auf die Entscheidbarkeit des AS ziehen.

GERGONNE fasste ein AS als « implizite » Definition auf. Durch die Axiome der Geometrie sollte z. B. definiert sein, was ein Punkt sei, oder besser, was unter einem Punkt verstanden werden soll: ein Ding, das gewissen Bedingungen genügt. Dieses Ding gibt es tatsächlich aber nicht. Es ist nicht nur nicht eindeutig bestimmt — das ist auch bei expliziten Definitionen der Fall, wenn mehrere Dinge unter sie fallen —, sondern es ist sogar unbestimmt, ob ein bestimmtes Ding darunter fällt: es kann als Punkt angesehen werden oder nicht, je nachdem welche Interpretation des AS man betrachtet. Man hat deshalb das AS als implizite Definition der Grundrelation ansehen wollen. Das ist möglich, wenn das AS nur eine Grundrelation enthält, also in den vorläufig wichtigsten Fällen. Dann ist aber

die Definition durch ein AS nicht wesentlich verschieden von einer expliziten Definition. Wir verstehen unter einer expliziten Definition die Gleichsetzung des Zeichens für den definierten Gegenstand mit einem Ausdruck aus bekannten Zeichen für Gegenstände, die von dem definierten unabhängig sind. Offenbar sind solche Gleichsetzungen oder Formeln nicht wesentlich hiervon verschieden, in denen das definierte Zeichen zwar nicht isoliert, aber doch nur einmal vorkommt; wir wollen sie unwesentlich implizit nennen. Das logische Produkt unwesentlich impliziter Gleichsetzungen ist eine unwesentlich implizite Definition. Bezeichnen wir allgemein alle die Definitionen als unwesentlich implizit, die sich in eine explizite Form bringen lassen, so ist auch das obige AS eine unwesentlich implizite Definition der Nachfolgerbeziehung. Nennt man nämlich eine Relation abgeschlossen, wenn das Feld der Vorderglieder (oder der Nachglieder) nicht durch einen echten Teil ersetzt werden kann, so ist N eine « abgeschlossene, umkehrbar eindeutige Relation, deren Feld der Vorderglieder das Feld der Nachglieder umfasst und genau ein Element enthält, das nicht Nachglied ist ». Das ist eine explizite Definition von N, die mit dem AS äquivalent ist. Durch die Bezeichnung des AS als implizite Definition der Grundrelation wird also keine wesentlich neue Art von Definition eingeführt.

Es ist zweckmässig, GERGONNES Begriff der impliziten Definition beizubehalten. Man darf dann nur nicht vergessen, dass es sich nicht mehr um eine eigentliche Definition handelt, sondern dass man nur eine vereinfachende Redewendung braucht, derart wie das allgemein bei der Einführung uneigentlicher Elemente der Fall ist. Wir sprechen von impliziter Definition, wenn eine Formelsetzung vorliegt, in der das Zeichen des definierten Gegenstandes mehrfach vorkommt, derart dass verschiedene Exemplare desselben gleichzeitig eingesetzt werden können. Die Formel drückt dann also eine Beziehung zwischen ihnen aus. Man sieht in der Tat leicht ein, dass alle Schwierigkeiten bei der impliziten Definition daher rühren, dass durch ein AS relationale Verhältnisse festgestellt werden. Das gleiche ist bei der Betrachtung der AS als VA der Fall. Den verschiedenen Auffassungen der AS als implizite Definitionen entsprechen die verschiedenen Auffassungen der AS als VA.

J. E. baron de Vos van Steenwijk (Paris - Francia)

SOME REMARKS ON THE TEACHING OF MATHEMATICS IN SECONDARY SCHOOLS

One might expect the teaching of mathematics to be a subject on which people of different countries or of different ages should agree more easily and completely than on the teaching of any other subject. Contrary to Natural Science, progress in mathematics is not along revolutionary lines which make a text-book of twenty years standing next to useless.

Apart from pedagogical considerations, I think we might use a text-book of a hundred and fifty years hence without doing much harm and, as a matter of fact, one of some two thousand years (Euclid's elementa) has been used in some countries up till now. Think of the havoc made if a text-book of physics or chemistry of that epoch were used.

Furchermore, if we compare mathematics with a subject matter as history for example, it is self evident that the latter wants to be adjusted according to the needs and interest of each special country and here again mathematics has a great advantage.

These considerations should make it more easy to discuss the subject of a curriculum in mathematics at an international meeting; we might event expect a well established and time-honoured tradition to exist that would make such a discussion superflous. But in the field about which I intend to speak to day - the secondary schools - facts are flatly in contradiction with the above supposition. This can only be explained by the fact that there is here no clear vision of the goal. How has this state of affairs got to be explained?

In *primary schools* (meaning by them that part of instruction that is common to all children), the teaching of arithmetics and the elements of geometry serves a clear and well-defined purpose. It is meant to provide sufficient knowledge and technical routine to handle the problems of every-day life.

On the other side, mathematical teaching at the Universities (and in the special preparatory classes in Lycea and secondary technical schools) is intended to give the future student of natural or technical sciences, the future teacher or mathematical research student the necessary training.

Between these two are the secondary schools, partly preparatory to the Universities, partly giving a finishing education. This dual character is one of the

difficulties in drawing up a satisfactory curriculum, not only in mathematics, though I think the difficulty is especially felt there. A small percentage only of our pupils at secondary schools will pursue the study of mathematics afterwards or will even have to apply it in their further studies. In the cases where no special training courses have been instituted to bridge the gulf between university and school teaching of mathematics, these difficulties are seriously felt. University professors are complaining of getting their students insufficiently trained and the parents whose children are not going in for a scientific career complain that the curriculum is overburdened and their boys and girls have to waste their time in learning formulae and solving abstruse problems.

The real problem is that it is quite a different thing to give a sound training in mathematics to those who are to use it as a *tool* or to devise a scheme what to *teach about mathematics to those who are destined never to use it in their future life and to forget all about it.*

This is a not a paradox. We teach in our schools many things without expecting or even intending that we are imparting a lasting knowledge. There must be in those cases some special virtue in the process of learning itself, as a training of memory, of logical reasoning, of accurate observation or critical appreciation. It is especially the second factor that mathematics are expected to develop *Κατ'ε ξοχην*, though I believe translating into latin is credited with the same virtue. But we would not be satisfied in recommending the teaching of mathematics on the strength of that quality only. If theorem and formulae are to be cast aside by the pupil as soon as he has left school, we wil have achieved something if we have created an impression of the important tool mathematics has been in the development of civilisation. If we explain the conception of functional dependance, the extension of our number system, the process of differentiation and integration, it is not to extend the field of exercises in the manipulation of symbols (symbol-juggling as it has been called deprecatingly) but because these conceptions belong to the history of civilisation and help us to understand how science changed the face of the world during these last centuries. That the invention of logarithms made it possible to compute accurate positions of the heavenly bodies and thus to guide our ships across the seas, that the calculus of probability created insurance business are facts more worth knowing than many a theorem of Euclid that has led a sterilized life for two thousand years.

But to proceed with my suggestions in some order, I will now treat separately of geometry and algebra, including amongst the latter trigonometry and the calculus.

Geometry. Here, I should like drawing and measuring to take largely the place of computing and solving cunning little riddles about triangles and their bisectrices. If problems have to be set, let it be about things into which it seems rational for the average man to take an interest e. g. surface and volume problems.

As to three dimensional geometry, the different ways of representing our threedimensional world on a plane ought to be included in our curriculum for practical as well as didactical reasons. And lastly, the problem of representing the surface of our earth on a flat map is of sufficient interest to be studied in an empirical way without going deeply into the mathematics of conformal representation.

Algebra. Here the land lies somewhat different. Whereas in geometry we have all interest to keep our teaching as closely as possible in contact with the material world and helps us to visualize it, in others words, whereas in geometry we want *a concrete* and realistic teaching, in algebra, we want to emphasize the abstract character of this science. Therefore, it ought not to be studied before the age at which the power for abstract reasoning has begun to develop, i. e. before the age of sixteen. This could be possible if our initial geometrical teaching is freed from algebra. The didactic interest of algebra lies in ist *methods* more than in ist *results*, in its power to generalize and to purify our rough empirical conceptions. The gradual development of the conception of a function starting from the tabular form and proceeding along the graph to the formula is but one example. The development of our number-scale is another. Considerable time is wasted at present in acquiring a routine in the reduction of algebraic formulae which is only of preactical interest for the specialist. I am thinking of the rationalizing of denominators as $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ or of simplifying expressions as $\sqrt{a \pm b\sqrt{c}}$. Quadratic equations should be taught as a special case of the parabolic function which makes complex number appear in a natural way. Permutations and combinations form a subject matter that is not very difficult and offers many striking applications.

From a practical point of view, some notions about statistics and the theory of errors should be given, if only to put the future citizen on his guard against the indiscriminate use of those tools by the sociologist, the hygienist and non-mathematicians of all kind.

The above remarks have been necessarily vague and incomplete, firstly because the subject is much too large for such a short address and secondly, because I deliberatively refrained from adapting them to any existing curriculum in a given country. I only want to emphasize that in condemning much study of theorems and of formulae and solving of equations or geometrical constructions, I do not want to cheapen our general instruction of mathematics, but rather to put it on a different, and I trust higher plan.

In such a tendancy, there is danger of a twofold character. In focussing our teaching more on ideas and less on facts, we may render it too abstract and swell the ranks of those who think it an occult science only fit for a few elects or, on the other hand, by making our claims less stern and precise, favour the

lazy pupil. One has to steer between this Scylla and Charybdis. I hope to have convinced you that at any rate we can make it in this way more interesting, more human, less dry and in teaching « tout genre est bon, sauf le genre ennuyeux ».

And if someone would raise the objection that there would be left no material about which to set examination papers, so much the better. *For those who are not to use mathematics in their future studies or in their calling no examination ought to exist. The teacher himself is the only one qualified to judge if his teaching has produced a satisfactory result and he ought to be trusted with that task.*

G. FURLANI (Trieste - Italia)

NUOVI INDIRIZZI NELL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA IN ITALIA

Nella seconda metà del secolo scorso si manifestò il Italia una severa reazione contro metodi troppo empiristi invalsi nell'insegnamento della matematica nelle scuole. Lo sviluppo rigoglioso che vi ebbe poi la critica dei fondamenti di questa scienza e l'indirizzo purista seguito spesso nelle sue ricerche esercitarono influssi profondi e duraturi sull'istruzione.

Si ebbero come conseguenze immediate un singolare perfezionamento degli sviluppi teorici, che acquistarono molto in precisione, correttezza e rigore logico, e un reale elevamento degli studi. Ne uscirono dei testi, che sono veri capolavori di perfezione e di eleganza nella trattazione della materia. Concetti primitivi e postulati dovevano essere enunciati esplicitamente per ricavarne con la deduzione ogni altra proposizione, e doveva essere evitato tutto ciò che potesse urtare contro i dettami di una raffinata logica matematica.

La bellezza estetica di simili costruzioni teoriche esercitò il suo fascino su parecchi insegnanti, che per di più le ritenevano di una grande efficacia per l'educazione formativa della mente.

Ma è facile comprendere come un insegnamento così rigoroso dovesse riuscire troppo astratto e dogmatico e potesse degenerare in vuoto formalismo.

In omaggio al professato purismo s'introduceva anche nella scuola una rigida separazione di argomenti che vanno naturalmente riuniti: già nel primo grado dell'insegnamento uno sviluppo astratto delle proprietà delle figure geometriche doveva precedere le applicazioni ai problemi di costruzione; era vietato l'uso del calcolo prima che fosse stata svolta la teoria della misura; nei ginnasi, coll'aritmetica razionale, si faceva uno studio astratto delle proprietà dei numeri e delle operazioni prima che gli alunni avessero alcuna conoscenza del calcolo letterale; i numeri reali, avulsi dai problemi che giustificano il loro sviluppo storico, erano presentati come enti astratti, dei quali l'alunno non poteva formarsi alcun concetto reale.

Era possibile che un tale insegnamento esercitasse veramente un'azione formativa sullo spirito dell'alunno?

Egli non poteva aver alcun riflesso della bellezza di quelle perfette costruzioni teoriche, perchè solamente un corso completo sui fondamenti della scienza avrebbe

potuto farne penetrare l'essenza. Invece, costretto a seguire delle lunghe deduzioni per dimostrare delle verità per lui senz'altro evidenti senza sentirne e comprenderne la necessità, doveva perdere l'interesse allo studio e la fiducia nel valore dell'insegnamento e formarsi delle idee false sui compiti della scienza.

Troppo spesso alunni intelligenti, che profittavano egregiamente di altri insegnamenti, dichiaravano di avere la negativa per lo studio della matematica, al cui apprendimento più che a quello di altre materie dovrebbe giovare il naturale buon senso.

In tal modo neppure il valore di questi studi per l'educazione della mente e la loro importanza nel quadro generale della cultura potevano trovare una adeguata considerazione.

Senonchè un tale insegnamento contraddiceva alla storia e alla realtà della scienza. Anche la matematica ha desunto i primi elementi per costruire le sue teorie dall'intuizione, e la critica dei fondamenti non è riuscita a giudicare della compatibilità e della indipendenza dei postulati senza istituire una concreta rappresentazione delle teorie.

Il POINCARÉ osserva che la scienza della dimostrazione non è tutta intera la scienza. Nella realtà la teoria e la pratica si confondono e l'intuizione è utile « à l'etudiant et au savant créateur ».

Ciò che s'insegnava nella scuola erano i risultati di una scienza fatta, mentre l'insegnamento dev'essere procedimento in atto. Il genio creativo non si lascia guidare dagli impacci di un astratto formalismo, ma procede, anche nel campo della matematica, per esperienze mentali e felici intuizioni. Così nella scuola si nega la realtà seguendo un puro astrattismo e si mortifica lo spirito.

* * *

Ma contro tali travisamenti dei mezzi e dei fini dell'istruzione non tardarono a farsi sentire numerose voci, per reclamare uno spirito più libero e più largo nell'insegnamento. Possiamo seguirle da più di un ventennio nei periodi didattici, nei congressi degli insegnanti e nelle istruzioni che il Ministero della pubblica istruzione emanava per richiamare gli insegnanti da un soverchio astrattismo.

Nel 1908 GIOVANNI VAILATI, al IV congresso internazionale dei matematici, sosteneva le ragioni in favore di un apprendimento attivo e operativo della matematica e svelava i pregiudizi teorici derivanti da una falsa interpretazione dei risultati della critica dei fondamenti. Nel 1911, essendosi istituito un nuovo tipo di scuola, il liceo moderno, la matematica vi ebbe un programma di indirizzo più pratico e moderno; nè mancò la pubblicazione di un ottimo testo per il suo concreto svolgimento. Nel 1917, quando il ministro dell'istruzione elaborò delle proposte di nuovi programmi per tutte le scuole (che non entrarono tuttavia in vigore), quelli di matematica erano pure ispirati ad un nuovo e ben diverso indirizzo.

Ma difficoltà di carattere vario hanno ritardato allora in Italia una riforma generale della scuola, contribuendo così anche ad una cristallizzazione dei metodi dell'insegnamento.

* * *

Tale riforma, attuata nel 1923, lasciò entrare nella scuola un nuovo spirito anche per l'insegnamento della matematica.

Rileverò alcuni dei tratti più caratteristici dei nuovi programmi. L'aritmetica razionale, come studio astratto di teoremi e deduzioni, è stata soppressa nel Ginnasio, dove era diventata più che altro un vuoto esercizio di memoria. È stata mantenuta nel corso superiore dell'Istituto magistrale, dove però gli alunni hanno già appreso il calcolo letterale dal corso inferiore e dove questo studio trova il suo scopo immediato nella giustificazione delle regole pratiche del calcolo elementare. L'insegnamento della geometria nel Ginnasio, dove esso è diviso in due cicli, dev'essere fatto nel primo grado con indirizzo pratico e intuitivo.

Per rendere l'insegnamento più conforme allo sviluppo storico della scienza sono riuniti argomenti diversi: la teoria della misura e i numeri reali; le rappresentazioni grafiche delle funzioni e le interpretazioni fisiche e meccaniche dei diagrammi; le applicazioni dell'algebra alla geometria. Per i licei scientifici è prescritto lo studio delle derivate, dei limiti e degli integrali definiti, in connesione con quei problemi che hanno dato occasione alla loro scoperta.

I nuovi programmi non disconoscono l'importanza della deduzione e per parecchi capitoli, specialmente della geometria, prescrivono esplicitamente una trattazione razionale. Ma è pure prescritta, specialmente per l'algebra e la trigonometria, la soluzione e la discussione di problemi non artificiosi che abituino l'alunno ad operare indipendentemente.

Soltanto negli istituti dove l'insegnamento della geometria deve svolgersi in un solo ciclo dalla prima classe del corso inferiore all'ultima del corso superiore, come negli istituti tecnici e magistrali, resta ancora razionale l'insegnamento nei primi anni. In tal modo viene però di nuovo a mancare quel primo periodo dell'esperienza e dell'intuizione che deve precedere l'astrazione.

* * *

Alla riforma dei programmi seguì la pubblicazione di testi intesi ad interpretarne lo spirito, per quanto non manchino anche in un tempo precedente i tentativi di informare ad un nuovo indirizzo la trattazione della materia.

In passato la sola preoccupazione di chi compilava il testo era di condensare in un'esposizione logicamente impeccabile la materia prescritta dai programmi, senza preoccuparsi dell'effetto che la sua opera avrebbe avuto sullo spirito dell'alunno. Il proposito era di insegnare *qualcosa,* non *a qualcuno.* Senonchè il nostro Bovio pensava che: « la scuola deve dare non la scienza, ma l'amore alla scienza; e tutto ha creato se ha destato questo amore ».

Ora anche gli autori dei testi dimostrano una chiara consapevolezza del problema didattico e della sua importanza.

Rileverò alcune particolarità caratteristiche dei testi più recenti. Pur conservando un giusto rigore nella sistemazione logica della materia e nelle deduzioni, si scelgono come proposizioni primitive quelle che più si accordano con l'esperienza comune e si chiariscono con opportuni riferimenti all'intuizione in modo da assicurarsi una facile e netta comprensione da parte dell'alunno.

Così, partendo da postulati scelti opportunamente, si usa il linguaggio del movimento per trattare dell'uguaglianza, pur spiegando che questo va inteso come una biunivoca corrispondenza fra gli elementi delle figure, senza staccarsi dunque in sostanza dai metodi più esplicitamente rigorosi della definizione di questo concetto.

Dello studio dei numeri reali si fa comprendere la necessità movendo da problemi concreti che non trovano soluzione nel campo dei numeri razionali, come la determinazione del rapporto fra due grandezze incommensurabili, l'estrazione della radice o la rettificazione della circonferenza del cerchio, e si presentano le successioni convergenti come valori approssimati per difetto e per eccesso del numero cercato, procurando di semplificare la trattazione delle operazioni con gli stessi.

Il concetto di equivalenza è dato per mezzo della somma di figure uguali, che si rende facilmente intuitiva, e per quelle che non sono equiscomponibili ricorrendo alle successioni convergenti di figure scomponibili. In un testo, per ottenere un maggior avvicinamento all'intuizione, si stabilisce, per mezzo di un postulato, il confronto diretto fra la lunghezza di un segmento rettilineo e quella di un arco, fra la superficie di una figura a contorno rettilineo e quella a contorno curvilineo, fra due solidi qualunque.

Qualche autore fa seguire, alla fine dell'opera, un'appendice, nella quale mette in luce l'architettura logica della trattazione; così collocata questa potrà riuscire veramente interessante all'alunno intelligente.

Per un insegnamento attivo e operativo è di grande importanza una raccolta di esercizi e problemi scelti in modo da aderire intimamente agli svolgimenti del testo. Ora si trovano dei testi che contengono una larga messe di esercizi, specialmente per l'algebra; quelli di geometria presentano spesso un materiale poco adoperabile nell'insegnamento, recando problemi troppo teorici e superiori alle forze dell'alunno, per cui questi, dopo alcuni tentativi non riusciti, perde la fiducia nella possibilità di risolverli. Sarebbe desiderabile inoltre di trovarvi in maggior numero quei problemi, tanto ricchi di interesse, che dimostrano le applicazioni che la matematica trova in altri campi della scienza e nella pratica.

In conclusione, vi sarà ancora in questi testi alcunchè di sovrabbondante, specialmente dove la preoccupazione, non abbastanza superata, del rigore logico è causa di prolissità e pesantezza della trattazione, la quale riesce molto più facile se alla chiarezza intuitiva unisce la brevità e la semplicità degli svolgimenti;

ma lo spirito dei trattati è mutato. Chi scrive ha dinanzi a sè l'alunno nel quale tende a promuovere un'attiva riflessione, guidandolo attraverso quei procedimenti per i quali lo spirito veramente apprende, anzichè mettergli innanzi senz'altro delle teorie perfettamente sistemate ch'egli sia costretto a studiare più o meno passivamente.

Rilevando i rapporti che esistono fra l'astratto e il concreto, fra la teoria e l'applicazione, non si procede in modo diverso da quello per cui si sviluppa la scienza. La quale, dopo aver attinti i primi elementi per le sue costruzioni teoriche dall'esperienza e dall'intuizione, trova spesso l'impulso a nuove ricerche in campi diversi di studio.

Nè si snatura l'essenza della struttura logica della matematica qualora si accresca il numero degli elementi desunti dall'intuizione ed elevati a concetti e idee primitive, purchè si giunga per essi alle altre proposizioni per mezzo della deduzione.

D'altra parte, se il fine dell'istruzione ha da essere l'educazione dello spirito, non si deve costringere questo, contro la sua natura, entro i limiti della sola attività teorica. L'aver riconosciuto questa viva realtà e l'aver informato l'insegnamento alle leggi più profonde dello sviluppo dello spirito costituisce l'essenziale dei nuovi indirizzi a cui è avviata la scuola.

* * *

Un punto molto importante e molto discusso della riforma scolastica è stato l'abbinamento della matematica e della fisica, il cui insegnamento è stato affidato in tutti gli istituti allo stesso insegnante.

Questa innovazione non ha trovato il consenso generale degli insegnanti. Ma giova tener ben distinto il principio in sè dell'abbinamento dalle circostanze contingenti che si sono verificate all'applicazione della riforma, sulle quali non è qui il caso di diffondersi. La riforma è stata attuata immediatamente quasi in tutta la sua portata. Insegnanti che fino allora avevano professato uno solo dei due insegnamenti e in rapporto a questo avevano curato la propria cultura, si videro addossati d'improvviso ambedue e, per di più, con orari alquanto gravosi.

A prescindere dunque da queste circostanze, proprie del periodo di transizione, si deve riconoscere che anche con questo provvedimento la riforma ha perseguito i medesimi intendimenti: mettere l'insegnamento in condizioni tali da corrispondere meglio alle esigenze di un'educazione organica, armonica e unitaria dello spirito.

Contro l'abbinamento si è fatta valere l'obbiezione che la mentalità del matematico è troppo diversa da quella di chi si dedica allo studio di una scienza sperimentale per poter trovare nella stessa persona un valente insegnante di ambedue le materie. Ma tale obbiezione non regge di fronte al nuovo indirizzo

che si vuol imprimere all'istruzione. Nè la matematica dev'essere esclusivamente teorica e deduttiva, nè la fisica soltanto sperimentale e induttiva, e parte da una falsa concezione dello spirito dell'alunno chi immagina di poter educare in lui separatamente due diverse facoltà, perchè lo spirito non si divide senza mortificare. L'opera dell'insegnante non deve essere unilaterale. La minore profondità delle conoscenze ch'egli potrà conseguire dovendo dedicarsi a due discipline diverse sarà compensata da una visione più larga, più universale, più viva ch'egli saprà dare agli alunni del loro studio, e dalla maggiore efficacia del suo insegnamento.

I vantaggi di una penetrazione così intima dei due insegnamenti trovano già dei rilievi di fatto nelle relazioni inviate dai presidi al Ministero della pubblica istruzione sull'insegnamento della matematica e della fisica dopo l'attuazione della riforma. Da questo risulta come qualche insegnante se ne valga per rilevare le affinità e le differenze di metodi propri alle due discipline e gl'influssi esercitati dall'una sull'altra nel loro sviluppo storico; per giovarsi opportunamente dei mezzi offerti da una materia a sussidio dell'altra; per conferire all'insegnamento della fisica quella maggior precisione che si può conseguire con l'uso appropriato dei metodi della matematica; per ricavare più spesso con la deduzione qualche legge fisica come conseguenza di principi più generali. Anche da qualche testo di recente pubblicazione si può riconoscere quanto di precisione e di eleganza possa acquistare lo studio della fisica da un opportuno sussidio della matematica.

In questo modo dunque anche l'abbinamento dei due insegnamenti è inteso ad un miglior riguardo all'unità spirituale dell'alunno.

* * *

In conclusione, il periodo ormai superato per l'insegnamento della matematica nelle scuole ha contribuito al perfezionamento della trattazione teorica della materia, quello che si è iniziato ne accresce l'efficacia didattica. Ciascun indirizzo lascia le tracce dei propri caratteri e segna un passo innanzi sulla via del progresso. Il nuovo non meno che l'antico conferiscono all'insegnamento in Italia una sua propria fisionomia.

G. M. SITTIGNANI (Genova - Italia)

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA NEGLI ISTITUTI DI CULTURA GENERALE

§ 1. - Può e deve interessare i cultori delle Scienze Matematiche la questione dell'apprezzamento che ne fa la società colta, ma non specializzata in queste discipline? Alcuni pensano di sì, poichè gli ordinamenti, che rispecchiano appunto le correnti di pensiero di questa società, in cui i matematici sono in minoranza, influiscono, e talvolta nel modo più diretto, sulla formazione dei nuovi matematici. Non può essere indifferente che tale società abbia un'idea adeguata o manchevole di questo ordine di studi, apprezzi o no il loro valore formativo, promuova o trascuri di fatto le vocazioni scientifiche. Gli effetti sono certo a lunga scadenza e talvolta la scadenza è secolare. Ma non è perciò meno precisa l'opportunità che il mondo matematico esprima dal proprio seno, non soltanto il ricercatore, il sistematore ed il critico, ma anche il divulgatore.

Quali sono i mezzi più efficaci per tale divulgazione? Il primo e *fondamentale* è l'insegnamento negli istituti medi di cultura generale, in quanto pone le basi e prepara l'humus indispensabile per le altre forme di divulgazione: scientifiche propriamente dette, storiche, filosofiche, biografiche, etc....

Benchè quanto segue possa valere in gran parte per un campo più esteso, mi riferisco particolarmente agli Istituti classici, i quali debbono costituire la Scuola Umanistica, non nel senso che essa debba coltivare soltanto le tendenze storico-letterarie, ma *tutto lo spirito umano* nei suoi molteplici aspetti ed attività, Scuola Umanistica, che deve ispirarsi alle tradizioni del nostro Rinascimento, quando la cultura era armonia, onde così sovente la scienza e l'arte fiorivano insieme in un medesimo spirito.

§ 2. - Perchè il fattore educativo e culturale matematico possa far parte di questa armonia, la matematica deve essere presentata com'essa è; non scheletro logico, ma organismo vivo, anima più che strumento delle altre scienze e quindi in rapporto intimo con la realtà concreta. In particolare lo studio della matematica non può ridursi a quello del trattato. Non mi riferisco di proposito a quell'indirizzo, oggi in fase decrescente, che tentò portare nella scuola media

l'ipercritica e un certo colore convenzionalistico (1). Il trattato per quanto perfetto sotto ogni punto di vista, è sempre un *assetto logico artificiale* delle proposizioni, in contrasto con la genesi storica. Quella scienza che si snoda così sicuramente e rapidamente produce nei giovani una falsa impressione di meccanismo e un'idea monca e deformata di quel che è la matematica. È ovvio che il trattato è necessario, è centro e sintesi del sapere che lo scolaro acquista e deve vedere appunto come organismo logico. Senza il rigore la matematica cesserebbe di esistere. Il trattato, quando sia bene approfondito, è efficacemente educativo. Ma il gusto del rigore e del bello di una costruzione logica, richiede che essa sia tutta pervasa di quella linfa viva che è l'intuizione (anche e specialmente in senso Cartesiano), quest'intuizione e questo gusto non si acquistano con uno studio schematico. Occorrono opportune integrazioni, e senza malintese economie di pensiero e di tempo. I testi, per geniali che siano, non possono che darne lo spunto. Queste integrazioni sono principalmente: le esercitazioni, i rapporti col concreto e i riferimenti storici.

§ 3. - Io non dico che nella scuola classica si debba insegnare « ex professo » la storia delle matematiche. Ma lo studente, al termine dei corsi, non deve ignorare del tutto, per quanto modesta sia la sua cultura tecnica, quel che è stata ed è la ricerca matematica. Attraverso opportuni esempi storici apprenderà in particolare che anche la verità matematica si conquista tentando e lottando, che talora richiede una elaborazione secolare, che si collega in mille forme a questioni che riguardano altri campi del sapere, e che il matematico conosce le irrequietezze, i dolori e le gioie dell'artista, da cui non differisce forse, in quanto ricercatore, se non per il più severo controllo che impone a sè stesso. Qualche riferimento p. es. al « Metodo » di ARCHIMEDE, così diverso nella ricerca e nella sistemazione, qualche passo di WEIERSTRASS o di MITTAG LEFFLER su ABEL, qualche pagina del POINCARÉ sul lavoro inconscio, o del LE ROY, malgrado tutto il suo nominalismo, sull'avvicinarsi alla verità, quanto interesse potrebbe suscitare!

Ma non vorrei che questa parte integrativa avesse a sua volta carattere schematico. Qui le nozioni importano sopratutto per l'idea generale che suscitano. È l'insegnante che *deve trarle dal suo spirito e dalla sua cultura* e adattarle alla scolaresca. E appunto non saranno mai abbastanza raccomandate le opere storiche nelle biblioteche dei professori.

I riferimenti storici di carattere esteriore sono spesso possibili ed opportuni purchè siano brevi e ben legati al trattato, meglio se distribuiti in modo da

---

(1) Su questo argomento è una ricchissima letteratura, miniera preziosa per lo studioso di questioni didattiche e ad un tempo documento di quella sincerità e serenità nel desiderio del meglio, che sembra caratterizzare i matematici, i quali, come avevano portato nella

servire nel tempo stesso, specialmente nelle classi inferiori, ma non in queste soltanto, a render varia la lezione, a colorire, a localizzare, ad arricchire una nozione arida, a far riposare un istante la mente dei discepoli su qualche cosa che non richiede sforzo e sembra ed è una dilettevole parentesi.

Per i riferimenti intrinseci la cosa è assai più delicata. Vi sono certamente argomenti che si prestano più di altri: il concetto di numero irrazionale, diverse parti della teoria dell'equivalenza, la teoria delle parallele... Spetta all'intuito del professore la scelta e la misura.

Ma se queste sono adeguate, l'interesse suscitato è tanto più grande quanto più l'argomento sembra staccarsi da quelli comuni e la scolaresca ha la sensazione di affrontare una difficoltà e di superarla, di affacciarsi alla soglia di nuovi campi del sapere, di riallacciare, sia pure solo in qualche parte ed imperfettamente, momenti storici diversi.

Per tutto ciò non convengono programmi che avrebbero per effetto di staticizzare in pedantesche rotaie ciò che deve poter variare per quantità e contenuto. Vi sono classi capaci di gustare non solo riferimenti storici intrinseci, ma anche osservazioni filosofiche sui postulati; ve ne sono altre dello stesso grado molto meno atte, e l'insegnante dev'essere tra le altre cose anche buon psicologo e saper economizzare il suo tempo.

§ 4. - Quanto alle esercitazioni, la loro importanza pare così ovvia da far temere che sia superfuo rilevarla. È stato scritto anche recentemente da autorevole fonte (1) che « l'esercitazione costituisce la parte principale dell'insegnamento ». Ma i profani e non proprio soltanto i profani, pensano che questo valga solo per gli istituti particolarmente orientati verso le Facoltà scientifiche universitarie, o verso particolari professioni, e che negli istituti di cultura generale basti qualche esercitazione sporadica. Io non so concepire un'insegnamento matematico che non faccia larghissima parte alla discussione, in cui le esercitazioni propriamente dette (analisi e dimostrazioni di teoremi, risoluzione di problemi teorici e pratici) non siano assai frequenti. Sono esse che destano e mettono in valore l'iniziativa dello scolaro. Senza di esse la matematica si espone, non s'insegna e l'apprendimento minaccia di diventare verbalistico. Se sono ben graduate, in parte guidate, in parte no, e alcune svincolate dalla preoccupazione del voto, l'esperienza prova che non solo gli alunni meglio dotati, ma la maggioranza riesce e si allena a superare difficoltà maggiori. Qualche insuc-

---

scuola l'ipercritica, per riflesso di importanti studi che si compivano in ambienti scientifici superiori, così non appena avvertito il pericolo, si sono preoccupati di studiare a fondo e di risolvere la questione, e noi oggi, e non da oggi soltanto, abbiamo testi in cui si mira giustamente a conciliare la semplicità col rigore.

(1) V. A. PERNA « Annali dell'Istruzione media » Anno III, quad. V, p. 406.

cesso che naturalmente si verifica, non serve che ad impedire pericolose illusioni. Ma la prima volta che lo scolaro riesce per es. a trovare da sè una dimostrazione, sia pure intrinsicamente facile, ma che a lui è costata qualche sforzo di coordinamento, come capisce meglio che cosa vuol dire dimostrare! Noi non sappiamo bene — ha scritto il nostro Vico — se non ciò che noi stessi facciamo. E quale vantaggio sotto l'aspetto formativo!

Le esercitazioni, specialmente sotto la forma di problemi, concorrono a lumeggiare, oltrechè interdipendenze teoriche, i rapporti della matematica colle altre scienze e quindi anche il suo valore nel progresso civile. Giova innegabilmente a tal uopo l'abbinamento della matematica colla fisica, su cui si è tanto discusso. Appunto dalla discussione è venuto crescendo l'apprezzamento dei vantaggi e la persuasione che gli inconvenienti possono con opportune disposizioni eliminarsi (1).

5. - Il contatto col concreto e il rapporto tra l'idealizzazione matematica e l'esperienza che l'ha suggerita, non si deve perder di vista neppure nella trattazione teorica. E non sono da escludersi, anche nel secondo grado, alcune verifiche di proposizioni opportunamente scelte, o su esempi numerici, o su modelli preferibilmente semplicissimi e perfino improvvisabili. Se si tratta di teoremi, non dico che la persuasione cresca, perchè gli scolari bene avviati conoscono il potere probativo esauriente della dimostrazione, in confronto di quello puramente indicatore in matematica, della prova sperimentale; ma capiscono meglio il significato e la portata della proposizione (2) e l'accordo fra la dimostrazione generale e i fatti singoli li aiuta alla sintesi. Senza contare che il confronto fra queste prove e la dimostrazione logica si presta per interessanti richiami storici. Naturalmente non si deve abusare neppure delle verifiche.

La questione dei rapporti fra il pensiero matematico ed il mondo esteriore ha poi un'aspetto filosofico sul quale il professore di matematica non può del tutto tacere. Siano pur diverse le possibili concezioni sistematiche, vero è che i fatti avvengono come se alla forma matematica essenziale della ragione umana (3)

---

(1) V. per uno svolgimento esauriente l'art. di A. PERNA, dianzi citato. Cfr. per i rapporti dell'insegnamento matematico col concreto p. es. Boll. Mathesis, 1911, art. di G. LORIA, *Matematica e realtà*, p. 1-4; del BOURLET, p. 5-8; Relaz. FAZZARI, id. Suppl. p. 47; G. SCORZA, id. p. 75-79; Boll. Mathesis 1912, G. GIORGI, p. 74; G. CASTELNUOVO, p. 121-128; (cfr. Atti del Congr. di Cambridge, 1922, V°, p. 132-139; RIGNANO, Revue de Metaph. et de M., p. 711-722; NATUCCI, *Il numero e le sue estensioni*, cap. XXX; F. SEVERI, « Scientia », 1910 p. 1-29; oltre le Opere filosofiche di H. POINCARÉ, di F. ENRIQUES ed altri.

(2) V. p. es. BOUASSE, *Mathématiques Générales*, p. 613.

(3) V. p. es. NICOLÒ CUSANO, *De Docta Ignorantia*, ed. 1913, pp. 10, 76; *De Coniecturis*, ed. 1565, p. 77.

rispondessero i ritmi del mondo (1) e il numero, in quanto armonia quantitativa che condiziona altre armonie fosse anch'esso elemento della realtà, almeno come umanamente è conoscibile (2).

§ 6. - Qual parte dev'esser fatta alla matematica negli Istituti Medi di cultura generale? Quella che può rispondere ai seguenti scopi: La matematica deve poter esercitare efficacemente la sua azione formativa (3), sia nel primo, sia specialmente nel secondo grado, quando la scolaresca è più capace di penetrarne lo spirito, cosicchè nella scuola si formino menti e caratteri che si controllano con metodo severo, si abituano al riconoscimento disinteressato della verità, ed anche a quella onesta limpidezza dell'espressione che obbliga ad assumere, senza comodi anguilleggiamenti, la responsabilità di ciò che si afferma.

L'insegnamento dev'esser poi tale da coltivare e non lasciar deviare le migliori vocazioni scientifiche, le quali appunto sorgono più spontanee negli Istituti di cultura generale, mentre se la scelta è imposta troppo presto, vien fatta con insuffiente consapevolezza e spesso in base a criteri estranei.

Infine anche i futuri letterati, giuristi, filosofi, storici, che domani costituiranno gran parte delle classi dirigenti e potranno assurgere alle più elevate e delicate mansioni, debbono con gli studi di matematica del liceo formarsi una idea se non vasta e ricca, almeno non deformata, di quel che è oggi la matematica, idea che non puo essere comunicata con apprezzamenti generici, ma deve sorgere come sintesi da uno studio matematico, elementare sì, ma adeguato, per qualità e quantità.

§ 7. - Posto quanto precede, non è inopportuno rilevare che il raggiungimento di questi scopi dipende da due ordini ben distinti di cause: il valore dell'insegnante e l'adeguazione degli ordinamenti. Dall'importanza del primo nessuno dubita. Anzi alcuni pensano che l'insegnante sia una specie di taumaturgo e possa prescindere da tutte le condizioni. Ma intanto è ovvio che se colle sole lezioni, preparazioni prossime e ogni altro lavoro immediatamente scolastico egli è costretto a raggiungere e superare ogni giorno il limite della stanchezza, difficilmente potrà sfuggire ad una precoce fossilizzazione.

D'altra parte occorrono orari di classe non troppo ridotti. L'illusione di poter condensare l'insegnamento, riducendolo quasi all'arido linguaggio tecnico, ha fatto

---

(1) P. es. quando il raggio del cerchio ha quella data lunghezza, l'occhio vede alla circonferenza quella data curvatura; quando le vibrazioni di una corda musicale raggiungono quel preciso numero al minuto secondo, l'orecchio percepisce quella data nota, etc.

(2) Ciò non vuol dire che la scienza postuli il matematismo universale. L'elemento matematico è una categoria dello spirito, non è tutto lo spirito.

(3) Cfr. F. ENRIQUES, « Questioni » ed. I, art. I, p. 31, e « Periodico di Matematiche » 1° genn. 1924: *Il significato umanistico della scienza nella cultura nazionale.*

sì che molti alunni sono rimasti alla barriera di quel linguaggio e alcuni poi non ricordano se non il buio ed il tedio di certe lezioni, onde pensano che sia opera umanitaria distribuirle nelle scuole medie col contagocce, come si fa di certi veleni necessari.

Contrariamente ad una opinione diffusa, non vi dev'essere gran divergenza fra il tempo (1) che l'insegnamento matematico richiede in un'Istituto medio di tipo scientifico, o di tipo classico, *per le parti del programma che sono comuni.* Là s'insegneranno più nozioni tecniche e si faranno esercitazioni più difficili; qui non potendo ordinariamente presupporre speciali attitudini, saranno più necessari avviamenti e delucidazioni. Là si potrà contare anche su lavori eseguiti fuori lezione, qui esclusivamente, o quasi, su ciò che gli alunni fanno e imparano in classe....

Il male della sproporzione tra programmi ed orarî è grave ed inveterato. Vedasi ad es., per quel che riguarda l'Italia, la Relazione SCARPIS, ricca di dati storici precisi, dal 1869 in poi, presentata al Congresso matematico internazionale del 1911.

Alcuni si preoccupano sopratutto dei programmi e si rallegrano sol che figuri sulla carta qualche nuovo punto da trattare, come se un dato programma di matematica razionale potesse svolgersi, senza deformazione, entro qualunque orario! (Se domani p. es. venissero aumentati in media di un'ora settimanale per classe, gli orari di matematica dei nostri Istituti classici, io non desidererei che si aumentasse la mole dei programmi).

Se il professore non deve essere oberato di troppo lavoro quantitativo, perchè sarebbe a danno della qualità, e nel tempo stesso gli orari di classe debbono essere relativamente ampi per consentire gli esercizi in collaborazione e qualche altra integrazione che temperi l'aridità del trattato, è necessario che *il numero delle cattedre* non sia eccessivamente contratto. Il numero delle cattedre, in rapporto a determinati programmi, ha un'importanza capitale. È questo l'elemento che noi non possiamo creare, ma riceviamo dal di fuori, ed esso è in ragione del concetto che si ha della matematica nella società colta, più vasta nella quale viviamo.

§ 8. - Qual'è oggi l'apprezzamento che la società colta fa delle matematiche? Io non debbo qui esporre come dall'armonia umanistica si sia giunti a determinare un distacco sempre più profondo fra i matematici e la grande maggioranza degli altri studiosi. Lo spazio non mi consente neppure di formulare come si dovrebbe le principali cause, che in parte si compenetrano e si concatenano: la vastità, la difficoltà e la molteplicità degli sviluppi della matematica moderna, il chiudersi dei matematici nella cosidetta « torre d'avorio », special-

(1) V. parentesi successiva.

mente nel secolo scorso, la reazione filosofica contro la scienza, lo schematizzarsi dell'insegnamento matematico negli istituti medi di cultura generale, onde veniva minata la base più propria della divulgazione. Oggi la grande maggioranza della società colta ha mentalità specialistica. Non vi è in sostanza molto divario tra l'apprezzamento di quei letterati (in senso lato), pei quali la matematica come coefficente educativo e di cultura generale è insignificante, e quello dei professionisti scientifico-tecnici per cui è solo strumento di lavoro. Dell'opportunità di non crescere generazioni di retori è diffusa la convinzione, ma non lo è altrettanto la persuasione di quel che può la matematica nel campo educativo. Dell'importanza pratica delle scienze nessuno dubita. Ma è inadeguata l'idea che si ha, in generale, del rapporto fra l'inventore e gli scienziati precursori.

Tuttavia non manca qualche elemento confortante. Valorosi matematici e fisici, cultori di storia e filosofia delle scienze, fra i quali l'Italia conta nomi ben noti, si sono dedicati, specialmente in questi ultimi tempi, anche ad opera di divulgazione. E vengono incontro ad essi alcuni filosofi, che hanno saputo compiere lo sforzo veramente arduo di approfondirsi anche in matematiche superiori. Nè si deve tacere di quei letterati, che pur mantenendosi in una zona estrinseca, mostrano di sentire l'importanza di quest'ordine di studi. Si può anche osservare che il momento culminante della reazione filosofica contro la scienza è piuttosto di ieri che di oggi, perchè l'aver esteso la critica, dalla scienza all'intelligenza (dopo aver artificiosamente svuotato questo di ogni elemento attivo) ha messo meglio in luce i punti deboli e i malintesi di quella critica (1). Nè si può tacere lo sforzo, non solo onesto, ma valoroso, di molti insegnanti, anche se le circostanze non permettono che si attui tutto il profitto spirituale che la loro abnegazione meriterebbe.

§ 9. - In Italia un particolare tentativo verso l'Umanesimo è rappresentato dalla Riforma « Gentile ». Essa ha rotto un vecchio marasma, con le sue attuazioni più felici e perfino con quelle meno felici, che appunto riguardano, come è noto, la questione delle discipline scientifiche, più acutizzata che risolta. È innegabile che la Riforma proclamando in linea di principio la Scuola Umanistica, promuovendo la serietà degli studi, avvalorando l'attività del pensiero in confronto della somma delle cognizioni, ha preparato appunto il quadro, in cui la matematica, com'essa è, e non come altri si figura che sia, può trovarsi degnamente al suo posto. Tanto è vero che la questione si può risolvere con soli provvedimenti estrinseci, senza nè disfare l'abbinamento colla fisica, nè perturbare in modo significante l'assetto delle altre discipine. (P. es. nel Ginnasio-Liceo Classico basterebbe un semplice sdoppiamento di cattedra, con qualche opportuno mutamento d'orario; e la più naturale permutazione ciclica delle classi affidate a

(1) Cfr. p. es. L. BRUNSCHWIGC, R. M. M. 1911, p. 173.

ciascun insegnante permetterebbe di conservare anche la continuità d'insegnamento dal primo all'ottavo anno).

Forse mai come ora, da un cinquantennio a questa parte, il clima spirituale è stato propizio al serio riconoscimento e quindi alla risoluzione della questione; e mai come ora i matematici hanno sentito che per l'avvenire stesso della scienza che coltivano, è necessario stabilire e mantenere contatti cogli altri campi culturali.

Questo stesso magnifico Congresso, che col suo vario ed imponente programma, ha dato un saggio di quel che è oggi la matematica, dai più sublimi ai più elementari suoi gradi, dei suoi rapporti colle altre discipline: scientifiche, storiche, filosofiche, del suo valore in ordine a tante forme fondamentali della vita civile e nazionale, questo Congresso che ha suscitato nuove risonanze nella nuova Italia, segna una pietra miliare dell'auspicata valorizzazione.

E. ARTOM (Torino - Italia)

INTORNO ALL'INSEGNAMENTO DELL'ARITMETICA E DELL'ALGEBRA

La lettura dei programmi d'esame, o dei testi di matematica delle scuole medie di tutti i paesi dà l'impressione che chi esce da queste debba essere fornito di una notevole coltura matematica; eppure è noto che buona parte delle persone cosidette *colte* ricorda di matematica poco più, e talvolta anche meno, di quel che ha imparato nelle scuole elementari. Se questa discordanza fosse solo dovuta al fatto che la matematica imparata nella scuola media viene dimenticata presto per mancanza di uso e di interesse, sarebbe poco male; io ho però la convinzione che, anche durante gli studi medi, le persone alle quali alludevo non abbiano mai imparato la matematica che studiavano.

Escludendo dalle mie considerazioni il campo geometrico, anche perchè più spesso se ne discorre, incomincio coll'affermare — cosa che ad alcuno potrà parere a tutta prima esagerata — che molti giovani giungono alle soglie dell'Università senza aver acquistato una chiara conoscenza nemmeno delle operazioni fondamentali dell'aritmetica e talvolta neppure della serie naturale dei numeri. È ben vero che nei casi più comuni della vita pratica (compra-vendita; calcolo del resto di un pagamento; sconti e interessi ecc.) sanno cavarsela; ma ciò avviene soltanto perchè nelle scuole elementari hanno fatto migliaia e migliaia di esempi. E la pazienza eroica dei maestri elementari è messa perciò a ben dura prova! Ma appena si presenta un caso veramente nuovo, quei certi giovani sono imbarazzati: basta pensare — cito i primi esempi che mi vengono in mente — al computo della somma degli angoli esterni di un triangolo, quando già si conosca quella degli interni; alle prime proprietà delle progressioni aritmetiche e geometriche; ai principi di analisi combinatoria; alle dimostrazioni per induzione completa; se il professore o il libro di testo non espongono in modo esplicito e completo i ragionamenti od i calcoli da fare, pochi, troppo pochi alunni sanno procedere.

Questo prova che essi non sono arrivati alla chiara conoscenza dei primi elementi dell'aritmetica.

L'ignoranza dell'aritmetica del numero intero è certamente la più grave fra quelle che dovrò lamentare, ma non è la sola. Da essa discende la difficoltà nell'imparare il calcolo letterale, poichè in molti giovani permane la confusione

fra addendo, fattore, esponente,.... e in conseguenza le proprietà di un' operazione vengono attribuite ad un' altra fino al termine del liceo.

Le operazioni sulle frazioni, che dovrebbero essere state imparate definitivamente fin dai primi anni, vanno spiegate un' altra volta nel calcolo letterale, per essere poi dimenticate subito, sicchè la risoluzione dell' equazione di primo grado, che dovrebbe richiedere un paio di teoremi e la facile discussione, porta via dei mesi, dopo i quali certi alunni hanno imparato macchinalmente a risolvere delle complicate equazioni, ma finiscono, quando debbono sommare delle frazioni, col ridurle allo stesso denominatore, sommare i numeratori e.... trascurare il denominatore.

Si arriva poi, bene o male, al calcolo dei radicali, che sarebbe una semplicissima cosa se, come al solito, non si dovesse ritornare ai principi di aritmetica. E così avviene che noi dobbiamo proporre delle serie interminabili di esercizi, fra i quali i più buffi, che si trovano proposti in molti libri e, purtroppo, sono *necessari*, sono quelli sulle *addizioni e sottrazioni di radicali!* Tali esercizi mi fanno pensare ad un libro di sintassi latina ad uso dei licei, dove sia proposta una serie di esercizi intitolata: *la consecutio temporum per i verbi della prima coniugazione!* Ma un insegnante di latino troverebbe serio insegnare la sintassi a giovani che per applicarne ciascuna regola dovessero sempre ristudiare da capo tutta la morfologia?

Lo studio dell' equazione di secondo grado dovrebbe consistere essenzialmente nell' artifizio euclideo, mediante il quale l' incognita viene presentata nel quadrato di un binomio di primo grado e, ai fini pratici, nella formola risolutiva; ma ecco che la solita zavorra delle scuole medie, un po' troppo numerosa, si trova persino imbarazzata a sostituire i valori speciali alle lettere della formola, e così il tempo che dovremmo impiegare in notevoli applicazioni viene in gran parte assorbito da puerili risoluzioni di equazioni!

Ultimo fra gli argomenti d' algebra delle nostre scuole classiche è la teoria della funzione esponenziale e dei logaritmi, che per alunni ben preparati dovrebbe presentare una sola difficoltà, il teorema d' esistenza del logaritmo. Invece questo passa in seconda linea, mentre i soliti alunni deboli si affannano a studiare i teoremi sul logaritmo di un prodotto, di un quoto, di una potenza e poi si fermano allo scoglio dell' interpolazione, che pure, prescindendo dallo studio dei limiti entro i quali è lecita, dovrebbe presentarsi spontanea a chiunque abbia un po' d'intuito aritmetico.

Ho trascurato di accennare fin qui alla teoria dei numeri reali, perchè, evidentemente, essa è vuota di significato per i giovani dei quali ho parlato finora e quindi non può lasciare alcuna traccia nel loro spirito, in qualunque modo sia stata spiegata.

Ma nel liceo scientifico, dove giovani che imparino con troppo stento la nostra disciplina non dovrebbero trovarsi, lo studio dei numeri reali ha un' im-

portanza capitale, anche come necessaria preparazione allo studio dell'analisi, e non solo perchè non si potrebbe parlare di limiti senza possedere i numeri reali, ma anche perchè i metodi di dimostrazione che servono nella teoria dei numeri reali ritornano nei teoremi sui limiti. E solo se i detti metodi sono stati ben assimilati in precedenza, l'alunno può, nei teoremi d'analisi, fermare l'attenzione su ciò che vi si trova di veramente nuovo e non esaurire la propria capacità di attenzione nello studio degli artifizi di dimostrazione. Notiamo che l'insegnamento dei principi di analisi deve nelle nostre scuole condurre gli alunni ad avere una chiara idea di quel che sono i limiti, le derivate, gl'integrali anche se, solo in pochissimi casi, sapranno calcolarli e farne uso. Ad approfondirne lo studio penseranno i professori universitari: noi, che disponiamo di maggior tempo e siamo in più diretto contatto cogli alunni, dobbiamo condurli a sapere che cosa sono questi enti e come, col loro mezzo, si precisino tanti concetti, che si presentano ad ogni passo in geometria ed in fisica. Ma dobbiamo aver cura che quel poco che insegnamo sia preciso e rigoroso; non avvenga che in un medesimo corso di matematica, nel quale si è svolta tutta la teoria dei numeri reali, prima di osar parlare di $\sqrt{3}$, o la teoria della rettificazione della circonferenza, prima di parlare della sua lunghezza, si scavalchino poi con disinvoltura questioni assai meno intuitive a proposito dei principi d'analisi! E si noti che, se i capitoli precedenti sono stati ben appresi e particolarmente le teorie delle disuguaglianze e dei numeri reali, non vi sono più difficoltà gravi per procedere correttamente. Alla peggio qualche proposizione intuitiva potrà essere enunciata colla dichiarazione esplicita che se ne omette la dimostrazione.

A proposito di dimostrazioni di aritmetica e d'algebra vorrei aggiungere un'osservazione. Credo che nella scuola media le si possono raggruppare in due classi: nell'una quelle che gettano una viva luce sulla proposizione proposta e ne facilitano la comprensione e il ricordo; nell'altra quelle che servono a persuadere l'alunno della verità della proposizione, della quale però egli aveva già capito perfettamente il significato e l'uso. Queste ultime sono evidentemente, sotto l'aspetto didattico, meno importanti e buona parte di esse sono quelle che rientrano nella parte A dei nostri programmi di maturità. Esse si riducono spesso a semplici calcoli, che da un alunno ben avviato potrebbero essere improvvisati, al più col suggerimento di qualche opportuno artifizio.

Che cosa possiamo ricavare da queste considerazioni? Se l'aritmetica e l'algebra vengono insegnate in modo ben graduato, ogni capitolo racchiude in sè ben poche nuove difficoltà, sicchè l'alunno anche mediocre deve passare facilmente da un capitolo al successivo. Ora, poichè siamo matematici, ragioniamo da matemateci e applichiamo il principio d'induzione completa alla classe dei capitoli da studiare. Per concludere che l'alunno mediocre può imparare bene tutta la materia, visto che può passare facilmente da un capitolo al successivo, bisognerebbe poter affermare che egli ha imparato bene il primo capitolo, cioè l'aritmetica

più elementare. Là sta la base di tutto. Dobbiamo rinforzare lo studio delle operazioni dell'aritmetica e delle applicazioni di esse. I giovani che non le possiedono arrivano al termine del liceo senza aver capito nulla di nulla; quelli che conoscono veramente bene l'aritmetica elementare arrivano invece alla maturità avendo trovato lo studio dell'algebra facile, utile ed anche gradito.

R. MARCOLONGO (Napoli - Italia)

IL CALCOLO VETTORIALE NELL'INSEGNAMENTO SECONDARIO

Mi sia permesso rievocare un lontano ricordo. Nel IV Congresso internazionale dei matematici in Roma (aprile 1908), in una adunanza presieduta da JACQUES HADAMARD e presenti quasi tutti i matematici italiani e moltissimi stranieri, io ebbi l'onore di fare una comunicazione sulla unificazione delle notazioni vettoriali ed illustrai quelle notazioni del sistema cosidetto *minimo*, che da alcuni anni avevamo proposto e cercato di diffondere il Prof. BURALI-FORTI ed io in numerose pubblicazioni ed in alcuni libri e che ora sono chiamate *notazioni italiane*.

In seguito alla discussione della mia comunicazione fu nominata una commissione che non si riunì mai e non fece nulla, nemmeno negli anni anteriori alla guerra mondiale, per la auspicata unificazione.

Però il Prof. FEHR, dell'Università di Ginevra e benemerito direttore dell'*Enseignement*, diè, su questo periodico, ospitalità a molti articoli di plauso e di critica alle proposte italiane, alle quali fu sempre risposto (e a volte anche vivacemente) ed il dibattito finì, senza spargimento di sangue, lasciando, come sempre, i contendenti ognor più fermi nelle loro opinioni e nella difesa al diritto dell'anarchia delle notazioni; le quali, da quell'epoca, sono anche aumentate!

Intanto le nostre notazioni e i metodi vettoriali ridotti alla loro più semplice espressione, e integrati con quelli delle omografie vettoriali, si diffondevano rapidamente in Italia per opera nostra, dei nostri allievi e di colleghi illustri.

Basti accennare ai nostri *Elementi di calcolo vettoriale* (che ebbero già due edizioni italiane e una francese); ed al mio corso di *Meccanica razionale* (che ebbe tre edizioni italiane e una tedesca); a quello di BURALI-FORTI e BOGGIO; del MAGGI, del CISOTTI, del BURGATTI; al grande trattato di LEVI-CIVITA e AMALDI; al recentissimo di GINO POLI (Meccanica generale ed applicata (1927)): nei quali vengono esclusivamente applicati metodi e notazioni italiane (sistema minimo, in generale); e basti infine accennare, per quanto riguarda i metodi delle omografie, ai volumi di *Analyse vectorielle générale*, di cui la benemerita Casa Zanichelli sta preparando una nuova edizione (in vari volumi) e in veste italiana.

Si può affermare che nella quasi totalità dei corsi di meccanica delle nostre Università sono correntemente applicati i metodi vettoriali e le nostre notazioni;

e così pure nei corsi di fisica matematica del Prof. SIGNORINI in Napoli. Non mancano altresì buoni, per quanto isolati, tentativi per inserirli nei corsi di analitica e di calcolo (come fa da lunghi anni il BURALI all'Accademia militare di Torino); così nei noti libri del BERZOLARI e di VIVANTI e SIBIRANI.

In Germania, in cui i metodi vettoriali sono popolarissimi, malgrado la piena adesione del Prof. TIMMERDING (che tradusse in tedesco la mia Meccanica) alle nostre notazioni, si è rimasti fedeli alle vecchie notazioni a cassetta ed ai pseudo metodi vettoriali, accettate nell'Enciclopedia matematica; oppure si sono seguite le notazioni di GIBBS.

Le notazioni di GIBBS hanno pieno dominio nell'America del Nord e in Inghilterra, dove pure sono seguiti anche i metodi dei quaternioni.

Fino a poco tempo fa pareva che la Francia, nonostante la traduzione dei nostri elementi e di qualche libro analogo, si fosse completamente resa assente da ogni questione vettoriale e non vedesse con favore i metodi vettoriali fin nello insegnamento superiore; peggiorando in ogni modo la questione della unificazione con i simboli adottati nella traduzione francese dell'Enciclopedia. Da quattro o cinque anni però sembra che le cose accennino a mutarsi. Infatti nel 1924 i signori A. CHATELET et KAMPÉ DE FÉRIET hanno pubblicato il primo trattato francese di *Calcul vectoriel*, facendo larga, ma non completa adesione alle notazioni italiane; addottando il $\cdot$ (dot) di Gibbs per il prodotto scalare e il nostro $\wedge$ per il prodotto vettoriale. E finalmente un valoroso geometra il sig. R. BRICARD, nelle sue pregevolissime « *Leçons de Cinématique* » Paris, 1926-27, ha in blocco accettato metodi e notazioni italiane.

Il *Bulletin de l'Association des Professeurs de mathématiques dell'Enseignement secondaire public,* nel n. 55 dello scorso aprile, contiene un lungo rapporto del Sig. DESFORGES, nonchè i risultati di una specie di *referendum* sulla « *Unification des mots et des notations mathématiques* » in cui appunto si tratta di notazioni vettoriali ai fini dell'insegnamento secondario.

E questo articolo mi porge appunto l'occasione di chiudere la troppo lunga introduzione e venire senz'altro allo scopo di questa comunicazione. Non voglio qui affatto discutere le considerazioni del Sig. DESFORGES, nè i risultati del referendum (favorevoli, in maggioranza, al sistema Chatelet e Kampé de Fériet); mi sia soltanto permesso di osservare che non è, parmi, nè giusto, nè serio per accontentare gli uni e gli altri, di prendere una notazione del sistema Gibbs (e proprio la meno accettabile) e una notazione del sistema italiano. Vengo dunque ora allo scopo della comunicazione esponendo ai colleghi alcune considerazioni che, secondo me e secondo si fa pure in qualche scuola industriale inglese, consiglierebbero a dare poche e chiare nozioni di calcolo vettoriale ai giovani delle scuole secondarie. Non intendo formulare nè ordini del giorno; nè, tanto meno, proporre la nomina di commissioni, troppo edotto dalla esperienza del passato: mi sarei anzi astenuto dall'interloquire ancora una volta su questo

argomento, se non vedessi una qualche possibilità di attuazione di vecchie mie idee, lasciata sempre al buon volere dei nostri valorosi insegnanti secondari, ora che nelle nostre scuole medie superiori unico è l'insegnante di matematica e fisica. Intendo rivolgermi specialmente agli insegnanti dei licei scientifici e degli istituti industriali.

Un tentativo di questo genere è già stato fatto in un volume « Geometria » redatto dal Prof. BURALI e da me nel 1923 per le scuole medie superiori, in cui fondammo tutta la trigonometria piana e sferica, lo studio delle funzioni circolari ed alcune questioni elementari di geometria, su poche nozioni di calcolo vettoriale. Non oserei dire che un tale tentativo abbia avuto molto successo, almeno in generale. Eppure posso assicurare che un giovane professore di Fermo, il MINETTI, lo aveva coraggiosamente adottato e con risultati veramente ottimi.

Il tentativo, da parte nostra, sarà però prossimamente ripetuto sebbene in proporzioni più modeste, come dirò. E qui è opportuno ricordare quanto egregiamente ha osservato il BOREL nel suo articolo: *L'adaptation de l'enseignement secondaire aux progrès de la Science* (*L'Enseignement*, 1914). « Il n'est pas possible d'espérer que l'enseignement nouveau atteigne vite le même degré de perfection que les enseignements anciens dont il prend la place. Dans les circonstances les plus favorables, il faut compter au moins une génération pour que ce degré de perfection soit atteint, lorsqu'il s'agit d'innovations de quelque importance; il faut en effet que la majorité du corps enseignant soit renouvelée, car il est généralement très difficile d'adapter à des jeunes élèves un enseignement que l'on n'a pas reçu soi-même à leur âge ».

Non credo che io debba indugiarmi a ricordare la semplicità e la importanza dei metodi vettoriali, in geometria elementare, in trigonometria, nella fisica, anche ridotti al sistema minimo, come è stato definito da BURALI e da me. Ma per ciò che riguarda l'insegnamento secondario è possibile una ulteriore riduzione, tralasciando la nozione di prodotto vettoriale.

Ecco in breve sintesi i concetti che dovrebbero svolgersi:

1°) Concetto di vettore e di eguaglianza secondo il metodo seguito negli Elementi già ricordati, uniformandosi, pel vettore, alla utile semplice, notazione hamiltoniana (differenza di due punti).

2°) Definizione di somma di un punto con un vettore (operazione corrispondente al movimento di traslazione).

3°) Definizione di prodotto di un numero reale per un vettore (omotetia)

4°) Espressione di un vettore in funzione lineare omogenea di tre vettori non complanari.

Questi semplici elementi, dati anche con la massima precisione, *esigono* un minimo di cognizioni algebriche e geometriche; si *assimilano* in una settimana di studio; *sono infinitamente più facili e più suggestive* di altre teorie che pur vengono insegnate nelle scuole secondarie (teoria della misura, numeri reali,

logaritmi); *si prestano meravigliosamente* a svariatissime questioni di geometria elementare; *sono quasi indispensabili* in fisica (badi però l'insegnante a non confondere forza con vettore); *semplificano, rendono più esatto e spedito* il linguaggio geometrico; *possono essere comprese* anche dai giovanetti operai delle più elementari scuole professionali.

Ben compresa ed assodata questa prima parte o primo elementarissimo capitolo, occorrono, per proseguire e salire a nozioni più complete e più vitali, le prime nozioni di trigonometria piana.

Io ritengo che non occorra premettere la teoria generale delle funzioni circolari, a quelle poche e sode nozioni di trigonometria, che debbono, o meglio dovrebbero, essere il necessario ed indispensabile bagaglio di ogni studente che debba poi seguire i corsi universitari. Anche qui la via semplice, la strada regia è quella tracciata dal metodo storico: definizione delle funzioni circolari per un angolo acuto od ottuso: formule di addizione: immediata applicazione alle formule più importanti di trigonometria e della risoluzione dei triangoli, che possono essere dedotte, come furono col fatto scoperte e dimostrate, con semplicissime considerazioni geometriche. Così ho io studiato (ai miei lontani tempi) nel terzo anno della sezione fisico-mat. dell'Ist. tecn. di Roma, sotto la guida di un grande maestro, di DAVIDE BESSO, la cui memoria è per me sacra.

Si può quindi, tornando al calcolo vettoriale, definire il prodotto scalare di due vettori, dimostrare le semplici sue proprietà e mostrarne la grande importanza con le ben note e svariate applicazioni geometriche e meccaniche.

Tutto quanto ho esposto si compendia in una cinquantina di pagine; tenuto conto di tutte le esigenze, non richiede che un paio di mesi di studio in scuola.

In un corso ulteriore, (in un quarto anno di liceo scientifico, p. es.) premesse poche nozioni sulle rotazioni in un piano, nozioni che si debbono dare e sfruttare pure nel corso di fisica, si può fare l'applicazione completa, semplice alla teoria delle funzioni circolari.

Ridotto a questi elementi, di una sbalorditiva semplicità, il calcolo vettoriale non dovrebbe spaventare nemmeno i più restii alle novità le più vecchie; lungi dall'essere un aggravio ai giovani, serve a semplificare annose e gravose teorie, dimostrazioni, concetti; e dar loro quelle prime nozioni che poi dovranno sfruttare nei corsi universitari.

Valgano queste brevi, forzatamente sintetiche considerazioni ad invogliare un numero sempre maggiore di docenti a fare il tentativo. Provando e riprovando si deve riuscire a far acquistare diritto di cittadinanza nelle nostre scuole ad una teoria fondata da spiriti sommi, da matematici e da fisici immortali.

Sarei lieto, prima del gran viaggio, di vedere avviata la questione cui ho dedicato tanti anni della mia già lunga esistenza, non al suo completo successo (è finito il tempo di così belle illusioni), ma verso la sua graduale soluzione,

perchè sono profondamente convinto che, anche nei limiti in cui è stata posta, possa far del bene al nostro insegnamento secondario.

Nota aggiunta durante la correzione delle bozze (giugno 1930):

Lo sviluppo della trigonometria, fatto col sistema esposto nella precedente comunicazione, è appunto lo scopo degli: *Elementi di Trigonometria*, ad uso degli Istituti medi superiori e degli Istituti Industriali. Soc. ed. D. Alighieri, 1929 redatti dal Prof. Burali e da me.

Per quanto riguarda poi la questione delle notazioni debbo notare che il Prof. BRICARD nel suo nuovo volume: *Le calcul vectoriel*, A. Colin, Paris, 1929, per ragioni editoriali è stato costretto a valersi delle notazioni dell'Enciclopedia matematica (edizione francese)!

P. HEEGAARD (Oslo - Norvegia)

LA REPRÉSENTATION DES POINTS IMAGINAIRES DE SOPHUS LIE ET SA VALEUR DIDACTIQUE

Je désirerais, dans cette courte communication, attirer l'attention sur un mémoire écrit par le mathématicien norvégien SOPHUS LIE dans sa jeunesse. Ce mémoire a paru dans le journal de Crelle 1869 (t. 70, p. 346) sous le titre « Ueber eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie ». Le mémoire est à présent presque complètement tombé dans l'oubli.

Quand on rencontre dans la géométrie analytique des points avec coordonnées imaginaires, on peut naturellement dire: Cela signifie que le problème est impossible, sans solution. D'un autre côté, sur les sommets de la science, on peut traiter la géométrie analytique comme une algèbre camouflée. Alors les points imaginaires ne causent pas de difficultés. Mais il y a dans l'enseignement un point de vue intermédiaire où il est nécessaire de se former une idée distincte de ces points imaginaires. N'importe si cela se passe dans le gymnase ou dans l'université, le problème pédagogiqùe est le même.

On parle souvent sans façon de ces points imaginaires comme « existant ». L'élève se demande: « Où sont-ils ? ». Et quand plus tard il apprend les qualités paradoxales des lignes isotropes, il devient très sceptique. C'est dommage pour la théorie si belle de la métrique projective générale. La théorie de v. STAUDT, les recherches si belles de LAGUERRE, de STOLTZ, de STUDY, de JUEL et de bien d'autres, sont trop difficiles pour le commençant. Mais l'idée de SOPHUS LIE est incroyablement simple et aisée à comprendre, même pour un débutant.

SOPHUS LIE se procure une variété à quatre dimensions. Il munit les points de l'espace ordinaire de cotes. Il regarde les points de l'espace ordinaire comme projections sur notre espace de points cotés. C'est comme en géométrie descriptive, où l'on traite la stéréométrie à l'aide des points cotés d'un plan.

Eh bien! Supposons un plan xy et un point réel ou imaginaire (x_1+ix_2, y_1+iy_2). Ce point sera représenté de cette manière: *Dans un système trirectangle* $O-x_1x_2y_1$ *on munit le point* B: (x_1, x_2, y_1) *de la cote* y_2. Le vecteur $[OA]$, où A est le point $(x_1, x_2, 0)$, a la valeur $x=x_1+ix_2$. Le plan X_1X_2 est la représentation de l'axe des x. Les points du plan X_1Y_1 avec la cote 0, sont les points ordinaires réels.

Si on a donné l'équation d'une ligne droite $x=a+by$, on peut trouver par des calculs bien simples la représentation de l'ensemble de ses points imaginaires. La projection sur notre espace ordinaire est un plan, et les lignes qui passent par des points avec les même cotes, sont les lignes de plus grande pente. LIE les appelle les raies. La connexione entre les coordonnées (a, b) de la ligne droite et la figure est celle-çi: On construit dans le plan X_1X_2 les deux vecteurs $[OA]=a$ et $[AB]=b$. Alors la raie de zéro passe par A et par le point C, qui est au-dessus du point B dans l'hauteur 1. On obtient la trace dans le plan x_1x_2 de la raie avec cote 1, en tournant $[AB]$ 90° autour de A. Toute la figure est déterminée par sa raie de zéro.

SOPHUS LIE transforme les théorèmes de la géométrie plane en des théorèmes sur les lignes droites de l'espace. Cela est pourtant trop difficile pour le commençant. Mais par un petit changement la représentation peut être rapprochée de la théorie ordinaire des quantités imaginaires dans le plan de Gauss.

Je représente dans le plan XY la ligne droite imaginaire $x=a+by$ par le vecteur $[AB]=b$, aboutissant du point A, où $[OA]=a$. J'appelle le vecteur $[AB]$ le vecteur caractéristique de la ligne droite. Quelle valeur a l'ordonnée y pour un point de la ligne et avec l'abscisse $x=[OP]$? On a l'équation

$$\frac{y}{x-a}=\frac{1}{b}.$$

Cela veut dire: si on construit le vecteur $[PQ]=y$ et le vecteur $[BC]=1$, *les deux triangles APQ et ABC seront semblables.*

Je représente le point (x, y) par le vecteur $[PQ]$. Les triangles « sous lesquels on voit » tous les vecteurs représentant les points de la ligne droite, sont semblables au triangle caractéristique ABC de la ligne droite. C'est la même image que donne aussi une transformation d'homothétie avec rotation autour de A.

De la même manière on obtiendra, dualistiquement, que tous les vecteurs représentant les lignes droites d'un faisceau (sommet (x, y)) seront vus du point $P([OP]=x)$ sous un triangle de forme constante. Tous les triangles sont semblables au triangle PQR, où $[PQ]=x$ et $[QR]=-1$.

La distance entre les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Soient $[OA]=x_1$, $[AB]=y_1$, $[OC]=x_2$, $[CD]=y_2$. Je construis le parallélogramme $ACDE$. Alors $[AC]=x_2-x_1=[ED]$ et $[BE]=y_2-y_1$. Cela veut dire

$$d^2=[DE]^2+[EB]^2.$$

Je finirai par chercher la distance entre deux points sur une ligne isotrope. Soit $[OI]=-i$, le vecteur caractéristique de la ligne isotrope $y=ix$. Son triangle caractéristique OIK est isoscèle et rectangle. Soient $[P_1Q_1]$ et $[P_2Q_2]$, deux vecteurs représentant deux points sur la ligne isotrope. Je tire $P_2Q_3=$ et $+P_1Q_1$. Alors $Q_1Q_3=Q_3Q_2$ et $\angle Q_2Q_3Q_1=90°$. Mais alors on a $[Q_1Q_3]^2+[Q_3Q_2]^2=0$.

Je crois que l'élève comprendra mieux le sens et le contenu vrai du théorème sur la distance zéro entre deux points sur une ligne isotrope, quand il aura vu cette démonstration. L'apparence de paradoxe disparaîtra.

En somme je pense qu'il serait bon d'apprendre aux élèves du gymnase que l'on peut se figurer les points imaginaires comme des points cotés dans l'espace. Dans l'enseignement élémentaire des universités on peut rapprocher la théorie des quantités imaginaires dans le plan de Gauss de la géométrie analytique de la manière que je viens d'indiquer.

C. CLAPIER (Montpellier - Francia)

MÉTHODE DE RECHERCHE DIDACTIQUE EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

La méthode inductive ou synthétique qui fut à l'origine des premières spéculations géométriques, va du simple au complexe, du particulier au général, évitant la fatigue des idées abstraites et progressant d'une manière lente et continue, comme une ascension prévoyante qui élève l'esprit jusqu'aux sommets où la vue s'élargit et peut répérer les chemins parcourus. Il me parait que dans l'enseignement, il est profitable, pour ne point dérouter les jeunes intelligences et faciliter la mémoire des vérités acquises, de procèder ainsi modestement de proche en proche, d'éviter les généralisations, hatives et de préparer les voies à la compréhension des puissantes méthodes de transformation et d'analyse. Voici quelques exemples de ce procédé didactique:

I. - Le triangle équilatéral et le cercle sont les plus simples des figures qui limitent une portion de plan. La construction du triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle montre que le symétrique du centre O par rapport à un côté est situé sur le cercle circonscrit. Or pour ce triangle initial, le point O coïncide avec l'orthocentre H, le centre de gravité G, le centre du cercle inscrit I, le point de concours des symédianes K d'un triangle quelconque; on est donc amené à rechercher les triangles pour lesquels:

1°) le symétrique de H par rapport au coté BC est sur le cercle circonscrit et on reconnait tout de suite que c'est là une propriété générale d'un triangle quelconque;

2°) le symétrique de G jouit d'une propriété analogue, et dans ce cas on trouve simplement, à l'aide de la formule qui donne le carré de la médiane, tous les triangles dont les longueurs a, b, c des côtés satisfont à la relation $2a^2=b^2+c^2$, qui entraine la même relation entre les longueurs des médianes $2m_a^2=m_b^2+m_c^2$; pour ces triangles la droite GK est parallèle à BC. On est ainsi conduit à étudier les triangles moins particuliers pour lesquels, il existe entre les longueurs des côtés la relation $b^2+c^2=na^2$ (n entier quelconque) (1) qui pour $n=1$ donne le triangle rectangle: le point K divise la symédiane dans le rapport n;

(1) Mathesis, 1926, p. 68.

3°) le symétrique de I par rapport à BC est situé sur le cercle circonscrit: si on désigne par I' ce point et par D le point de contact du cercle inscrit avec le côté BC, on a dans le triangle IOI',

$$\overline{OD}^2 = \frac{\overline{IO}^2 + \overline{IO}'^2}{2} - \frac{\overline{II}'^2}{4} = R^2 - Rr - r^2;$$

et si on applique le théorème de Stewart aux 3 points B, D et C vus du point O

$$R^2 = \overline{OD}^2 + BD a DC,$$

et par suite,

$$BD \times DC = r(R+r);$$

la perpendiculaire II' rencontre à nouveau le cercle circonscrit en un point situé à une distance R du point I;

4°) le symétrique K' de K par rapport à BC est situé sur le cercle circonscrit; en exprimant que les distances du point K' aux côtés du triangle vérifient la relation $ad_2d_3 = bd_1d_3 + cd_1d_2$, on trouve la condition

$$-bc + 4a^2 \cos B \cos C = 0.$$

Il est utile de vérifier l'exactitude des formules trouvées, en les appliquant au triangle équilatéral qui nous a servi de point de départ.

II. - Si on envisage un cercle comme le lieu des sommets d'un angle droit AMA' dont les côtés passent par deux points fixes, on est amené à chercher le lieu des sommets M du triangle AMA' dont les points $\widehat{A}$ et $\widehat{A'}$ sont fixes et la somme des angles $\widehat{A} + \widehat{A'} = \text{const.}$

Que deviendrait le lieu précédent si au lieu de prendre la somme, on prenait la différence $\widehat{A'} - \widehat{A} = \text{const.} = a$.

On fait ainsi apparaître l'hyperbole équilatère que l'on peut associer par homologie au cercle passant par A et A' et tangent à la droite $A'D$ inclinée de a sur AA'; cette droite sera l'axe d'homologie correspondant au centre A. On peut ainsi déduire les propriétés de l'hyperbole équilatère de celles du cercle (1).

III. - Envisageons un trapèze isoscèle unicursal $ABCD$ et soient R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit de centre O et I, $IO = d$; remarquant que le triangle AIB est rectangle et que le carré de la hauteur $r^2 = AE \times BF$ (E et F étant les milieux de AD et BC), on trouve simplement la relation

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2).$$

On peut induire qu'elle s'applique au cas général d'un quadrilatère inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre (2); c'est ce qu'on trouve en étudiant

---

(1) Étude élémentaire de l'hyperbole équilatère par J. LEMAIRE (Paris, 1927).

(2) Voir ma Note: *Sur les Polygones de Poncelet.* (Congrès de Bordeaux, 1924).

la déformation d'un quadrilatère unicursal, dont l'un des côtés reste fixe: le lieu du centre du cercle inscrit est un cercle de rayon $\frac{\sqrt{abcd}}{a+c}$ et si cette valeur est précisément r, rayon du cercle précédent, le quadrilatère est inscriptible.

IV. - On peut aussi, en partant de figurer simples de l'espace, intéresser les éléves aux recherches géométriques, en développant leur sens intuitif. Ainsi, pour construire un tétraèdre régulier inscrit dans une sphère de diamètre AA', il suffit de mener un plan perpendiculaires aux deux tiers de ce diamètre; ce plan coupe la sphère suivant un cercle dans lequel on inscrira un triangle équilatéral BCD. Le tétraèdre $ABCD$ est tel que ses 4 hauteurs se coupent en O et si on désigne par I la projection de ce point sur la face BCD, on a $IA'=2\cdot IO$. On est ainsi amené à considérer le tétraèdre orthocentrique qui jouit de la même propriété $IH'=2\cdot IH$, H' étant le point de rencontre de AH prolongé avec la sphère circonscrite.

MARIE ZERVOS (Athenai - Grecia)

SUR UNE EXPRESSION NOUVELLE DE LA DÉFINITION DES NOMBRES PREMIERS

1. - Je me propose de faire connaître comment, par une expression nouvelle de la définition des nombres premiers et de celle des nombres premiers entre eux, on arrive à présenter sous une forme nouvelle un certain nombre de théorèmes de l'Arithmétique Élémentaire.

2. - Considérons les suites :

$$(A)\qquad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots. \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 & 2.4 \ldots. \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 & 3.4 \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

dont la première est celle des nombres naturels, la seconde se déduit en multipliant par 2 les éléments de la première, la troisième se déduit de la seconde en multipliant par 3 les éléments de la première etc.....

On peut même dire qu'on envisage un déterminant d'ordre infini ayant le produit ik comme élément a_{ik}.

Si on supprime dans le déterminant (A) la première ligne et la première colonne, on obtient le déterminant d'ordre infini (B)

$$(B)\qquad \begin{array}{cc} 2.2 & 2.3 \ldots. \\ 3.2 & 3.3 \ldots. \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

On en déduit pour le déterminant (A):

1°) *Le nombre de diviseurs d'un nombre N est égal au nombre des lignes du déterminant* (A) *contenant comme élément le nombre N.*

2°) *Les nombres qui sont des carrés parfaits se trouvent dans la diagonale du déterminant* (A) *et réciproquement.*

3°) Le déterminant (A) est symétrique c'est à dire $a_{ik}=a_{ki}$.

4°) $a_{ik}=a_{1i}\cdot a_{1k}=a_{i1}\cdot a_{k1}=\ldots.$

3. - J'appelle *nombre premier* tout nombre a_{ik} qui ne peut pas se trouver comme élément $a_{\lambda\mu}$, λ, μ désignant des nombres différents de 1. Ainsi tout

nombre du déterminant (A) qui n'est pas un élément du déterminant (B) sera dit nombre premier; tout nombre composé est un élément du (B) et réciproquement.

En plus: nombre premier est celui qui se trouve seulement dans deux lignes du déterminant (A) (dont une est la première).

4. - Deux entiers sont *premiers entre eux* lorsqu'ils n'appartiennent pas dans la même ligne du déterminant (A) (exceptée la première, bien entendu). On peut présenter la chose en disant que deux nombres γ, δ sont premiers entre eux s'il est impossible d'avoir simultanement

$$\gamma = a_{h\mu} \quad \delta = a_{h\nu}$$

pour le même valeur de $h \neq 1$.

Ces définitions de nombres premiers et des nombres premiers entre eux fournissent l'intérêt qu'on peut présenter le p. p. c. m., le p. g. c. d. etc. sous une forme plus avantageuse. On peut ainsi dire que le p. g. c. d. de deux nombres Γ, Δ sera le plus grand des indices i pour lesquels on a simultanement

$$\Gamma = a_{ik}, \quad \Delta = a_{i\mu}.$$

De même le théorème classique de l'arithmétique élémentaire d'après lequel un nombre premier par rapport à plusieurs d'autres il est premier par rapport au produit peut être presenté sous la forme suivant. *S'il est impossible de trouver:* 1°) *dans une même ligne les nombres p et a*; 2°) *dans une même ligne les nombres p et b, alors il sera impossible de trouver dans une même ligne les nombres p et ab* (1) etc.

On peut aussi faire les remarques suivantes:

1°) Soit $a_{ik} = a_{h\mu}$ on voit que si $i < h$ on aura $k > \mu$, et réciproquement si $k > \mu$ il vient $i < h$.

2°) Soient deux entiers N, ϱ et supposons que l'on ait $N = a_{ik}$: il vient

$$a_{i,\, k\cdot\varrho} = a_{i\cdot\varrho,\, k} = N\cdot\varrho \qquad (i\cdot\varrho = i \times \varrho,\ k\cdot\varrho = k \times \varrho).$$

On verrait de même que $a_{i,\, k:\varrho} = a_{i:\varrho,\, k} = N:\varrho$.

Ces considérations peuvent nous servir de base pour démontrer plusiuers des théorèmes de l'arithmétique. Donnons quelques exemples:

I. Soit m le p. g. c. d. de deux nombres Γ, Δ et proposons nous de démontrer que les nombres

$$\frac{\Gamma}{m} \qquad \frac{\Delta}{m}$$

sont premiers entre eux.

---

(1) Exceptée toujours la première.

En effet, dans le cas contraire il y aurait sûrement un indice $i>1$ tel que l'on ait

$$\frac{\Gamma}{m}=a_{ik} \qquad \frac{\Delta}{m}=a_{ih}$$

et par suite, en vertu de notre considération ci-haut, il en resulterait

$$\Gamma=a_{i\cdot m,\,k} \qquad \Delta=a_{i\cdot m,\,h}$$

et le nombre $i\cdot m$ serait un diviseur commun, ce qui est absurde car m est le p. g. c. d.

II. Le p. g. c. d. de Γp et Δp est mp (m=p. g. c. d. de Γ et Δ).

En effet

$$\Gamma=a_{m,k} \quad \Delta=a_{m,h} \quad \text{et si} \quad \Gamma=a_{N,k'} \quad \Delta=a_{N,h'}$$

on a (d'après la nouvelle définition du p. g. c. d.) $N<m$.

On a aussi d'autre part (remarque 2)

$$\Gamma\cdot\varrho=a_{m\cdot\varrho,\,k} \qquad \Delta\cdot\varrho=a_{m\cdot\varrho,\,h}.$$

Il suffit donc de montrer que si

$$a_{m\cdot\varrho,\,k}=a_{\Delta,\,\sigma} \qquad a_{m\cdot\varrho,\,h}=a_{\Delta,\,\tau}$$

on a $\Delta<m\cdot\varrho$.

Or, si $\Delta>m\cdot\varrho$, on aurait $\sigma<k$ et $\tau<h$ et comme

$$a_{\Delta,\,\sigma}=\Gamma\cdot\varrho, \qquad a_{\Delta,\,\tau}=\Delta\cdot\varrho$$

on en deduirait d'après 2°)

$$a_{\Delta:\varrho,\,\sigma}=\Gamma, \qquad a_{\Delta:\varrho,\,\tau}=\Delta \qquad \text{où } \Delta:\varrho>m$$

et il y aurait alors un diviseur commun de Γ, Δ plus grand de m.

De cette proposition on déduit immédiatement que:

III. Si δ divise Γ et Δ, il doit diviser m. Car si N désigne le p. g. c. d. de $\frac{\Gamma}{\delta}$, $\frac{\Delta}{\delta}$ alors $N\cdot\delta$ désignera le p. g. c. d. de Γ, Δ et par suite $N\cdot\delta=m$.

On a ainsi immédiatement les théorèmes au moyen desquels on démontre le théorème classique: Quand un nombre divise un produit de deux facteurs, et qu'il est premier avec l'un d'eux, il divise l'autre.

Remarque: On n'utilise nullement dans ce qui précède les propriétés des déterminants. On peut même supprimer le mot déterminant; nous nous servons seulement de l'expression a_{ik} pour les nombres ik en faisant de remarques fort simples.

A. MARONI (Firenze - Italia)

OSSERVAZIONI SUI POLIEDRI

I.

1. - Dalla dimostrazione del teorema *Descartes-Eulero,* relativo ai poliedri, data dallo STAUDT nella *Geometrie der Lage* (1), risulta che, tagliando la superficie di un poliedro semplicemenete connesso lungo certi $v-1$ spigoli (v essendo il numero dei vertici del poliedro), la superficie resta connessa e priva di *successioni chiuse* (2) di facce. Di questa proprietà, che è appena accennata dallo STAUDT, ho dato una dimostrazione per esteso in un articolo pubblicato nel Periodico di Matematiche (3). Ma da quella dimostrazione (per quanto essa lasci molta arbitrarietà nella scelta dei $v-1$ spigoli suddetti) non risulta esplicitamente che *comunque* siano scelti i $v-1$ spigoli, purchè tali da non togliere la connessione della superficie poliedrica, si ottiene sempre una superficie priva di successioni chiuse di facce. È appunto questo che voglio ora dimostrare.

2. - Sia S una superficie poliedrica (aperta o chiusa), la quale contenga successioni chiuse di facce. Diremo f il numero delle facce di S, ed l il numero dei suoi spigoli lungo i quali si connettono le facce (esclusi dunque gli spigoli del contorno di S, se essa è aperta).

Operiamo un taglio lungo uno degli l spigoli menzionati, scelto ad arbitrio, ma in modo che il taglio stesso non tolga la connessione della superficie S: ciò equivale a dire che lo spigolo scelto dovrà connettere due faccie di una successione chiusa. La nuova superficie poliedrica, S', ottenuta dopo il taglio, avrà lo stesso numero f di facce, mentre il numero dei suoi spigoli non appartenenti al contorno sarà divenuto $l-1$. Immaginiamo di proseguire ad operare tagli come il precedente (lungo spigoli scelti ad arbitrio, ma sempre in modo da non rompere la

(1) V. la traduzione di M. Pieri, § 49.

(2) Chiamo *successione chiusa* di facce la figura formata da più facce di una superficie poliedrica, le quali possano ordinarsi in guisa che ciascuna sia consecutiva alla precedente, e la prima all'ultima.

(3) *Il teorema Descartes-Eulero relativo ai poliedri.* Periodico di Matematiche, Serie VI, vol. I, n. 5 (1921).

connessione della superficie poliedrica) fino a che ciò sia possibile; cioè fino a che non si sia ottenuta una superficie poliedrica, $S^{(t)}$, la quale risulti priva di successioni chiuse di facce: diremo t il numero dei tagli operati quando ciò sia avvenuto. La superficie $S^{(t)}$ avrà sempre f facce, ed avrà $l-t$ spigoli non appartenenti al contorno. Ma in una superficie poliedrica connessa che non contiene successioni chiuse di facce, il numero degli spigoli non appartenenti al contorno è uguale al numero delle facce diminuito di una unità (1); si ha dunque:

$$f-1=l-t$$

da cui:

$$t=l-f+1. \tag{1}$$

Questa relazione mostra che il numero t, dei tagli che si debbono operare lungo spigoli di una superficie poliedrica S affinchè essa resti connessa e divenga priva di successioni chiuse di facce, dipende esclusivamente dal numero l degli spigoli di S non appartenenti al contorno e dal numero f delle facce della superficie stessa; il numero t è dunque indipendente dagli spigoli scelti per operarvi i tagli.

3. - Sia, ora, S la superficie di un poliedro semplicemente connesso, il quale abbia f facce, v vertici ed s spigoli. Si ha in tal caso (la superficie essendo chiusa):

$$l=s$$

ed inoltre (teorema Descartes-Eulero):

$$f=s+2-v.$$

Sostituendo nella (1), si ha:

$$t=v-1. \tag{2}$$

Dunque: *il numero degli spigoli lungo i quali è necessario e sufficiente tagliare la superficie di un poliedro semplicemente connesso, affinchè si ottenga una superficie connessa e priva di successioni chiuse di facce, è uguale al numero dei vertici del poliedro diminuito di una unità.*

4. - Osserviamo ora che una superficie poliedrica priva di successioni chiuse di facce è evidentemente sviluppabile in un piano, senza che sia necessario tagliarla ulteriormente. Dunque dal teorema dimostrato al n. 3 segue che: *tagliando la superficie di un poliedro semplicemente connesso lungo $v-1$ spigoli scelti ad arbitrio, ma in modo da non romperne la connessione, la superficie del poliedro si rende sviluppabile su di un piano.*

---

(1) V. il mio articolo citato.

Non si può dire che, affinchè la superficie del poliedro possa svilupparsi su di un piano, sia proprio necessario di operare *tutti* i $v-1$ tagli che la rendono priva di successioni chiuse di facce. Per esempio, se un poliedro possiede un angoloide (certamente non convesso), la somma delle cui facce sia uguale a quattro angoli retti, la superficie del poliedro potrà divenire sviluppabile su di un piano anche se non viene tagliata lungo uno spigolo dell' angoloide suddetto, sebbene le facce di un angoloide formino una successione chiusa. In tal caso, il numero dei tagli occorrenti per rendere sviluppabile su di un piano la superficie del poliedro sarà, al più, $v-2$. Ma è facile persuadersi, pensando, per es., ai più noti poliedri convessi, che in moltissimi casi occorre effettuare *tutti* i $v-1$ tagli, affinchè la superficie del poliedro possa svilupparsi su di un piano.

Possiamo quindi concludere che « *il numero* $v-1$ *è il massimo numero di spigoli lungo i quali va tagliata la superficie di un poliedro semplicemente connesso, avente* v *vertici, per poterla sviluppare in un piano, senza romperne la connessione* ».

II.

1. - Se indichiamo con v_i il numero degli angoloidi i-spigoli di un poliedro semplicemente connesso, con f_h il numero delle sue faccie h-latere, e con s il numero dei suoi spigoli, si hanno le note relazioni:

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum_i i v_i = \sum_h h f_h = 2s \\ \sum_i v_i + \sum_h f_h = s + 2 \end{cases}$$

dalle quali, eliminando s, si ha il sistema equivalente:

$$(2)\qquad \begin{cases} s = \frac{1}{2}\sum_i i v_i \\ \sum_h 2 f_h = 4 + \sum_i (i-2) v_i \\ \sum_h (h-2) f_h = -4 + \sum_i 2 v_i \end{cases}$$

Sorge ora la questione di sapere se, dati i numeri v_i ed f_h, soddisfacenti la seconda e la terza delle relazioni (2), esiste sempre un poliedro semplicemente connesso avente v_i angoloidi i spigoli ($i=3, 4,....$) ed f_h faccie h latere ($h=3, 4,....$) In altre parole: il soddisfare alle (2) è senza dubbio condizione *neccessaria* perchè i numeri s, v_i, f_h, siano relativi ad un poliedro semplicemente connesso; questa condizione è essa anche *sufficiente?*

Le considerazioni che seguono sono rivolte a stabilire che la risposta da darsi a questa questione è negativa. Per dimostrar ciò basterà dare un esempio

dal quale risulti che, pur avendo scelti certi numeri v_i, f_h, s, soddisfacenti le (2), non esiste il corrispondente poliedro.

2. - Limitiamoci a considerare poliedri aventi solo facce trilatere

$$(f_4=f_5=f_6=\ldots\ldots=0).$$

Le (2) allora si scrivono:

$$(3)\qquad \begin{cases} s=\frac{1}{2}\sum_i iv_i \\ 2f_3=4+\sum_i (i-2)v_i \\ f_3=-4+\sum_i 2v_i \end{cases}$$

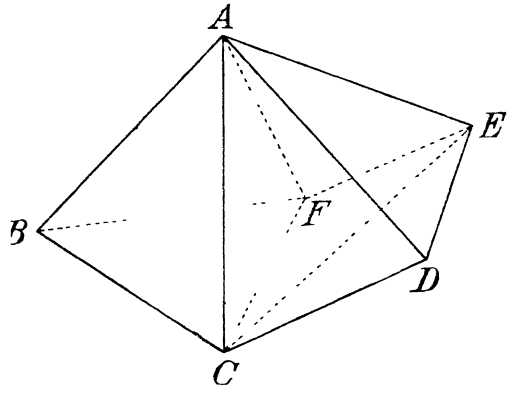
Eliminando f_3 fra la seconda e la terza di queste relazioni, si ha il sistema equivalente:

$$(4)\qquad \begin{cases} s=\frac{1}{2}\sum_i iv_i \\ f_3=-4+\sum_i 2v_i \\ 12+\sum_i (i-6)v_i=0 \end{cases}$$

Se si pone:

$$v_3=1;\quad v_4=4;\quad v_5=1;\quad v_6=v_7=v_8=\ldots\ldots=0$$

si verifica subito che la terza delle relazioni (4) è soddisfatta; le altre due dànno poi: $f_3=8$; $s=12$. Ebbene, vogliamo provare che il poliedro corrispondente non esiste.



3. - Proviamo, infatti, a costruire il poliedro. Sia A il vertice del suo angoloide pentaedro, e siano ABC, ACD, ADE, AEF, AFB, le facce trilatere concorrenti nel vertice A. Poichè il poliedro deve avere, in tutto, 6 vertici, esso non ne avrà altri all'infuori di A, B, C, D, E, F. Sia, per es., B il vertice dell'angoloide triedro, e quindi siano C, D, E, F, i vertici degli angoloidi tetraedri. Unito C con F, dovrà essere BCF una faccia del poliedro. Ora, poichè F deve esser vertice di un angoloide tetraedro, ed in esso concorrono già le facce FEA, FAB, FBC, ne segue che, unito C con E, il triangolo FCE deve essere un'altra faccia del poliedro. Ma allora dal vertice C partirebbero 5 spigoli del poliedro: CD, CA, CB, CF, CE; mentre C deve

esser vertice di un angoloide tetraedro. Ciò prova che non è possibile costruire un poliedro a faccie triangolari con soltanto un angoloide pentaedro, un angoloide triedro, e quattro tetraedri.

Si deve dunque concludere che le relazioni (2) non rappresentano condizioni sufficienti per l'esistenza di un poliedro semplicemente connesso; e sorge perciò il dubbio che fra gli elementi di un poliedro, oltre alle relazioni note ve ne sia qualche altra, di natura più riposta, finora sfuggita all'indagine degli studiosi.

N. HATZIDAKIS (Athenai - Grecia)

DUE PROPOSTE PER L'INSEGNAMENTO MEDIO

Gli Italiani vorranno scusare lo straniero che vuol parlare in una lingua che non è la sua, ma è la dolce lingua del paese di cui in questi giorni siamo gli ospiti.

Due sono i soggetti che tratterò adesso, con grande brevità, soggetti concernenti l'insegnamento nelle scuole medie.

Il primo è una proposta di introdurre nella classe superiore dei Licei e Ginnasi un breve corso *retrospettivo* delle materie matematiche già insegnate nelle classi precedenti. Debbo, naturalmente, dar una giustificazione di questa mia proposta.

È ben noto che lo spirito dei giovanetti non può sempre capire bene i ragionamenti, spesso lunghi e profondi, della Matematica, per quanto esistano in tutti i paesi allievi aventi una gran capacità di concepire la sostanza della Matematica. Ma questi sono sempre l'eccezione, non la regola. Gli allievi medii, nelle classi inferiori, apprendono i teoremi dell'Aritmetica e della Geometria, ma ne apprendono le particolarità, senz'approfondire i concetti generali della Matematica. Certo ciò non è dovuto ad una mancanza di buoni libri, di buona volontà dalla parte del maestro o dell'allievo, ma alla mancanza di maturità dello spirito infantile. Ma qui mi farete forse l'osservazione: « Che vuoi? Intendi introdurre nello spirito dei piccoli allievi le alte teorie moderne della filosofia matematica? È di resto necessario che gli allievi approfondiscano la Matematica? Non basta che apprendano una certa materia matematica che sarà loro utile nella vita? ». A questo rispondo che non sono tanto stolto da chiedere di trasformare gli allievi in filosofi, ma trovo che lo scopo essenziale dell'insegnamento matematico, almeno nelle scuole *generali* (ma, credo, anche nelle scuole tecniche e speciali), è lo sviluppo generale dello spirito. Quando l'allievo avrà già cognizione delle particolarità della materia matematica, sarà molto più facile per lui di far una corta rivista retrospettiva di quello che ha imparato, il maestro insistendo più lungamente nei concetti generali dell'edifizio matematico. So bene il proverbio francese che dice: *comparaison n'est pas raison*, ma tuttavia farò un paragone di quel corso retrospettivo col rimasticamento degli animali: mangiano di fretta, ma poi rimasticano per meglio digerire; vedete che la natura, più dotta che gli uomini, ha già preceduto. Per questo scopo saranno naturalmente necessarii libri

speciali (non so se ne esistono già), facilmente leggibili, leggieri, libri per l'allievo, non trattati di alta scienza!

Vengo adesso alla mia seconda proposta. Questa non è nuova: l'ho già presentata, in inglese, nel Congresso Matematico Internazionale di Cambridge in Inghilterra, sedici anni fa.

Ho sempre pensato che la generazione presente dimentica facilmente che una volta era, anch'essa, in età infantile: non posso altrimenti spiegarmi come avviene sovraccarichiamo i nostri bambini e bambine con cose che, benchè utili, non attraggono molto il loro interesse. Dimentichiamo la psicologia infantile. Il giovinetto ha una sua guisa di pensare che consiste nel saltare da un oggetto ad un altro, da un ragionamento ad un altro differente e ha una tendenza per gli enigmi, per le cose misteriose. Date ad un bambino un enigma o giuoco matematico, una ricreazione od un indovinello, di natura aritmetica o geometrica, p. es. un quadrato magico, o la nota dimostrazione geometrica, naturalmente falsa, che sessantaquattro eguaglia sessantacinque ecc. Vedrete subito i suoi occhi scintillare da un interesse naturale, spontaneo. E, una volta l'interesse svegliato, è certo che egli continuerà e *amerà* la Matematica!

Vorrei dunque, e questa è la mia seconda proposta, che le cosidette *Ricreazioni Matematiche* che oggi non figurano nell'insegnamento, entrino come un elemento rinfrescante nelle nozioni matematiche delle scuole medie. Sono certo, che una tal riforma farebbe *amare* la matematica agli allievi, non soltanto impararla. Quelli di voi, signore e signori, che hanno figliuoli o figliuole sentiranno meglio la significazione della mia proposta. È la sola capace di conservare la freschezza dello spirito infantile e di far più leggiera la sopraccarica delle molte nozioni che la scuola di oggi impone. Ho, io stesso, applicato questo metodo al mio ragazzo, dell'età di undici anni, con gran successo. Adesso viene la quistione: come questa riforma s'introdurrà? Saranno le ricreazioni matematiche fuse nell'altra materia matematica o faranno un piccolo corso distinto? Questo è un punto che vorrebbe forse una lunga discussione. Non ne parleremo adesso. Dirò soltanto che la mia opinione è che tanto la sudetta fusione quanto l'uso di un libro distinto, sono, ambedue, necessarii (1). Esistono già nella letteratura matematica moltissimi libri sulle ricreazioni matematiche, p. es. l'opera francese di ÉDOUARD LUCAS « *Récréations mathématiques* », il libro inglese di BALL « *Mathematical Recreations* », quello tedesco di SCHUBERT « *Mathematische Mussestunden* » e molti altri. Certamente, essi sono trattati lunghi, di più volumi, ma penso che non sarebbe difficile di compilare, sulla base di questi libri,

(1) Ho avuto conoscenza, dopo aver scritto queste linee, di un bello libriccino « *Matematica Intuitiva* » del Sig. Prof. ALESSANDRO PADOA che riunisce ambedue i metodi: Espone l'aritmetica di una maniera intuitiva e narrativa e finisce con un capitolo sulle ricreazioni matematiche.

un piccolo libriccino di duecento o trecento pagine contenente una scelta delle più facili e più interessanti ricreazioni.

La mia conclusione è dunque che, come vedete, io propongo non un cambiamento *tipico* dei programmi, ma, piuttosto, un cambiamento, assai radicale, dei *metodi* d'insegnamento, allo scopo che gli allievi sentano meno la carica dell'obbligo della scuola e conservino la freschezza del loro spirito. Ho parlato forse come un allievo parlerebbe: « Perchè, signori maestri e professori, volete rubare a noi moltissime ore della nostra sì breve infanzia, della sola felice età nella vita umana, colla aridità di tante nozioni? ma se questo è necessario, come voi pretendete, fateci almeno la carica meno arida, meno difficile, meno pesante! ». Ed io credo ciò pienamente giusto: *non la vita palpitante per la scienza, ma la scienza per la vita, come il più alto bene dell'uomo!*

U. CASSINA (Milano - Italia)

THEORIA DE RADICE QUADRATO GRADUALE (*)

Introductione.

Extractione fulmineo de radice quadrato (que deriva ab proprietates de radice quadrato graduale) habe origine ex regula de Jb. J. FOURIER (1) pro resolutione de aequationes numerico.

Tamen libro de FOURIER edito per NAVIER post morte de Auctore, ne es multo claro, in modo speciale in fine. Ita de isto methodo nos inveni pauco vestigios in J. LÜROTH (2) ubi Auctore expone exemplo *obgleich dies nicht günstig ist*, hoc es « etsi illo ne es favorabile »; et in veritate in suo exemplo valore integro de radice quadrato es 10 et tunc (vide per hoc n. I) occurre fac nimis tentativos pro inveni cifras decimale successivo de radice.

Affirmatione simile es in A. XAVIER (3) ubi Auctore dic *cette méthode que nous ne donnons ici qu'à titre de curiosité théorique* (hoc es « isto methodo que nos hic expone solo per curiositate theorico »), nam in suo exemplo valore integro de radice quadrato es minore de 10 et tunc, etiam in illo, ne es adoptabile in modo practico regula de extractione fulmineo de radice quadrato.

Primo exemplo de adoptione practico de tale regula es dato per G. PEANO (1917) (4). Per suo consilio Dr. dominas G. MORI-BREDA et E. VIGLEZIO occupa etiam de ipso quaestione (5).

Sed theoria generale que seque es novo, sicut es novo notatione $\sqrt{}_{m,n}$ et consideratione explicito de concepto que me indica cum illo.

(*) In *latino sine-flexione*, secundum regulas de *Academia Pro Interlingua*, Cavoretto, Torino (Italia).

(1) Jb. J. FOURIER, *Analyse des équations déterminées*, Paris, 1831.

(2) J. LÜROTH, *Vorlesungen über numerischen Rechnen*, Leipzig, 1900.

(3) A. XAVIER, *Théorie des approximations numériques*, Paris, 1909.

(4) G. PEANO, *Approssimazioni numeriche* (Atti R. Acc. Scienze Torino, v. 52, 1916-17).

(5) G. MORI-BREDA, *Estrazione graduale della radice quadrata* (Atti R. Acc. Scienze Torino, v. 53, 1918); E. VIGLEZIO, *Extractione graduale de radice quadrato* (Wiadomości matematyczne, t. 27, 1923, Warszawa).

Dr. MORI-BREDA, in proprio Nota, fac usu de symbolo V_n correspondente ad meo $\mathrm{V}_{n,n}$ et expone proprietate que — etsi minus generale et minus approximato — corresponde ad theorema (10) de praesente Nota.

Etiam Auctores de Notas praecedente explica algorithmo de extractione fulmineo de radice quadrato solo cum exemplos. In contrario, in praesente Nota, ad exemplo numerico exposito in modo completo, seque theoria generale de algorithmo adoptato (1).

Propositiones sequente, ultra que per lingua commune, es expresso per symbolos de Logica-mathematica invento jam post aliquo anno per G. PEANO (2).

Me i explica significatione de illos que me adopta.

$\cdot$: $\therefore$ divide propositiones in partes.

ε lege « es », indica *pertinentia de individuos ad classe*, et corresponde ad propositione *singulare* de scholasticos.

O lege « quem contine », « tunc », « seque », indica *pertinentia de classe ad classe* et *deductione* inter propositiones.

$\mathrm{O}x$ lege « seque pro omne valore de x », corresponde ad propositione *universale* de scholasticos.

$\frown$ lege « et »; multiplicatione logico.

$\ni$ lege « que », « tale que »; si propositione p_x contine variabile x, tunc $x \ni (p_x)$ vale x que satisfac ad conditone p_x.

$\mathrm{X}=10$, base de numeratione.

$\mathrm{Q}=$classe de numeros reale positivo.

$\mathrm{n}=$classe de numeros integro relativo (positivo vel negativo vel nullo).

$\mathrm{N}_0=$classe de numeros integro absoluto (positivo vel nullo).

Si a es numero reale et n es numero integro, tunc cum « $\mathrm{V}a$ », lege *valore integro* de a, nos indica maximo numero integro minore aut aequale ad a; et defini symbolos « $\mathrm{M}a$ », lege *mantissa* de a, « $\mathrm{V}_n a$ », lege *valore* ad n *decimale* de a, « $\mathrm{T}_n a$, lege *termino decimale de gradu* n de a, « $\mathrm{C}_n a$ », lege *cifra de ordine* n de a, per aequalitates sequente:

$$\mathrm{M}a = a - \mathrm{V}a. \qquad \mathrm{V}_n a = \mathrm{X}^{-n}\mathrm{V}(\mathrm{X}^n a).$$
$$\mathrm{T}_n a = \mathrm{V}_n a - \mathrm{V}_{n-1} a. \qquad \mathrm{C}_n a = \mathrm{X}^{-n}\mathrm{T}_{-n} a$$

Exemplo. Si $a = 314{\cdot}15....$ tunc nos habe:

$$\mathrm{V}_{-2} a = 300 = 3\mathrm{X}^2, \quad \mathrm{V}_{-1} a = 310 = 31\mathrm{X}, \quad \mathrm{V}_0 a = \mathrm{V}a = 314, \quad \mathrm{V}_1 a = 314{\cdot}1, \text{ etc.}$$
$$\mathrm{T}_{-2} a = 3\mathrm{X}^2, \quad \mathrm{T}_{-1} a = 1\mathrm{X}, \quad \mathrm{T}_0 a = 4, \quad \mathrm{T}_1 a = 1\mathrm{X}^{-1}, \text{ etc.}$$

$\mathrm{X}^{-n}=$unitate decimale de gradu n.

---

(1) Per studio magis amplo de quaestiones de calculo numerico vide:
U. CASSINA, *Calcolo numerico* (ed. N. Zanichelli, Bologna, 1928).

(2) v. G. PEANO, *Formulario mathematico* (ed. V. Bocca, Torino, 1908).

In hypothesis praecedente, cum « $\sum$ cifras a », lege *summa de cifras* de a, nos indica summa (*serie*) de omne cifra de numero a.

Si a et b es numero positivo et n es numero integro, tunc per « $a \times_n b$ », lege *producto de gradu n* de a per b nos indica summa de omne producto de termino $T_r a$ per termino $T_s b$ ubi summa de gradus decimale $r+s$ es minore aut aequale ad n. Et cum « $P_n(a, b)$ », lege *producto transverso de gradu n* de a per b, nos indica summa de omne producto de termino $T_r a$ per termino $T_{n-r} b$.

Infine, si a et b es numero integro et $a < b$, tunc cum « $a \cdots b$ » lege *intervallo integro* ad a ab b, nos indica classe de numeros integro majore aut aequale ad a et minore aut aequale ad b.

I. - Exemplo de extractione fulmineo de radice quadrato.

Me i explica isto processu de calculo (aut « algorithmo ») in primo loco cum exemplo.

Me vol calcula $\sqrt{\pi}$ (hoc es lato de quadrato de area aequale ad illo de circulo de radio unitario).

Me da explicatione de omne linea de calculo que seque.

Linea 1. Me multiplica π per 10000 tunc me habe numero cum valore integro comprehenso inter X^4 et X^6, et radice comprehenso inter 100 et 1000. Me pone

$$a = X^4 \pi = 31415{\cdot}92....$$

Linea 2. In tabula de quadratos de numero inter 100 et 1000 me lege maximo quadrato minore aut aequale ad valore integro de a; illo es 31329 que es quadrato de $v = 177$. Me scribe v^2 sub a.

Linea 3. Me subtrahe et obtine

$$R_0 = a - v^2 ;$$

de illo me scribe *uno* cifra decimale. Me fac duplo de radice invento $2v = 354$ et calcula productos de illo per numeros ab 1 usque ad 9.

Linea 4. Me inveni maximo cifra que, si nos multiplica per $X^{-1} \times 2v$, da producto non majore de R_0. Illo es 2. Me calcula $2X^{-1} \times 2v$ que scribe sub R_0.

Linea 5. Me subtrahe et obtine:

$$R_1 = R_0 - 2X^{-1} \times 2v = a - v^2 - {\cdot}2 \times 2v ;$$

de illo me scribe *duo* cifra decimale.

Linea 6. Me calcula producto transverso de gradu 2 de 0·2 per se ipso me obtine $4X^{-2}$ que scribe sub numero praecedente.

Linea	1	$a = X^4\pi =$	31415·926535...
»	2	$v^2 = 177^2 =$	31329
»	3	$R_0 =$	869....
»	4	$2X^{-1} \times 2v =$	708
»	5	$R_1 =$	1612....
»	6	$P_2 \cdot 2 =$	4
»	7	$D_2 =$	1608
»	8	$4X^{-2} \times 2v =$	1416
»	9	$R_2 =$	1926....
»	10	$P_3 \cdot 24 =$	16
»	11	$D_3 =$	1910
»	12	$5X^{-3} \times 2v =$	1770
»	13	$R_3 =$	1405....
»	14	$P_4 \cdot 245 =$	36
»	15	$D_4 =$	1369
»	16	$3X^{-4} \times 2v =$	1062
»	17	$R_4 =$	3073....
»	18	$P_5 \cdot 2453 =$	52
»	19	$D_5 =$	3021
»	20	$8X^{-5} \times 2v =$	2832
»	21	$R_5 =$	1895....
»	22	$P_6 \cdot 24538 =$	81
»	23	$D_6 =$	1814
»	24	$5X^{-6} \times 2v =$	1770
»	25	$R_6 =$	44....

$2v =$		
	354	1
	708	2
	1062	3
	1416	4
	1770	5
	2124	6
	2478	7
	2832	8
	3186	9

Linea 7. Me subtrahe et obtine:

$$D_2 = R_1 - P_2 \cdot 2 = a - v^2 - \cdot 2 \times 2v - \cdot 2 \times_2 \cdot 2.$$

Linea 8. Me inveni maximo cifra que, si nos multiplica per $X^{-2} \times 2v$, da producto non majore de D_2. Illo es 4. Me calcula $4X^{-2} \times 2v$ que me scribe sub D_2.

Linea 9. Me subtrahe et obtine:

$$R_2 = D_2 - 4X^{-2} \times 2v = a - v^2 - \cdot 24 \times 2v - \cdot 2 \times_2 \cdot 2;$$

de que me scribe *tres* cifra decimale.

Linea 10. Me calcula producto transverso de gradu 3 de ·24 per se ipso; et inveni $16X^{-3}$ que me scribe sub numero praecedente.

Linea 11. Me subtrahe ed obtine:

$$D_3 = R_2 - \mathrm{P}_3 \cdot 24 = a - v^2 - \cdot 24 \times 2v - \cdot 24 \times_3 \cdot 24.$$

Linea 12. Me inveni maximo cifra que si nos multiplica per $\mathrm{X}^{-3} \times 2v$ da producto que non es majore de D_3. Illo es 5. Me calcula $5\mathrm{X}^{-3} \times 2v$ que scribe sub D_3.

Et cetera si me vol proseque.

Si nos retine ad linea 25, et pone

(*a*)
$$x = \cdot 245385,$$

nos habe:
$$\mathrm{V}_6 R_6 = \mathrm{V}_6 a - v^2 - 2vx - x \times_6 x = 44\mathrm{X}^{-6},$$

et tunc:

(*β*)
$$\begin{cases} a - v^2 - 2vx - x \times_6 x > 44\mathrm{X}^{-6} \\ a - v^2 - 2vx - x \times_6 x < 45\mathrm{X}^{-6}. \end{cases}$$

Sed x es maximo numero cum 6 cifra decimale que redde primo membro de (*β*) positivo, ergo nos habe:

$$a < v^2 + 2v(x + \mathrm{X}^{-6}) + (x + \mathrm{X}^{-6}) \times_6 (x + \mathrm{X}^{-6}),$$

et nam producto graduale ne supera illo ordinario:

$$a < v^2 + 2v(x + \mathrm{X}^{-6}) + (x + \mathrm{X}^{-6})^2,$$

aut:
$$a < (v + x + \mathrm{X}^{-6})^2,$$

aut etiam:
$$\sqrt{a} < v + x + \mathrm{X}^{-6}.$$

Tunc, si nos opera cum V_6, nos habe:

(A)
$$\mathrm{V}_6 \sqrt{a} \leqq v + x.$$

Sed, per proprietate de producto graduale, nos habe:

$$x^2 < x \times_6 x + \mathrm{X}^{-6} \sum \text{cifras } x,$$

tunc pro (*β*) seque:

$$a - v^2 - 2vx - x^2 > \mathrm{X}^{-6}(44 - \sum \text{cifras } x);$$

et nam $\sum \text{cifras } x = 27$, nos conclude que:

$$a - v^2 - 2vx - x^2 > 0,$$

aut
$$a > (v + x)^2$$

et tunc:
$$\sqrt{a} > v + x.$$

Ab ce re, si nos opera cum V_6, nos habe:

(B)
$$\mathrm{V}_6 \sqrt{a} \geqq v + x.$$

Ab (A) et (B) seque:

$$V_6 | a = v + x,$$

et si nos divide per 100, nos habe:

$$V_8 | \pi = X^{-2} V_6 | a = 1{\cdot}77245\ 385.$$

Ita cum usu de 10 cifra decimale de π nos calcula suo radice quadrato cum 8 cifra decimale exacto.

Observatione. Isto algorithmo pro calculo de radice quadrato habe maximo analogia cum divisione fulmineo, tunc me vol da ad illo nomine de « extractione *fulmineo* de radice quadrato ».

Si nos perveni ad producto transverso que non pote es subtracto ab numero praecedente, nos diminue de uno unitate ultimo cifra invento et repete calculos.

Nam nos habe selecto divisore fixo $2v$ majore de 100, et isto circumstantia i praesenta in practica in modo raro.

Nos pote continua methodo fulmineo pro extractione de radice quadrato in modo indefinito et in particulare usque ab obtine approximatione desiderato. Me puta que es utile divulga isto methodo magis simplice et breve quam methodo ordinario pro calculo de radice quadrato.

Cum usu de 40 cifra decimale de π et de methodo fulmineo me inveni

$$V_{38}\pi = 1{\cdot}77245\ 38509\ 05516\ 02729\ 81674\ 83341\ 14518\ 279.$$

Nunc me stude in modo theorico et in generale proprietates de extractione fulmineo de radice quadrato.

II. - Radice quadrato graduale.

Si x es numero positivo et n es numero integro, tunc ad producto de gradu n de x per se ipso es utile — si nos fac usu de lingua commune — da nomine de « *quadrato de gradu n* de x ». Isto definitione es per contra inutile in scriptura symbolico.

Nos habe:

(1) $$a,\ n \varepsilon \mathrm{N} \cdot \supset \cdot a \times_n a = a^2.$$

Si a, n es numero naturale, tunc quadrato de gradu n de a es aequale ad suo quadrato ordinario.

(2) $$x \varepsilon \mathrm{Q} \cdot n \varepsilon \mathrm{n} \cdot \supset \cdot x \times_n x = \mathrm{V}x \times_n \mathrm{V}x + 2(\mathrm{V}x \times_n \mathrm{M}x) + \mathrm{M}x \times_n \mathrm{M}x.$$

Hoc es:

Si x es numero positivo et n es numero integro, tunc quadrato de gradu n de x es expresso per formula supra scripto.

Demonstratione. Per proprietates cognito circa producto graduale nos habe:

$$x \times_n x = (\mathrm{V}x + \mathrm{M}x) \times_n (\mathrm{V}x + \mathrm{M}x) = \mathrm{V}x \times_n \mathrm{V}x + 2(\mathrm{V}x \times_n \mathrm{M}x) + \mathrm{M}x \times_n \mathrm{M}x,$$

quod nos vol demonstra.

Nunc me da definitione sequente:

« Si a es numero positivo et m, n es numero integro, tunc cum scriptura « $\sqrt{}_{m,n}a$ », lege « *radice quadrato* cum m *decimale* de *gradu* n de numero a », me indica maximo numero cum m decimale, cum quadrato de gradu n non majore de numero a ».

Si nos indica cum « max u » maximo individuo de classe numerico u, nos pote scribe definitione praecedente in isto modo:

$$(3) \qquad \begin{array}{c} a \in \mathrm{Q} \cdot m, n \in \mathrm{n} \cdot \supset \cdot \\ \sqrt{}_{m,n}a = \max [x \ni (x \in \mathrm{Q}_0 \cdot \quad x = \mathrm{V}_m x \cdot \quad x \times_n x \leqq a)]. \text{ Def.} \end{array}$$

Ab definitione (3) nos obtine in modo immediato:

$$(4) \quad \text{Hpt (3).} \quad \supset \cdot (\sqrt{}_{m,n}a) \times_n (\sqrt{}_{m,n}a) \leqq a < (\mathrm{X}^{-m} + \sqrt{}_{m,n}a) \times_n (\mathrm{X}^{-m} + \sqrt{}_{m,n}a).$$

$$(5) \quad \text{Hpt (3).} \quad \supset \cdot \sqrt{}_{m,n}a = \sqrt{}_{m,n}\mathrm{V}_n a.$$

Postea, nos habe:

$$(6) \qquad a \in \mathrm{Q} \cdot n \in \mathrm{N}_0 \cdot \supset \cdot \sqrt{}_{0,n}a = \sqrt{}_{0,0}a = \mathrm{V}\sqrt{a}.$$

Hoc es:

Si a es numero positivo et n es numero integro absoluto, tunc radice quadrato cum 0 decimale de gradu n de a es aequale ad valore integro de radice quadrato ordinario.

Demonstratione. Theorema seque in modo immediato ab hypothesis, definitione (3) et formula (1).

$$(7) \qquad a \in \mathrm{Q} \cdot m, n \in \mathrm{n} \cdot \supset \cdot \mathrm{V}_m \sqrt{a} \leqq \sqrt{}_{m,n}a.$$

Hoc es:

Si m, n es numero integro, tunc valore cum m decimale de radice quadrato ordinario de omne numero positivo es minore aut aequale de radice quadrato cum m decimale de gradu n de ipso numero.

Demonstratione. Ab (4), si nos tene praesente que producto graduale ne supera producto ordinario, nos habe:

$$a < (\mathrm{X}^{-m} + \sqrt{}_{m,n}a)^2 \text{ aut } \sqrt{a} < \mathrm{X}^{-m} + \sqrt{}_{m,n}a.$$

Ab hic, si nos opera cum V_m, nos obtine:

$$\mathrm{V}_m \sqrt{a} \leqq \mathrm{V}_m \sqrt{}_{m,n}a = \sqrt{}_{m,n}a. \qquad \text{q. e. d.}$$

Nunc me da definitione:

« In hypothesis de (3), cum scriptura « $\mathrm{Rst}_{m,n}a$ », lege: *residuo de indice* m in extractione de radice quadrato de *gradu* n ab numero a, nos indica differentia inter valore cum n decimale de a et quadrato de gradu n de $\sqrt{}_{m,n}a$ ».

Per symbolos:

(8) $$a \varepsilon \mathrm{Q} \cdot m, n \varepsilon \mathrm{n} \cdot \supset \cdot \mathrm{Rst}_{m,n} a = \mathrm{V}_n a - (\sqrt[]{}_{m,n} a) \times_n (\sqrt[]{}_{m,n} a). \quad \text{Def.}$$

Nos habe in modo immediato:

(9) $$\text{Hpt (8)} \quad \cdot \supset \cdot \mathrm{Rst}_{m,n} a \geqq 0.$$

Hoc es:

In solito hypothesis, residuo de indice m in extractione de radice quadrato de gradu n ab numero a es semper majore aut aequale ad zero.

Nos habe sequente importante theorema:

(10) $$a \varepsilon \mathrm{Q} \cdot m, n \varepsilon \mathrm{N}_0 \cdot m \leqq n.$$
$$\mathrm{Rst}_{m,n} a \geqq \mathrm{X}^{-n} \sum \text{cifras } \mathrm{M} \sqrt[]{}_{m,n} a \cdot \supset \cdot \mathrm{V}_m \sqrt[]{} a = \sqrt[]{}_{m,n} a.$$

Hoc es:

Si a es numero positivo et m, n es numero integro absoluto et m non es majore de n et etiam residuo de indice m in extractione de radice quadrato de gradu n ab numero a es majore aut aequale ad producto de unitate decimale de gradu n per summa de cifras de mantissa de radice quadrato cum m decimale de gradu n de numero a; tunc valore cum m decimale de $\sqrt[]{} a$ es aequale ad isto radice graduale.

Demonstratione. Nos pone:

(α) $$x = \sqrt[]{}_{m,n} a.$$

Nos habe $a \geqq \mathrm{V}_n a$ et inde, pro (8):

(β) $$a \geqq x \times_n x + (\mathrm{V}_n a - x \times_n x) = x \times_n x + \mathrm{Rst}_{m,n} a.$$

Pro (2) nos habe:

(γ) $$x \times_n x = \mathrm{V}x \times_n \mathrm{V}x + 2(\mathrm{V}x \times_n \mathrm{M}x) + \mathrm{M}x \times_n \mathrm{M}x;$$

Sed m, n es numero integro absoluto et $m \leqq n$, tunc:

(δ) $$\mathrm{V}x \times_n \mathrm{V}x = (\mathrm{V}x)^2; \qquad \mathrm{V}x \times_n \mathrm{M}x = \mathrm{V}x \times_n \mathrm{M}x;$$

Per proprietate cognito nos habe etiam:

(ε) $$\mathrm{M}x \times_n \mathrm{M}x > (\mathrm{M}x)^2 - \mathrm{X}^{-n} \sum \text{cifras } \mathrm{M}x.$$

Ab (γ), si nos habe praesente (δ) et (ε) nos deduc:

(ς) $$x \times_n x > (\mathrm{V}x + \mathrm{M}x)^2 - \mathrm{X}^{-n} \sum \text{cifras } \mathrm{M}x = x^2 - \mathrm{X}^{-n} \sum \text{cifras } \mathrm{M}x.$$

Ab (β) et (ς) tunc nos habe:

(ζ) $$a > x^2 + \mathrm{Rst}_{m,n} a - \mathrm{X}^{-n} \sum \text{cifras } \mathrm{M}x.$$

Sed per hypothesis

$$\mathrm{Rst}_{m,n}a \geqq \mathrm{X}^{-n} \sum \text{cifras } \mathrm{M}x;$$

tunc ab (ζ) nos deduc a fortiori $a > x^2$ aut $\sqrt{a} > x$. Et inde, si nos opera cum V_m:

(η) $$\mathrm{V}_m\sqrt{a} \geqq \mathrm{V}_m x = x = \sqrt{}_{m,n}a.$$

Ab (7) et (η) nos deduc thesi.

Nos habe facto usu in modo implicito de isto theorema in exemplo de n. I. Ab calculo ibi exsecuto — linea 25 — nos habe:

$$a = 177{\cdot}245\,385; \qquad \mathrm{Rst}_{6,6}a = 44\mathrm{X}^{-6};$$
$$\sum \text{cifras } \mathrm{M}\sqrt{}_{6,6}a = \sum \text{cifras } {\cdot}245385 = 27; \qquad 27 < 44;$$

ergo:

$$\mathrm{V}_6\sqrt{a} = \sqrt{}_{6,6}a = 177{\cdot}245\,385.$$

Pro deficientia de spatio me non pote reproduc demonstrationes de theoremas generale super que es fundato algorithmo pro extractione fulmineo de radice quadrato. Qui desidera cognosce illos pote consulta meo tractatu: *Calcolo numerico* (ed. N. Zanichelli, Bologna 1928), p. 145-150.

A. FARAGÓ (Budapest - Ungheria)

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

Ich gedenke hier die Bestrebungen zu skizzieren, die seit 3-4 Dezennien bei uns, in Ungarn dominieren und den Zweck haben, das Interesse fir die Mathematik zu wecken und aufrecht zu erhalten, die mathematische Ausbildung in der Mittelstufe, unter den Schülern der drei Typen: humanistische Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen, zu vertiefen und vollkommener zu gestalten, als es bei gemeinsamen Unterricht, in der Schule erreichbar ist. Wenn es ein Prinzip der Didaktik ist: Wissen und Können zu verknüpfen, so ist die Mathematik dazu besonders geeignet.

Im Jahre 1893 hat Daniel Arany, in jener Zeit Prof. an der staatl. Oberrealschule zu Raab, eine Zeitschrift gegründet: « Középiskolai Mathematikai Lapok » d. i. Mathematische Blätter für Mittelschulen (Gymn. und Realschulen). Im Jahre 1896 übernahm die Leitung dieser Zeitschrift Ladislaus Ratz, Prof. an dem evang. Gymn. zu Budapest und behielt sie bis 1914. Der Ausbruch des Krieges machte es unmöglich, die Zeitschrift weiterhin erscheinen zu lassen. Jedoch haben sich beide durch ihre Tätigkeit um die Hebung des allgemeinen Niveaus verdient gemacht; es ist keine Übertreibung, wenn ich behaupte, dass ein grosser Teil unserer allgemeinen bekannten Mathematiker, durch diese Fachorgane ermuntert sich ihrer Gelehrten-Laufbahn gewidmet haben.

War es unmöglich die Zeitschrift während des Weltkrieges erscheinen zu lassen, so hat sich dies in den unruhigen, ganz besonders aber für die Schule schweren Jahren, die dem Kriege folgten, ebenso unmöglich gestaltet. Als hernach gewissermassen einige Beruhigung eintrat und die Konsolidierung der wissenschaftlichen und pädagogischen Arbeit begonnen hatte — ein Verdienst unseres agilen und energischen Unterrichtsministers, des Grafen Kuno Klebelsberg, der für jeden Zweig seines Ressortes ein scharfes Auge hat und unser Kulturleben auf der ganzen Linie zu reorganisieren vermochte — konnte ich nunmehr daran denken, gemäss den bereits erwähnten Zielen, die Arbeit wieder aufzunehmen.

Im Jahre 1925 (1. Febr) erschien in meiner Ausgabe und meiner Schriftleitung die Zeitschrift: « Középiskolai Mathematikai és Fizikai Lapok » d. h. Mathematische und Physikalische Blätter für die Mittelschulen. Dieses mathema-

tische Fachorgan erscheint seitdem monatlich, während des Schuljahres (Sept.-Juni), durchschnittlich zu je 32 Seiten (2 Bogen).

Auch sei hier der moralischen Unterstützung unserer « Br. Roland Eötvös Math. und Physikalischen Gesellschaft » sowie der materiellen unseres Ministeriums für Unterrichtswesen dankend Erwähnung getan. Ebenso müssen hier das wohlwollende Interesse und die werktätige Unterstützung hervorgehoben werden, die mir seitens der akademischen Lehrer zuteil geworden sind. Es seien die Namen der Herrn Professoren Kürschák, Klug, sowie der Docenten, der Herren Goldziher, König, Sárközy, Terkán genannt, die mir sowohl mit ihren grösseren Beiträgen, als auch mit interessanten math. Problemen su Hilfe eilten. Bemerkenswert ist, dass im Kreise unserer Gymnasial — und Realschullehrer eine unausgesetzt im Wachsen begriffene Gruppe sich der Sache annimmt, mit Aufgaben und deren Besprechungen, bezw. mit kleineren und grössren Aufsätzen, sowohl aus dem Gebiete der Math., wie aus dem der Physik, der Schriftleitung zur Seite steht.

Den Weg, auf dem ich fortzuschreiten habe, haben mir bereits meine Vorgänger gewiesen. Aber die Schwierigkeiten waren jetzt beiweitem grösser, all sie es in den guten Jahren der Friedensperiode gewesen. Ich will mich mit deren Schilderung hier nicht befassen und gehe zur Skizzierung unserer Schriftleitung über.

Der wichtigere und der auch dem Umfange nach grössere Teil der Zeitschrift beschäftigt sich, gemäss dem angestrebten Ziel mit der Lösung von Aufgaben, die aus den Gebieten der elementaren Mathematik und Physik genommen, zweckdienlich und nach Tunlichkeit methodisch ausgewählt, an Schüler der vier oberen Klassen, also an Jünglingen (und Mädchen) von 14-17 Jahren gestellt sind und einerseits zur Befestigung des, in der Schule übermittelten Stoffes dienen, anderseits aber, sich auf diesem stützend, die mathematischen Kentnisse zu erweitern und zu vertiefen, die Selbständigkeit in der wissenschaftlichen Arbeit zu steigern bestimmt sind. Es folgen solcherart in jeder Nummer der Zeitschrift der Reihe nach Aufgaben aus der Arithmetik, Gleichungen und theoretische Probleme aus der Algebra, aus der Functionenlehre, der Goniometrie und Trigonometrie, der Planimetrie und Stereometrie und der analytischen Geometrie. Eine besondere Spalte ist der darstellenden Geometrie gewidmet, die von Herrn Dr. Karl Kresznerics, Prof. an der staatl. Oberrealschule zu Budapest II. Bez., geleitet wird.

Bei der Auswahl der Aufgaben müssen wir darauf Rücksicht nehmen, dass die elementare Mathematik in ungarischer Sprache, bisher literarisch wenig behandelt worden ist; den Schülern stehen, ausser den Jahrgängen der früher erwähnten Organe keine Hilfsquelle zur Verfügung. Ich fand es deswegen für notwendig, nebst den, von den Mitarbeitern eingesandten originalen Aufgaben, auch den in der math. Literatur bereits bekannten klassischen Problemen syste-

matisch Platz zu sichern, damit dieselben späterhin auch als Nachschlagsquellen dienen können.

Eine gewisse Schwierigkeit erhebt sich aus dem Umstande, dass die Schüler der einzelnen Klassen verschiedene Vorkentnisse besitzen und dass die Schüler der zwei obersten Klassen (VII und VIII) mehr vorgeschritten sind, als es in den unteren Klassen (V und VI) der Fall ist. Um diese Schwierigkeit zu beheben, haben wir die Aufgaben zwei Gruppen beigeordnet: in der ersten, unter dem Titel « Übungen » findet der Mathematikbeflissene leichtere Aufgaben. Sie sind durchgehend an Schüler der V und VI Klasse gestellt. In der anderen Gruppe, unter der Überschrift « Probleme » stellen wir Aufgaben, zu deren Lösung auch die Kenntniss des Lehrstoffes der zwei obersten Klassen, bezw. eine grössere Gewandtheit erforderlich ist. Ab und zu finden sich hier auch Aufgaben, die auch das Interesse mathematikbeflissener Universitätshörer zu wecken vermögen und auffällig vermerkt werden.

Was nun die Aufgaben aus der Physik anbetrifft, möchte ich vorausschicken, dass die exprimentelle Physik in zwei Kursen behandelt wird. Der eine ist für die untere Stufe bestimmt, in der III. Klasse. Das Lehrziel ist hier: die Beschreibung und Erklärung der einfachsten Erscheinungen, ohne mathematische Formulierung der Gesetze. Letztere, sowie auch die ausführlichere Behandlung kommen erst im höheren Kurs, in den zwei obersten Klassen an die Reihe. Die physikalischen Aufgaben sind also durchgehend den Schülern der zwei obersten Klassen zugedacht. Aus den einzelnen Kapiteln wird je eine Aufgabe so gestellt, wie es die Behandlung des Lehrstoffes von Monat - zu Monat ermöglicht. Da der Lehrplan überall der gleiche ist, so kann im Grossen und Ganzen ein gleicher Vorschritt angenommen werden. Die Aufgaben haben zum grösseren Teil den Charakter, dass ausser dem Begreifen der angestellten Dispositionen auch die Anwendung der mathematisch formulierten Gesetze erfordert wird. Ein weiterer Teil der Aufgaben beschränkt sich auf die Erklärung gewisser Erscheinungen, oder es wird in diesen Aufgaben die Beschreibung gewisser Anordnungen (beispielsweise elektrischer Leitungen) gefordert.

Zur Lösung der gestellten Aufgaben geben wir im allgemeinen eine Frist von einem Monat. Die besten Lösungen werden als Musterlösungen veröffentlicht. Dabei wird nicht bloss auf die Lösungsweise, sondern auch auf die Stilisierung Rücksicht genommen. Selbstredend werden auch die Namen derjenigen veröffentlicht, die die Aufgabe gut gelöst haben, was zur Ermunterung, zugleich aber als Anerkennung der edelsten Ambitionen dienen soll.

Was die Ambition anbetrifft, so sei hier bemerkt, dass sich unseren Schülern der VIII Klasse (d. h. der obersten Klasse) zweimal im Jahre Gelegenheit bietet, ihre Kenntnisse, bezw. ihren Sinn und Fertigkeit für Mathematik auch vor einer anderen Öffentlichkeit kundzutun. Die Math. und Phys. Gesellschaft veranstaltet

seit dem Jahre 1894 zu Beginn jedes Schuljahres, im Monate Oktober, einen Schülerkonkurs aus der Mathematik und seit 1916 auch einen aus der Physik. An solchen Teilnehmer sind Akademiker, die in demselben Jahre die Abiturientenprüfung bestanden haben.

Ein weiterer Konkurs findet gewöhnlich im Monate Mai — also vor den Maturitätsprüfungen — statt. « Landes Studien-Konkurs für die Mittelschulen » genannt, und zwar aus fast allen Gegenständen dieser Schulen. Dieser Konkurs ist vom Oberstudiendirektor für den Distrikt Budapest, Dr. Eugen Pintér, im Jahre 1923, inauguriert und späterhin durch einen Ministerial-Erlass organisiert worden. Dieser Konkurs kann von jeder Schule, für jeden Gogenstand mit je einem Schüler der VIII Klasse beschickt werden.

Beide Konkurse tragen viel zum Aufblühen unseres Schulwesens, wie auch zur Erhöhung der Erfolge bei.

Wie vorher bereits gesagt, wird der grössere Teil der Zeitschrift von den Lösungen und Besprechungen der gestellten Aufgaben ausgefüllt. Nebst letzteren werden in der Zeitschrift kleinere Monographien und Aufsätze, sowohl aus der Math., wie auch aus der Physik, oder es wird die methodische Behandlung einzelner Teile des Lehrstoffes veröffentlicht. Auch die historische Erziehung wird nicht vernachlässigt. Im verflossenen Jahre wurden beispielsweise, anlässlich der Centennarien, dem Andenken Volta's und Newton's ganze Spalten gewidmet. Ist Raum vorhanden, so werden philosophische Gedanken, Aphorismen der grossen Forscher, bezw. Anekdoten aus dem Leben dieser Geistesheroen gebracht.

Den Erfolg unseres Fachorganes erblicken wir nicht bloss darin, dass der Kreis der Interessenten sich unausgesetzt erweitert, — was als Gradmesser der Zunahme an Wissen und Können angesehen werden mag, — sondern er äussert sich auch, wo er in die Erscheinung tritt, in ethischer Beziehung. Die Mitarbeiter, gemeint seien die Schüler, werden nicht alle zu Mathematikern, sie wählen nicht alle einen Lebensberuf, auf dem sie mathematischer Kenntnisse bedürfen. Aber sie werden einer wissenschaftlichen Auffassung teilhaftig; aus unserer Zeitschrift teilt sich ihnen die Liebe zur Wahrheit, ein Drang zur eigenen Forschung, die Lust an der Arbeit, ein gewisses Selbstvertrauen mit, dem sich aber auch Bescheidenheit und die Achtung vor der Leistung Anderer beigesellt.

N. SAKELLARIOU (Athenai - Grecia)

PROJET POUR LA CONSTITUTION D'UNE COMMISSION INTERNATIONALE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Mesdames et Messieurs les congressistes,

On sait qu'avant la Grande Guerre il existait une Commission Internationale, qui portait le nom de IMUK, c'est à dire: « Internationale-Mathematische-Unterrichts-Kommission ». La direction des travaux de cette Commission appartenait surtout à feu M. F. Klein, le mathématicien allemand bien connu, qui, sans compter les services immenses qu'il avait rendus à la science mathématique, a montré un intérêt extraordinaire pour l'amélioration de l'enseignement des mathématiques, surtout dans l'enseignement moyen, et a contribué sérieusement non seulement à l'amélioration de l'enseignement des mathématiques en Allemagne et ailleurs, mais aussi au remaniement des programmes analytiques des mathématiques, lesquels ont été adaptés surtout à la vie et aux besoins professionnels de l'homme et de la société. Je ne désire pas faire en cette occasion un développement sur les travaux de la Commission, dont vous connaissez sans doute l'activité.

La « Société des Nations », qui a été fondée après la Guerre, a compris dans ses buts et dans le programme de ses travaux « la collaboration spirituelle » des Nations. Cette collaboration est évidemment considérée comme générale, c'est à dire qu'elle a pour but, à ma connaissance, des questions d'intérêt général.

En considération de ce qui précède, je crois que le Congrès devra s'occuper de la constitution d'une Commission Internationale, qui, par ses membres, suivra l'enseignement des mathématiques dans les écoles des diverses Nations, tout d'abord pour l'enseignement moyen. Les conséquences de cette institution, les propositions pour l'amélioration de l'enseignement par un changement des méthodes et du mode d'enseignement ainsi que des matières des programmes analytiques, seront soumises à la Commission de tous les membres réunis, qui après un examen détaillé prendra une décision sur les réformes les plus appropriées. Je crois que la formation d'une telle Commission Internationale, dont les travaux seront soumis au Congrès International des mathématiciens, contribuera à ce que nous puissions acquérir après un certain temps un programme international unique dans ses lignes générales, ainsi qu'une méthode unique en général pour l'enseignement des mathématiques, tandis que par contre continueront les recherches et les expé-

riences pour l'amélioration, à chaque occasion, de la méthode d'enseignement. Je n'ai pas l'intention de fixer en détail le programme des travaux de cette Commission Internationale, car cette tâche incombe au Congrès; je crois cependant que celle-ci peut être composée d'un ou deux représentants de chaque Nation. Si notre Congrès approuve en principe la formation de la Commission, on pourra procéder immédiatement à la constitution d'une Commission provisoire, qui rédigera les statuts du fonctionnement de cet organisme, afin que ces statuts puissent être soumis à l'approbation de notre Congrès.

J'ai donc l'honneur de proposer *La constitution d'une Commission Internationale pour l'Enseignement des Mathématiques.*

ERRATA CORRIGE DEL TOMO II

Pag. 359, invece di:

(1) $lim\ A(S_n) \geqq A(S)$

si legga:

(1) $\underline{\lim}\ A(S_n) \geqq A(S).$

S. MINETTI (Roma - Italia)

SULLA TEORIA DELLE FUNZIONI INTERE DI GENERE FINITO (*)

§ 1. - Sulla crescenza del massimo del modulo di una funzione intera.

Com'è ben noto, lo studio della crescenza del massimo del modulo di una funzione intera di genere finito per $|z|=r$, e che suole designarsi con $M(r)$, è uno dei problemi fondamentali della teoria di cui qui ci occupiamo.

Detto problema fu trattato in modo esauriente dal LINDELÖF e dal BOUTROUX. Questi Autori precisarono in modo molto soddisfacente i risultati precedentemente stabiliti dal POINCARÉ e dal BOREL.

In particolare, il LINDELÖF spingendo le sue ricerce più in là di quanto non aveva fatto il BOUTROUX, stabilì fra l'altro il seguente risultato:

« *Se* M(r), *massimo del modulo di una funzione intera* F(z), *soddisfa a partire da un certo valore di* r, *alla diseguaglianza*

$$M(r) < e^{Br^{\varrho}(\lg r)^{\alpha}}, \qquad B \text{ cost. pos.}, \ \varrho > 0, \tag{1}$$

allora, a partire da un certo valore di n, *il modulo dell'* n^{mo} *zero della* F(z), (*supposto tali zeri esistenti ed ordinati per moduli non decrescenti*), *soddisfa alla diseguaglianza*

$$r_n > (1+\varepsilon)\left[\frac{\varrho^{\alpha-1}}{Be} n(\lg n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\varrho}} \tag{2}$$

« *Se viceversa il modulo* r_n *dell'* n^{mo} *della* F(z), *soddisfa a partire da un certo valore di* n *alla condizione*

$$r_n > [An(\lg n)^{\alpha}]^{\frac{1}{\varrho}} \tag{3}$$

allora, a partire da un certo valore di r, M(r) *soddisfa alla*

$$M(r) < e^{Kr^{\varrho}(\lg r)^{-\alpha}} \text{ »} \tag{4}$$

dove K è una costante positiva della quale il LINDELÖF dette il valore per il

(*) Per ritardo nell'invio delle bozze, questa Comunicazione, pertinente alla Sezione I D, ha dovuto essere stampata alla fine del volume.

IL COMITATO DI REDAZIONE

caso di una $F(z)$ di genere zero ed uno, dimostrandone invece la sola esistenza nel caso generale di una $F(z)$ di genere qualunque.

Sfruttando alcune diseguaglianze stabilite dal BLUMENTHAL relativamente al fattore primario di WEIERSTRASS e valendomi di una opportuna decomposizione in prodotti parziali della classica espressione pure weierstrassiana in prodotto infinito della $F(z)$, *ho potuto stabilire un limite superiore molto preciso per il valore della costante* K *che figura nella* (4), *che vale* « *qualunque* » *sia il genere della funzione.*

E precisamente ho trovato

$$K=(1+\varepsilon)\left[\frac{(p+1)\varrho^{-a+1}}{p(\varrho-p)}+\frac{p\varrho^{-a+1}}{(p+1)(p+1-\varrho)}\right] \quad (5)$$

(1).

Nella precedente formula (5), ε è una quantità positiva arbitraria; prefissata che sia, la diseguaglianza (4) vale, con il valore dato dalla (5), a partire da un certo valore r funzione di ε.

§ 2. - Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una funzione intera sia di un determinato genere e di un determinato ordine reale.

Il Signor LANDAU in una Sua nota molto interessante, riproducente l'estratto di un carteggio intervenuto fra lui ed il Signor HADAMARD, dette le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una funzione intera fosse di genere minore od eguale ad numero N positivo dato.

Traendo le mosse dai ragionamenti del LANDAU, io dimostrai come:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione intera f(x), $f(0)\neq 0$, *abbia l'ordine reale* ϱ *ed il genere non superiore all'ordine è che sian soddisfatte le due condizioni*:

$$(\alpha) \qquad \text{I}^{a} \qquad \int^{\infty}\frac{\mathfrak{M}_r}{r^{\varrho+1+\varepsilon}}\,dr$$

(*dove* $\mathfrak{M}_r=\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi$, $x=re^{i\varphi}$) *convergente o divergente secondo chè* $|\varepsilon|$ *essendo* $>$ *di zero e del resto qualunque è rispettivamente* $\varepsilon>0$ *od* $\varepsilon<0$.

$$(\beta) \qquad \text{II}^{a} \qquad \varlimsup_{r\to\infty}\frac{M_r}{r^{\varrho+\sigma}}=0$$

per $\sigma>0$ *e del resto qualunque, e dove* $M_r=\lg M(r)$ *ed* M(r) *è il logaritmo del max del modulo di* f(x) *per* $|x|=r$.

---

(1) Il VALIRON che si era occupato del medesimo argomento aveva trovato per K il valore $\frac{\varrho(1+\varepsilon)}{(p+1-\varrho)(\varrho-p)}$ che è più preciso di quello che io qui riporto per $p<\varrho<p+\frac{1}{2}$ circa, mentre il valore dato dalla (5) è a sua volta più preciso di quello del VALIRON per tutti i restanti valori di ϱ.

Se poi l'integrale (α) *è convergente per* $\varepsilon=0$ *e la* (β) *è soddisfatta pure per* $\sigma=0$ *allora la* f(x) *è di ordine* ϱ *per eccesso, altrimenti per difetto, e viceversa.*

Si ottengono invece le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una funzione intera f(x) *abbia un ordine reale* ϱ *ed un genere* $p>\varrho$ *sostituendo alla condizione* II^a *l'altra*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M_r}{r^{p+\sigma}}=0,$$

notando che in tal caso la f(x) *sarà di ordine reale* ϱ *per eccesso o per difetto secondochè la sola condizione* I^a *sia o no soddisfatta per* $\varepsilon=0$.

Ho inoltre dimostrato che tali condizioni necessarie e sufficienti perchè una $f(x)$ sia di un certo genere e di un certo ordine possono anche assumere la seguente forma particolarmente importante e significativa da vari punti di vista.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione intera f(x), $f(0)\neq 0$, *abbia l'ordine reale* ϱ *ed il genere non superiore all'ordine* ϱ *è che siano verificate le due condizioni:*

$$I^a \qquad \int^{\infty} \frac{n(r)\lg r}{r^{\varrho+1+\varepsilon}}\,dr$$

(*dove* n(r) *è il numero degli zeri della* f(x) *il cui modulo non supera* r), *convergente o divergente secondochè* $|\varepsilon|$ *essendo qualunque è rispettivamente* $\varepsilon>0$ *od* $\varepsilon<0$.

$$II^a \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{M_r}{r^{\varrho+\sigma}}=0$$

con $\sigma>0$ *e del resto qualunque.*

Ove poi il p *superasse l'ordine* ϱ, *alla condizione* II^a *va sostituita l'altra*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M_r}{r^{p+\sigma}}=0.$$

§ 3. - I concetti di « ordine apparente precisato » e di « ordine reale precisato ».

Il BOREL introdusse, nella Teoria delle funzioni intere, i ben noti concetti di ordine apparente e di ordine reale. Il LINDELÖF introdusse poi gli *ordini* (ϱ, ϱ_1, ϱ_2,...., ϱ_ν) *col dire che una* f(x) *è di tale ordine quando, a partire da un certo valore di* r, *resta sempre soddisfatta la diseguaglianza*

$$M(r)<e^{r^{\varrho}(\lg r)^{\varrho_1}(\lg^2 r)^{\varrho_2}\ldots.(\lg^\nu r)^{\varrho_\nu+\varepsilon}}$$

mentre l'altra diseguaglianza

$$M(r)>e^{r^{\varrho}(\lg r)^{\varrho_1}(\lg^2 r)^{\varrho_2}\ldots.(\lg^\nu r)^{\varrho_\nu-\varepsilon}}$$

è soddisfatta per una ∞^{ta} *di valori di* r *tendenti all'*∞.

Propongo di denominare tali ordini, « *ordini apparenti precisati* » e richiamo l'attenzione sulla importanza di considerare accanto a tale concetto, l'altro di « *ordine reale precisato* » che ho recentemente introdotto nella teoria che ci occupa.

Una f(x), *avente una* $\infty^{tà}$ *di zeri si dirà di* « *ordine reale precisato* » $[\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu]$ *se*

$$\sum \frac{1}{r_n^{\varrho}(\lg r_n)^{\varrho_1}(\lg^2 r_n)^{\varrho_2}\ldots (\lg^\nu r_n)^{\varrho_\nu+\varepsilon}}$$

è convergente o divergente secondochè $|\varepsilon|$ *essendo qualunque è rispettivamente* $\varepsilon>0$ *od* $\varepsilon<0$.

Il Lindelöf dimostrò che una f(x) *di genere non superiore a* ϱ *è di ordine apparente precisato* $(\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu)$ *se e soltanto se, a partire da un certo valore di* n *la diseguaglianza*

$$r_n > [n(\lg n)^{-\varrho_1}(\lg^2 n)^{-\varrho_2}\ldots (\lg^\nu n)^{-\varrho_\nu-\varepsilon}]^{\frac{1}{\varrho}}$$

è sempre soddisfatta, mentre che l' altra diseguaglianza

$$r_n < [n(\lg n)^{-\varrho_1}(\lg^2 n)^{-\varrho_2}\ldots (\lg^\nu n)^{-\varrho_\nu+\varepsilon}]^{\frac{1}{\varrho}}$$

è soddisfatta per una $\infty^{tà}$ *di valori dell' indice* n.

La considerazione esclusiva degli ordini apparenti precisati astringe dunque le nostre argomentazioni a classi molto particolari, sebbene interessanti, di funzioni intere. Proporrei, in armonia al ben noto concetto di crescenza regolare introdotto dal BOREL, di denominare le funzioni appartenenti a dette classi « *funzioni a crescenza irregolare destra* ».

Una f(x) *invece, di ordine reale precisato* $[\varrho, \varrho_1]$ [1] *è tale, in generale che il suo modulo soddisfa necessariamente solo alle due condizioni*

$$r_n^{\varrho} > n(\lg n)^{-\varrho_1-\varepsilon}$$

per una $\infty^{tà}$ *di valori di* n, *ed*

$$r_n^{\varrho} < n(\lg n)^{-\varrho_1+1+\varepsilon}$$

pure per una $\infty^{tà}$ *di valori di* n.

Le funzioni di un certo ordine reale precisato appartengono dunque a classi di funzioni intere che, seguendo la terminologia testè introdotta si direbbero « *a crescenza irregolare bilaterale* ».

Ed in conseguenza dunque di quanto dimostrò il LINDELÖF per il loro corrispondente $M(r)$ non può, in generale, concludersi che una diseguaglianza della forma

$$M(r) < e^{\varrho+\sigma}$$

come cioè se si trattasse di una $f(x)$ di ordine reale usuale ϱ.

---

[1] Mi limito qui, per amore di semplicità, a considerare gli ordini reali precisati $[\varrho, \varrho_1]$.

La divergenza invece, rispetto a tali ultime funzioni, si manifesta, sotto forma di una condizione integrale, per il loro valor medio $\mathfrak{M}_r$ in quanto ho dimostrato che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione intera f(x), $f(0)+0$, *sia di ordine reale precisato* $[\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu]$ *e di genere non superiore all'ordine è che siano soddisfatte le due condizioni*

$$\mathrm{I}^a \qquad \int^{\infty} \frac{\mathfrak{M}_r}{r^{\varrho+1}(\lg r)^{\varrho_1+\varepsilon}}\, dr$$

convergente o divergente secondochè $|\varepsilon|$ *essendo qualunque è rispettivamente* $\varepsilon>0$ *od* $\varepsilon<0$

$$\mathrm{II}^a \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{M_r}{r^{\varrho+\sigma}} = 0$$

per $\sigma>0$ *e del resto qualunque.*

Ove poi il genere p *della* f(x) *superasse l'ordine* ϱ, *alla condizione* II^a *va sostituita l'altra*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M_r}{r^{\varrho+\sigma}} = 0,$$

valendo altresì identiche conclusioni di cui alle analoghe condizioni necessarie e sufficienti enunciate nel § 2, *nel caso in cui la* f(x) *sia di ordine reale precisato* $[\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu]$ *per difetto o per eccesso.*

Lo studio delle funzioni intere di un dato ordine reale precisato sembra dunque particolarmente interessante sia perchè il concetto di ordine reale precisato è la naturale estensione del concetto di ordine reale a suo tempo introdotto dal BOREL, sia perchè la classe di dette trascendenti intere contempla funzioni a crescenza irregolare di lata generalità.

§ 4. - L'andamento della crescenza del valor medio $\mathfrak{M}_r$.

Il risultato del LANDAU citato nel § 2 e sopratutto il I° teorema che ho nello stesso paragrafo enunciato (cond. nec. e suff. perchè una $f(x)$ abbia un certo genere ed un certo ordine; prima forma di dette cond. nec. e suff.) pongono in viva luce tutta l'importanza della considerazione per una funzione intera, del suo valor medio $\mathfrak{M}_r$. Non credo pertanto privo di interesse il comunicare qui taluni risultati a cui io son pervenuto, relativamente all'andamento della crescenza del valor medio di una data funzione intera per la quale sia conosciuto l'andamento della crescenza del modulo, r_n, del suo zero generico, in funzione di n.

I. *Se a partire da un certo valore di* n *è*

$$r_n = An^{\frac{1}{\lambda}}, \qquad A \text{ cost. pos.}$$

allora, a partire da un certo valore di r, *è*

$$\mathfrak{M}_r = [1+\sigma(r)]\frac{1}{\lambda A^\lambda} r^\lambda, \qquad \text{con } \lim_{r\to\infty} \sigma(r) = 0.$$

II. *Se a partire da un certo valore* n *è*

$$n^{\frac{1}{\varrho}-\varepsilon} < r_n < n^{\frac{1}{\varrho}+\varepsilon}$$

allora, a partire da un certo valore di r, *è*

$$r^{\varrho-\varepsilon} < \mathfrak{M}_r < r^{\varrho+\varepsilon}$$

ovvero in forma più concisa ed espressiva:

Se a partire da un certo valore di n, r_n *è a crescenza regolare, a partire da un certo valore di* r *è a crescenza regolare anche* $\mathfrak{M}_r$.

III. *Se a partire da un certo valore di* r *è*

$$r^{\varrho-\varepsilon} < \mathfrak{M}_r < r^{\varrho+\varepsilon}$$

allora, a partire da un certo valore di n, *è*

$$n^{\frac{1}{\varrho}-\varepsilon} < r_n < n^{\frac{1}{\varrho}+\varepsilon}$$

ovvero in forma più concisa ed espressiva:

Se a partire da un certo valore di r, $\mathfrak{M}_r$ *è a crescenza regolare, a partire da un certo valore di* n *è a crescenza regolare anche* r_n.

I risultati II e III permettono dunque di asserire che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè, a partire da un certo valore di r, $\mathfrak{M}_r$ *sia a crescenza regolare è, che a partire da un certo valore di* n, *lo sia* r_n *e viceversa.*

IV. *Se a partire da un certo valore di* n, *e*

$$An^{\frac{1}{\varrho}} < r_n < Bn^{\frac{1}{\varrho}}, \quad 0 < A < B$$

allora a partire da un certo valore di r, *è*

$$\frac{1+\varepsilon}{\varrho B^{\varrho}} r^{\varrho} < \mathfrak{M}_r < \frac{1+\varepsilon}{\varrho A^{\varrho}} r^{\varrho}$$

e viceversa.

Ho stabilito tali teoremi valendomi fra l'altro della semplice ma importante osservazione che afferma l'eguaglianza fra la serie

$$\sum \frac{1}{r_n^{\varrho+\varepsilon}}$$

e l'espressione

$$(\varrho+\varepsilon)^2 \int_0^{\infty} \frac{\mathfrak{M}_r}{r^{\varrho+1+\varepsilon}} dr,$$

osservazione che recentemente ebbi occasione di comunicare in una breve nota all'Académie des Sciences de Paris.

Il teorema IV fissa in una maniera estremamente precisa l'andamento della crescenza del valor medio $\mathfrak{M}_r$ di una funzione intera data in funzione dell'andamento della crescenza del modulo r_n del suo n^{mo} zero generico.

I precedenti risultati si estendono poi anche al caso degli ordini $(\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu)$, giungendo così all'altra proposizione, (ove ci si limiti ad es. agli (ϱ, ϱ_1)).

V. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè a partire da un certo valore di* r *sia*

$$r^{\varrho}(\lg r)^{\varrho_1-\varepsilon} < \mathfrak{M}_r < r^{\varrho}(\lg r)^{\varrho_1+\varepsilon}$$

è che, a partire da un certo valore di n, *sia*

$$n^{\frac{1}{\varrho}}(\lg n)^{-\frac{\varrho_1}{\varrho}-\varepsilon} < r_n < n^{\frac{1}{\varrho}}(\lg n)^{-\frac{\varrho_1}{\varrho}+\varepsilon}$$

e viceversa.

INDICE

COMUNICAZIONI

SEZIONE I-C

HAAR A. - Über Eindeutigkeit und Analyzität der Lösungen partieller Differentialgleichungen . . . . . Pag. 5

DRACH J. - Sur la transformation et l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendentes, par l'usage explicite des caractéristiques d'Ampère . . . . » 11

TRICOMI F. - Sull'equazione $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ . . . . . » 27

COLOMBO B. - Problemi per le equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico . . . . . » 31

ZERVOS P. - Sur une théorie nouvelle du problème d'intégration des systèmes de Monge . . . . . » 37

PAPAIOANNOU C. - Sull'integrazione di una certa equazione di Monge con quattro variabili . . . . . » 41

PFEIFFER G. - Quelques additions au problème de M. Buhl . . . . » 45

PFEIFFER G. - Sur la recherche des intégrales à $n-q$ dimensions de l'équation de Pfaff généralisée . . . . . » 47

PFEIFFER G. - Sur les produits des groupes d'espèce speciale des formes de Pfaff . . . . . » 49

HUMBERT P. - Sur une équation aux dérivées partielles du troisième ordre . . . . . » 55

CAVALLI E. - Sull'integrazione delle equazioni differenziali della balistica » 59

TONELLI L. - Sulla semicontinuità degli integrali doppi . . . . . » 65

SAKELLARIOU N. - Über die Beltrami-Hamiltonsche partielle Differentialgleichung in der Variationsrechnung . . . . . » 69

PERRON O. - Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von gewöhnliche Differentialgleichungen und Differenzengleichungen » 75

COURANT R. - Über partielle Differenzengleichungen . . . . . » 83

SMITH O. A. - Reziproke Differentialgleichungen und Differenzengleichungen zweiter Ordnung . . . . . » 91

JULIA G. M. - Remarques sur les problèmes de « meilleure approximation » et sur le problème de Dirichlet . . . . . Pag. 95
BABINI J. - Sobre la integración aproximada de las ecuaciones diferenciales de segundo orden . . . . . » 103
KRAWTCHOUK M. - Sur l'intégration approchée des équations différentielles linéaires . . . . . » 109
JANCZEWSKI S. A. - Les théorèmes d'oscillation des systèmes différentiels linéaires autoadjoints du quatrième ordre . . . . . » 117
POPOVICI C. - Nouvelles solutions de l'équation de Volterra . . . . » 121
POMEY L. - Resumé d'une théorie synthétique des équations intégro-différentielles d'ordre fini ou infini, à un nombre fini ou infini de variables, et de leurs applications aux équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles . . . . . » 133
RIESZ F. - Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires » 143
FANTAPPIÈ L. - Sulla teoria dei funzionali analitici . . . . . » 149
FANTAPPIÈ L. - Le equazioni funzionali lineari e il calcolo delle matrici nella fisica dei quanti . . . . . » 157
MOLLERUP J. - Die methode der Iteration im Falle eines beschränkten Kerns . . . . . » 161
GOŁĄB S. - Sur un théorème rentrant dans le calcul fonctionnel et son application géométrique . . . . . » 165
PINCHERLE S. - Osservazione sopra una classe di operazioni lineari . » 167
FLAMANT P. - La notion de transmutation dérivée dans l'étude des transmutations linéaires . . . . . » 171
WAVRE R. - Sur une classe de fonctionnelles automorphes . . . . » 177
STEINHAUS H. - Quelques applications de l'analyse fonctionnelle à la théorie des fonctions d'une variable réelle. . . . . » 183
KACZMARZ S. - Über eine Anwendung der Funktionalen an die Orthogonalreihen . . . . . » 189

SEZIONE I-D

KOEBE P. - Methoden der konformen Abbildung und Uniformisierung . Pag. 195
GIORGI G. - Fondamenti per una teoria intrinseca delle funzioni di variabile complessa. . . . . » 205
NIKODYM O. - Sur le fondement des raisonnements locaux de l'analyse classique . . . . . » 215
NEVANLINNA R. - Sur les théorèmes d'unicité dans la théorie des fonctions uniformes . . . . . » 223
MENCHOFF D. - Sur la représentation conforme des domaines plans . » 229

STOILOW S. - Sur la topologie des fonctions analytiques . . . . . Pag. 231
ONICESCU O. - Les méthodes topologiques dans la théorie des fonctions de variable complexe . . . . . » 235
LAVRENTIEFF M. - Sur une méthode géométrique dans la représentation conforme . . . . . » 241
PÓLYA G. - Sur la recherche des points singuliers de la série de Taylor » 243
PLANCHEREL M. - Sur le développement d'un couple de fonctions arbitraires en séries de fonctions fondamentales d'un problème aux limites du type hyperbolique . . . . . » 249
KASNER E. - Géométrie des fonctions polygènes . . . . . » 255
VALIRON G. - Sur quelques propriétés des fonctions analytiques dans le voisinage de leurs singularités . . . . . » 261
SZÁSZ O. - Ueber Dirichletsche Reihen an der Konvergenzgrenze . . » 269
BUHL A. - Sur la permutabilité des opérateurs différentiels . . . . » 277
KAKEYA S. - On the maximum modulus of an analytic function of two variables . . . . . » 283
OBRECHKOFF N. - Sur la sommation de la série de Taylor sur le contour du domaine de sommabilité par les diverses méthodes . » 287
MYRBERG P. J. - Über diskontinuierliche Gruppen und automorphe Funktionen von mehreren Variabeln . . . . . » 293
RADEMACHER H. - Zur Theorie der Modulfunktionen . . . . . » 297
OSTROWSKI O. - Anwendungen einer Lindelöfschen Transformation. . » 303
MANDELBROJT S. - Sur les singularités des séries de Dirichlet . . . » 305
PLANCHEREL M. - Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d'Hermite » 309
BROGGI U. - Su di una classe di sviluppi in serie di polinomi di Hermite . . . . . » 311
DUSL K. - Quelques remarques sur les polynomes d'Hermite. . . . » 315
KAMPÉ DE FÉRIET J. - Sur l'uniformisation des fonctions hypergéométriques de deux variables . . . . . » 323
DIXON A. C. - Construction of a pair of functions φ, ψ satisfying the equations
$$\begin{cases} \varphi(z+i\pi)-\varphi(z-i\pi)\pm\{\psi'(z)+\psi''(z)\}=0 \\ \psi(z+i\pi)-\psi(z-i\pi)\pm\{\varphi'(z)-\varphi''(z)\}=0 \end{cases}$$
where the upper sign applies to the right half-plane, and the lover to the left . . . . . » 329
AKIMOFF M. - Ueber die Bessel'schen Funktionen mehrerer Variabeln. » 333
TAMBS LYCHE R. - Sur la convergence de la série $\sum_{r=0}^{\infty}\left[\frac{x}{r}\right]z^r$ . . . . » 341
LEJA F. - Sur quelques propriétés frontières des séries entières doubles » 347
MILNE-THOMSON L. M. - A seven-decimal table of inverse hyperbolic cotangents . . . . . » 357

SEZIONE VI

CHWISTEK L. - Nouvelles recherches sur les fondements des mathématiques . . . . . Pag. 375
PADOA A. - Proposizioni assiomatiche . . . . . » 381
HÄRLEN H. - Ueber Axiomensysteme als Satzfunktionen . . . . . » 389
Baron de VOS VAN STEENWIJK J. E. - Some remarks on the teaching of mathematics in secondary schools . . . . . » 393
FURLANI G. - Nuovi indirizzi nell'insegnamento della matematica in Italia . . . . . » 397
SITTIGNANI G. M. - L'insegnamento della matematica negli Istituti di cultura generale . . . . . » 403
ARTOM E. - Intorno all'insegnamento dell'aritmetica e dell'algebra . . » 411
MARCOLONGO R. - Il calcolo vettoriale nell'insegnamento secondario . » 415
HEEGAARD P. - La représentation des points imaginaires de Sophus Lie et sa valeur didactique . . . . . » 421
CLAPIER C. - Méthode de recherche didactique en géométrie élémentaire » 425
ZERVOS M. - Sur une expression nouvelle de la définition des nombres premiers. . . . . » 429
MARONI A. - Osservazioni sui poliedri . . . . . » 433
HATZIDAKIS N. - Due proposte per l'insegnamento medio . . . . . » 439
CASSINA U. - Theoria de radice quadrato graduale . . . . . » 443
FARAGÓ A. - Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok . . . . . » 453
SAKELLARIOU N. - Projet pour la constitution d'une Commission Internationale pour l'enseignement des mathématiques . . . . . » 457

MINETTI S. - Sulla teoria delle funzioni intere di genere finito . . . » 459